SCHAUM'S ouTlines

全美经典学习指导系列

工程力学

——静力学与动力学

（原第五版）

〔美〕E. W. 纳尔逊　C. L. 贝斯特　W. G. 麦克莱恩 著

贾启芬　郝淑英 译

- 获得好成绩的帮手
- 函盖课程的所有基础，任一教材的补充
- 教授有效的解题技巧
- 460道详细解答的习题
- 860道带答案的练习题
- 理想的自学读物

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1429.0101)
责任编辑：鄢德平

SCHAUM'S ouTlines

全球销量
超越3000万的
"全美经典学习指导系列"
是您的最佳
学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导、全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

概率和统计
统计学
离散数学
Mathematica使用指南
数理金融引论
机械振动
微分方程
统计学原理（上）
统计学原理（下）
微积分
静力学与材料力学
有限元分析
传热学
近代物理学
2000工程热力学习题精解
工程力学
3000物理习题精解
流体动力学
物理学基础
材料力学
2000离散数学习题精解
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
3000化学习题精解
大学化学习题精解
电路
电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
数字原理
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学

ISBN 7-03-009581-2

9 787030 095817 >

ISBN 7-03-009581-2/O・1429
定价：38.00 元

全美经典学习指导系列

工 程 力 学

——静力学与动力学

(原第五版)

〔美〕E. W. 纳尔逊 C. L. 贝斯特 W. G. 麦克莱恩 著

贾启芬 郝淑英 译

科 学 出 版 社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书是一般工程力学教材的补充读物，内容涵盖工程力学课程的各个方面．全书共19章，每章开头阐述相关的定义、定理及原理，然后提供了各种类型和不同难度的例题以及补充习题．例题用于说明和引伸理论，展示分析方法，提供实例，以引导学生抓住问题的关键．例题中还包括了大量的定理证明和公式推导．每章的补充习题作为全章内容的复习材料，习题后给出了参考答案．

本书可供不同层次的高等学校工科各专业的学生参考．

E. W. Nelson, C. L. Best, W. G. Mclean: Schaum's Outline of Theory and Problems of Engineering Mechanics

ISBN: 0-07-046193-7

图字：01-2001-5528号

图书在版编目(CIP)数据

工程力学：静力学与动力学/(美)纳尔逊，(美)贝斯特，(美)麦克莱恩著；贾启芬，郝淑英译．—北京：科学出版社，2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009581-2

Ⅰ．工…　Ⅱ．①纳…　②贝…　③麦…　④贾…　⑤郝…　Ⅲ．①工程力学：静力学-高等学校-教学参考资料　②工程力学：动力学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．IB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第041394号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

[illegible]印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002年2月第 一 版　开本：A4 (890×1240)

2002年2月第一次印刷　印张：26

印数：1—4 000　字数：745 000

定价：38.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

序　言

本书是一般教材的补充，主要用于帮助理工科学生获取更深入的知识，熟练地掌握分析力学和应用力学．作者深信大量的例题有助于学生理解和巩固基本概念．这本书不针对任一本教材，但它对所有的教材都是非常有价值的辅导材料．

本书的前几版得到了广泛的采用．本次再版如第三版、第四版一样同时采用美国工程单位制和国际单位制，其中有近 50％的例题和习题采用美国工程单位制，其余则为国际单位制，但每道题只用一种单位制．作者试图引用能被大学二年级学生接受的最好的数学工具，即在某些章节中运用了矢量方法，使理论叙述和问题解答更加简洁、清楚．但对用标量即可解决的问题仍然采用标量方法．第一章完整地复习了书中内容涉及到的矢量定义及矢量运算．书中的部分例题给出了计算机解，但大多数习题都可用其它方法容易地解出．

各章的标题与一般教材的标题一致．每章首先阐述相关的定义、定理及原理，然后是各种类型和难度的例题及补充习题．例题用于说明和引伸理论，展示分析方法，提供实例以引导学生抓住问题的关键，使学生能正确应用力学原理，增强学生的自信心．例题中还包括了大量的定理证明和公式推导．大部分补充习题作为全章内容的复习材料．

对于本书的第一版，作者衷心地感谢保罗·B.伊顿和J.沃伦·吉尔森．查尔斯·L.贝斯和约翰·W.麦克纳伯对本书第二版的内容提出了十分有益的意见，且拉里·弗里德和保罗·加里校对了例题的解．詹姆斯·施瓦在第三版编写中协助我们做了附录C中的计算机解题，在第四版的编写中我们再一次感谢詹姆斯·施瓦和迈克尔·拉格伦 Jr.对附录C中计算机解提供的帮助．再次感谢威廉·贝尔斯对第五版中新增的例题及内容的审阅．我们衷心地感谢伊丽莎白·布尔克为本书第三版、第四版书稿的打印所付出的辛勤工作．

E. W. 纳尔逊
C. L. 贝斯特
W. G. 麦克莱恩

Schaum 电子导学中包含的习题及章节

电子导学中包含了书中部分习题和内容，电子导学需在 Mathcad 软件包环境下运行，软件中的每一个数、每一个公式及每一张图都具有很强的交互性，并且可以进行修改. 凡是标有 Mathcad 图标的习题或某项内容都可在电子导学中查到.

下表列出了电子导学所包含的习题、章节. 有关软件的更多信息请参见附录 D.

习题 1.3
习题 1.5
习题 1.10
习题 1.15
习题 1.17
第 2.3 节
习题 2.3
习题 2.4
习题 2.12
习题 2.13
习题 2.28
习题 2.30
习题 3.1
习题 3.4
习题 3.9
习题 3.46
习题 3.50
习题 4.1
习题 4.2
习题 4.4
习题 4.19
习题 5.5
习题 5.6
习题 5.15
习题 5.42
习题 5.57
习题 6.1
习题 6.2
习题 6.5
习题 6.9
习题 6.15
习题 6.29
第 7.3 节
习题 7.14
习题 7.16
习题 7.18
习题 8.3
习题 8.7
习题 9.1
习题 9.2
习题 9.20
习题 9.35
习题 9.47
习题 9.60
习题 10.11
习题 10.28
习题 10.42
习题 10.95
习题 10.96
习题 10.108
习题 11.6
习题 11.8
习题 12.3
习题 12.7
习题 12.17
习题 12.18
习题 12.36
习题 12.85
习题 13.4
习题 13.10
习题 13.53
习题 13.57
习题 14.5
习题 14.9
习题 14.10
习题 14.27
习题 14.50
习题 15.12
习题 15.28
习题 15.32
习题 15.51
习题 15.57
习题 15.74
习题 15.76
习题 16.8
习题 16.25
习题 16.27
习题 16.31
习题 16.34
习题 16.62
习题 16.70
习题 16.76
习题 16.80
习题 16.125
习题 16.128
习题 16.131
习题 16.132
习题 16.134
习题 16.156
习题 17.42
习题 17.43
习题 17.48
习题 17.56
习题 17.89
习题 17.92
习题 18.27
习题 18.40
习题 18.82
习题 18.83
习题 18.84
习题 18.109
习题 19.29
习题 19.32
习题 19.43
习题 19.48
习题 19.50

目　录

第 1 章 矢　　量

1.1 定义

标量只具有大小，例如，时间，体积，能量，质量，密度（比重），功. 用代数的方法进行标量的求和运算，例如，2 s + 7 s = 9 s; 14 kg − 5 kg = 9 kg.

矢量具有大小和方向*，例如：力，位移，速度，冲量. 矢量用一个具有已知斜度的带箭头的线段表示. 箭头的指向表示了矢量的方向，其线段长短表示了矢量的大小. 矢量的符号用黑斜体印刷字母表示，例如 $\boldsymbol{P}$，其大小用 $|\boldsymbol{P}|$ 或 P 表示.

自由矢量可以在空间任意移动，而不改变其大小和方向.

滑移矢量可以沿着其作用线方向自由滑动. 根据力的可传性原理，滑移矢量对刚体的作用效果不变.

定位矢量的作用点不能移动.

单位矢量是一个具有单位长度的矢量.

矢量 $\boldsymbol{P}$ 的负矢量用 $-\boldsymbol{P}$ 表示，其大小和作用线相同但方向相反.

矢量系统的合成结果是表示已知矢量系统的最小数目的矢量.

1.2 二矢量的加法

(a) 根据平行四边形定则，矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的合矢量 $\boldsymbol{R}$，是以 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 为边组成的平行四边形的对角线，如图 1-1(a) 所示. $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 也称合矢量 $\boldsymbol{R}$ 的分量.

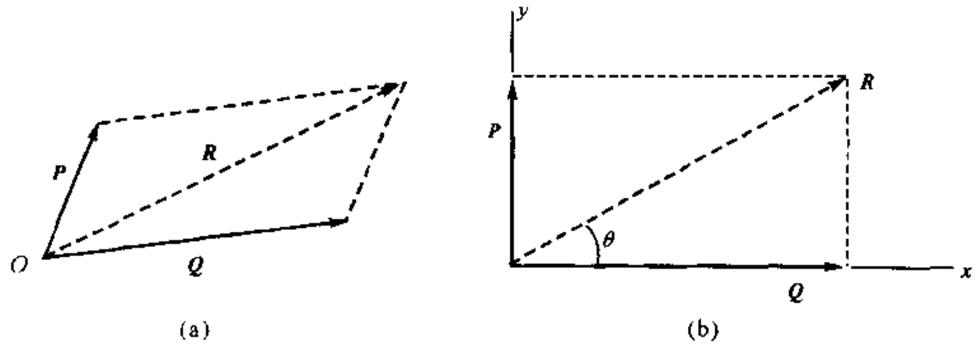


图 1-1

(b) 如果图 1-1(a) 所示的平行四边形的边是垂直的，则矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 称作矢量 $\boldsymbol{R}$ 的垂直分量，如图 1-1(b) 所示. 垂直分量的大小表示为

$$Q = R\cos\theta$$

和

$$P = R\cos(90^\circ - \theta) = R\sin\theta$$

(c) 三角形定则. 任取一个矢量，在其末端连接另一矢量的始端，则合矢量从第一个矢量的始端连接到另一矢量的末端. 三角形定则由平行四边形定则引出，因为平行四边形的对应边是自由矢量如图 1-2 所示

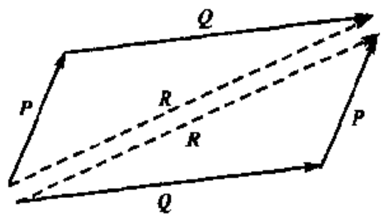


图 1-2

* 方向是指力作用线的方位及箭头指向.

(d) 矢量加法满足交换律,即 $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}$

1.3　矢量的减法

矢量的减法是矢量加法的逆运算,即

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}+(-\boldsymbol{Q})$$

或

$$-(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=-\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$$

1.4　零矢量

零矢量是一个矢量与自身的减法运算,即,$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}=0$. 也称之为零矢量.

1.5　矢量的合成

矢量的合成是求矢量系统的合矢量的过程.作矢量多边形,是将每个矢量依此首尾连接而成如图 1-3 所示.则合矢量从第一个矢量的始端连接到最后一矢量的末端.最后指出,不是所有的矢量系统都能简化成一个矢量.合矢量与矢量的作图顺序无关,例如 3 个已知矢量 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{S}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{S}\\&=\boldsymbol{P}+(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S})=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})+\boldsymbol{Q}\end{aligned}$$

以上方程可以扩展到具有多个矢量的系统.

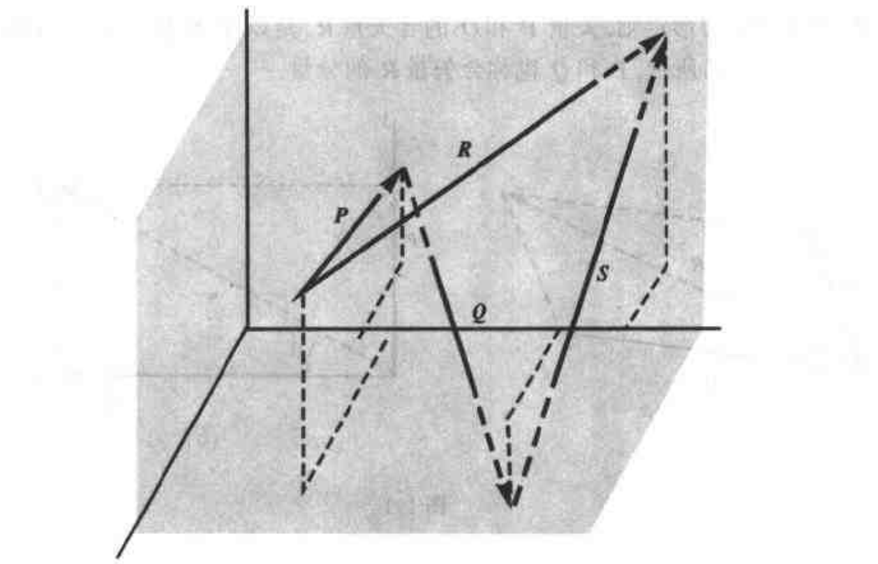


图 1-3

1.6　矢量与数量的乘法运算

(a) 矢量 $\boldsymbol{P}$ 与数量 m 相乘等于 $m\boldsymbol{P}$,其大小是矢量 $\boldsymbol{P}$ 的 m 倍,作用线与 $\boldsymbol{P}$ 相同,但方向要取决于 m 的正负.

(b) 矢量与数量 m 和 n 的运算,即

$$(m+n)\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{P}+n\boldsymbol{P}$$

$$m(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=m\boldsymbol{P}+m\boldsymbol{Q}$$

$$m(n\boldsymbol{P})=n(m\boldsymbol{P})=(mn)\boldsymbol{P}$$

1.7 三维正交单位矢量

沿着正交的三维坐标轴 x, y 和 z 作单位矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$. 建立右手坐标系如图 1-4 所示.

矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以写成

$$\boldsymbol{P} = P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k}$$

这里 $P_x\boldsymbol{i}$, $P_y\boldsymbol{j}$ 和 $P_z\boldsymbol{k}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 沿着正交坐标轴 x, y 和 z 的分矢量, 如图 1-5 所示.

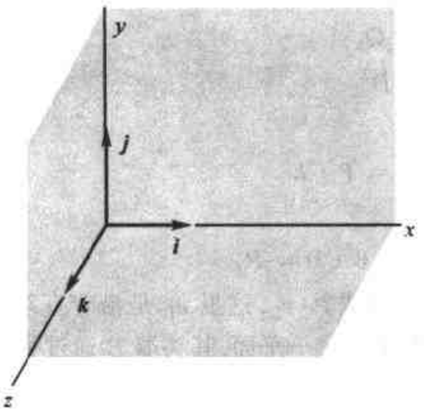


图 1-4

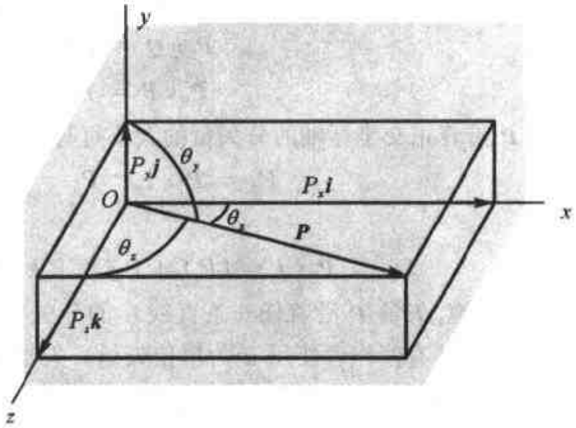


图 1-5

注意 $P_x = \boldsymbol{P}\cos\theta_x$, $P_y = \boldsymbol{P}\cos\theta_y$, $P_z = \boldsymbol{P}\cos\theta_z$.

1.8 矢径

坐标为(x, y, z)的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$, 见图 1-6.

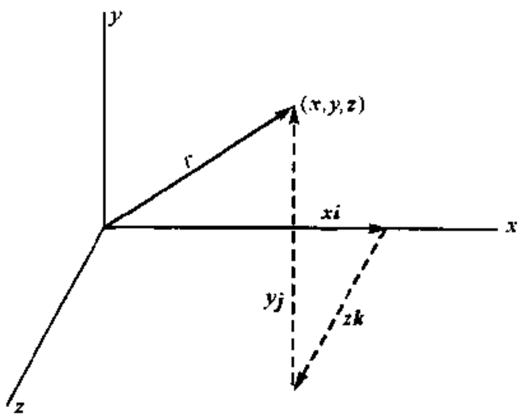


图 1-6

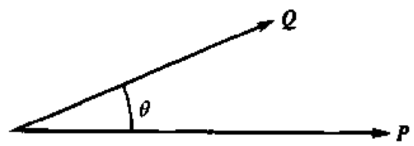


图 1-7

1.9 矢量的点积或标积

二矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的点积或标积写成 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$, 是一个代数量, 其大小等于二矢量大小及其方向夹角 θ 的余弦的乘积(见图 1-7). 即

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = PQ\cos\theta$$

下面列出标积的运算规律, 这里 m 表示标量:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S})=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S}$$
$$(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})+\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}+\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}$$
$$m(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S})=(m\boldsymbol{P})\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\cdot(m\boldsymbol{Q})$$

因为 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是正交的单位矢量,所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=(1)(1)\cos 90°=0$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=(1)(1)\cos 0°=1$$

且,如果 $\boldsymbol{P}=P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{Q}=Q_x\boldsymbol{i}+Q_y\boldsymbol{j}+Q_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$$
$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}=P^2=P_x^2-P_y^2+P_z^2$$

矢量 $\boldsymbol{P}$ 沿着正交坐标轴的分矢量的大小可写成

$$P_x=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i},\quad P_y=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{j},\quad P_z=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{k}$$

例如,

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}=(P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}=P_x+0+0=P_x$$

类似地,矢量 $\boldsymbol{P}$ 沿着任一条直线 L 的分矢量的大小可写成 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_L$,这里 $\boldsymbol{e}_L$ 是沿着直线 L 的单位矢量(有些作者使用 $\boldsymbol{u}$ 为单位矢量).矢量 $\boldsymbol{P}$ 的尾端 A 通过一平面,其头端 B 通过另一平面,此二平面垂直于直线 L,并与直线分别交于 C 和 D 点,如图 1-8 所示.矢量 $\boldsymbol{CD}$ 是矢量 $\boldsymbol{P}$ 沿 L 方向的分矢量,其大小等于 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_L=Pe_L\cos\theta$.

这些原理的应用见题 1.15 和 1.16.

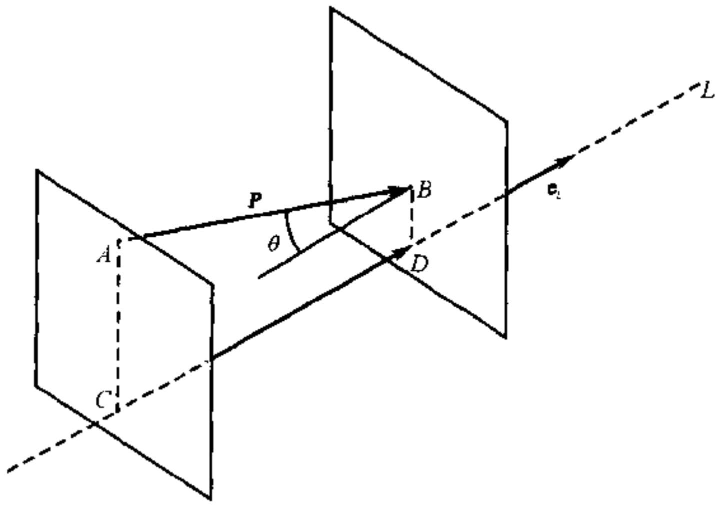


图 1-8

1.10 矢量的叉积或矢积

二矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 矢积可以写成 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$,用 $\boldsymbol{R}$ 表示.其大小等于二矢量大小与其夹角正弦之积.矢量 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$ 沿 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 组成的平面的法向,其方向由右手螺旋法则决定,即从 $\boldsymbol{P}$ 的方向经过二矢量的最小夹角 θ 到 $\boldsymbol{Q}$ 方向.这样,如果用 $\boldsymbol{e}$ 表示已知方向 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$ 的单位矢量,叉积可以写成

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=(PQ\sin\theta)\boldsymbol{e},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 180°$$

图 1-9 表明 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{P}$(不能交换).

下面列出矢积的运算法则,这里 m 是标量.

$$\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S})=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S}$$
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\times(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})&=\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})+\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})\\&=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S}+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T}+\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{T}\end{aligned}$$

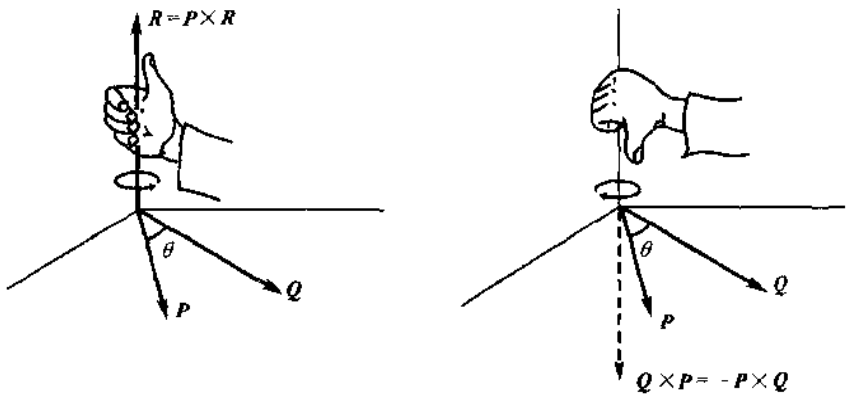


图 1-9

$$m(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})=(m\boldsymbol{P})\times\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\times(m\boldsymbol{Q})$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是正交的,所以有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

并且,如果 $\boldsymbol{P}=P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{Q}=Q_x\boldsymbol{i}+Q_y\boldsymbol{j}+Q_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=(P_yQ_z-P_zQ_y)\boldsymbol{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\boldsymbol{j}+(P_xQ_y-P_yQ_x)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

矢积行列式的证明见例题 1.12.

1.11 矢量的微积分

(a) 以标量,例如时间 t 为变量的矢量 $\boldsymbol{P}$ 的微分运算规则如下.

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(t)$,即 $\boldsymbol{P}$ 是时间 t 的函数.$\Delta\boldsymbol{P}$ 是当时间从 t 变化到 $(t+\Delta t)$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的增量.

$$\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(t+\Delta t)-\boldsymbol{P}(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{P}(t+\Delta t)-\boldsymbol{P}(t)}{\Delta t}$$

如果 $\boldsymbol{P}(t)=P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k}$,这里 P_x,P_y 和 P_z 是时间 t 的函数,我们有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{(P_x+\Delta P_x)\boldsymbol{i}+(P_y+\Delta P_y)\boldsymbol{j}+(P_z+\Delta P_z)\boldsymbol{k}-P_x\boldsymbol{i}-P_y\boldsymbol{j}-P_z\boldsymbol{k}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta P_x\boldsymbol{i}+\Delta P_y\boldsymbol{j}+\Delta P_z\boldsymbol{k}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}P_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

下列运算是有效的:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi\boldsymbol{P})=\psi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}$$

这里 ψ 是 t 的数量函数.

(b) 关于对标量如时间 t 为变量的矢量 $\boldsymbol{P}$ 的积分运算规则如下.

让 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(t)$，即 $\boldsymbol{P}$ 是时间 t 的函数，则

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{P}(t)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}(P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k})\mathrm{d}t$$

$$=\boldsymbol{i}\int_{t_0}^{t_1}P_x\mathrm{d}t+\boldsymbol{j}\int_{t_0}^{t_1}P_y\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int_{t_0}^{t_1}P_z\mathrm{d}t$$

1.12 量纲和单位制

在力学的学习中，用一套被称之为量纲的基本量，描述物体特性及其运动.在美利坚合众国，工程师们习惯用力、长度、时间的量纲作为基本系统.在全世界大部分国家，使用质量、长度和时间作为基本系统.在美国也有趋于使用第二种系统的趋势.

两套系统起源于牛顿的运动第二定律，即

$$\boldsymbol{R}=M\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{R}$ 是作用在质点上的所有力的合力，$\boldsymbol{a}$ 是质点的加速度，M 是不变量被称之为质量.

美国通用单位制

在这套工程单位制中，长度的单位是英尺(ft)，时间的单位是秒(s)，力的单位是磅(lb).质量为 M 的物体自由落到地面上，由于受重力加速度 g 的作用，产生地心引力 W.力 W 的重用磅(lb)来测量，加速度 g 用 $\mathrm{ft/s^2}$. 牛顿第二定律写成标量形式为

$$W=Mg$$

重力加速度 g 的值随着地面位置的不同发生变化.在本书中取值为 32.2 $\mathrm{ft/s^2}$.表明重 1 磅的物体，自由落到地面上将获得 32.2 $\mathrm{ft/s^2}$ 的加速度.上式为

$$M=\frac{W}{g}=\frac{1\ \mathrm{lb}}{32.2\ \mathrm{ft/s^2}}=\frac{1}{32.2}\frac{\mathrm{lbs^2}}{\mathrm{ft}}=\frac{1}{32.2}\ \mathrm{slug}^*$$

在求解静力学问题时，不涉及到质量.但认识对于已知物体的质量的不变性是十分重要的.在月球上，对于相同质量的物体其引力是地球引力的 1/6.

国际单位制(SI)

在国际单位制(SI)**中，质量的单位是千克(kg)，长度的单位是米(m)，时间的单位是秒(s)，力的单位是牛顿(N)，力的单位是导出单位，即质量为 1 千克的质点，获得 1 米/秒^2 的加速度时，作用于该质点的力为 1 牛顿.即

$$1\ \mathrm{N}=(1\ \mathrm{kg})(1\ \mathrm{m/s^2})=1\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}=1\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$$

具有 1 kg 质量的物体自由落到地面时重力加速度的值将随位置的不同而变化.在本书中，假设重力加速度的平均值为 9.80 $\mathrm{m/s^2}$. 这样 1 kg 质量的物体受到重力为

$$W=Mg=(1\ \mathrm{kg})(9.80\ \mathrm{m/s^2})=9.80\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}=9.80\ \mathrm{N}$$

当然，在求解静力学问题的力系中，已知质量的千克数不是力，应使用作用在质量上的重力.在所有有关质量问题上，学生们应当记住以质量的千克数乘以 9.8 $\mathrm{m/s^2}$，才能得到用牛顿表示的重力.5 kg 质量受到的重力作用是 $5\times 9.8=49$ N.

学生们应永远记住，在国际单位制中，毫米(mm)是工程制图标准长度单位.因此，所有工程制图量纲必须是毫米($1\ \mathrm{mm}=10^{-3}\ \mathrm{m}$).另外，在数字与单位符号之间应留有空，例如 2.85 mm 而不是 2.85mm.当书写五位或更多数字时，应在小数点前 3 位留有空，如12 832.325.在国际单位制中不使用逗号.书写四位数字的值时，可以不留空隙，但五位或更多位数值时则留有空隙.

SI 是国际单位制缩写.附录 A 包含了国际单位制的表格及与现代米制的换算因数.在本

* slug 是“英尺-磅(力)-秒”单位制的质量单位，名称为斯——译注.
** SI 是国际单位制的缩写.

书中有50%的问题使用美国通用单位制，50%的问题使用国际单位制.

例 题

1.1 如图1-10(a)所示，在同一平面上，作用有与水平 x 轴夹角为30°的力120 lb和夹角90°的力 −100 lb. 试用平行四边形法则求此二力之合力.

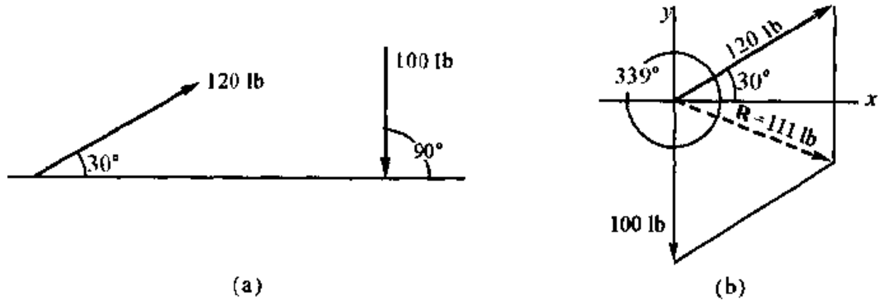


图1-10

解 ☞ 画原题中的力不必按比例，只需画一个草图. 负号证明，100 lb的力沿着与水平线夹角90°的作用线铅垂向下. 根据力的可传性，此力等效于与水平线夹角为270°的100 lb的力.

如图1-10(b)，在平面上，让二矢量的尾端汇在一个公共点上，并选择合适的比例画出二矢量，完成平行四边形. 选择比例测出合力 $\boldsymbol{R}$ 为111 lb. 用量角器量出它与 x 轴的夹角为 $\theta_x = 339°$.

考虑如图1-10(b)所示的三角形，其中一边是与 y 轴重合. 三角形的三边是 R，100和200. 100与200两边的夹角是60°. 应用余弦定理.

$$R^2 = \overline{120^2} + \overline{100^2} - 2(120)(100)\cos 60°, \quad R = 111 \text{ lb}$$

由正弦定理

$$\frac{120}{\sin\alpha} = \frac{111}{\sin 60°}, \quad \alpha = 69°$$

69°加上270°，则夹角是339°.

1.2 用三角形法则求题1.1. 见图1-11.

解 ☞ 先选哪个矢量都可以. 以120 lb的力为第一个矢量，在其末端连接100 lb的力的始端. 最后，从120 lb力的始端连向100 lb力的末端即为合力. 按选择的比例测量出大小和方向，其合力如题1.1相同.

1.3 同一平面上二力之合力为400 N，方向120°，其中一分力为200 N，方向20°. 试求另一未知分力. 见图1-12.

解 ☞ 选择公共点，并用方便的比例画出合力和另一已知分力.

作出已知力与合力的矢端连线，方向由力的矢端指向合力的矢端，则此连线代表未知力，用比例尺量出，此力大小为477 N，且 $\theta_x = 144°$.

此结果也可通过三角学定则的解析法解出. $\boldsymbol{R}$ 与200 N力之间的夹角是100°，因此，由余弦定理，未知力 F 为

$$F^2 = \overline{400^2} + \overline{200^2} - 2(400)(200)\cos 100°, \quad F = 477 \text{ N}$$

令力 $\boldsymbol{F}$ 与200 N之间的夹角为 α，则由正弦定理

$$\frac{477}{\sin 100} = \frac{400}{\sin\alpha}, \quad \alpha = 55.7°, \quad \theta_x = 144°$$

1.4 在同一平面中，从280 N，320°的力中减去130 N，60°的力. 见图1-13.

解 ☞ 由平行四边形法则，将280 N，320°的力与 −130 N，60°的力求矢量和，可获得合力为330 N，297°. 所有角度都是与 x 轴的夹角.

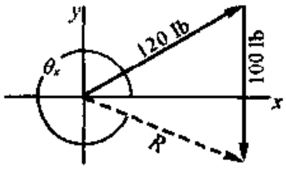


图 1-11

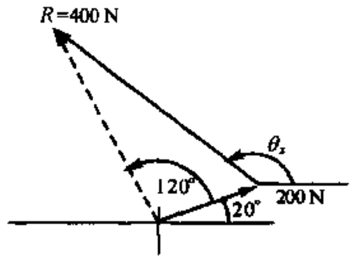


图 1-12

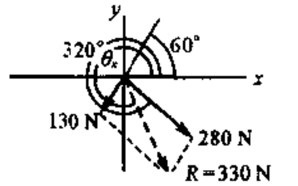
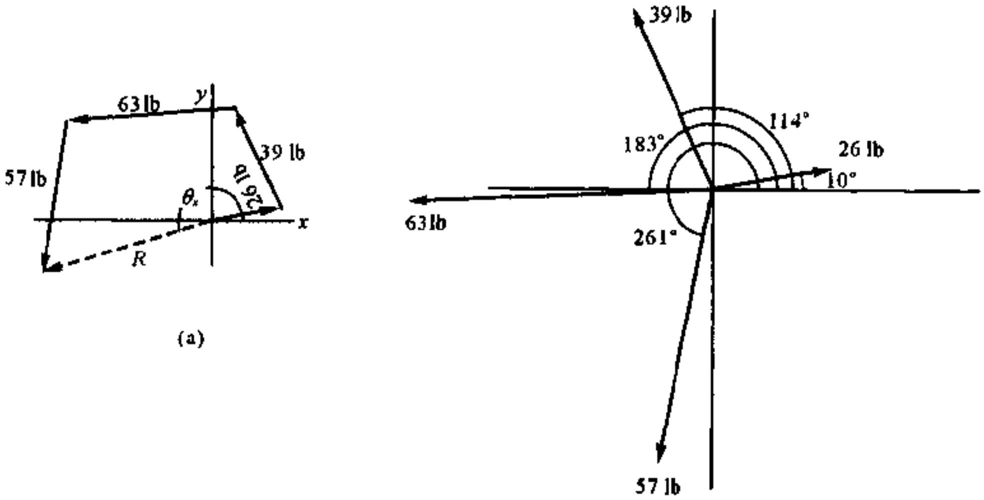


图 1-13

1.5　试求如下平面力系的合力：26 lb, 10°；39 lb, 114°；63 lb, 183°；57 lb, 261°，见图 1-14.

解　☞ 应用力多边形法则，将诸矢量依次首尾相接，见图 1-14(a).



(a)　(b)

图 1-14

合矢量则从第一个矢量的始端连接到最后一个矢量的头端，并用比例尺测出合力，$R=65$ lb，$\theta_x=197°$.

本题也可以用求解合力的正交分量的解析法解出. 将图 1-14(b)中每个力求出沿 x、y 方向的垂直分量，因为沿 x 轴的各分量求和是求代数和，y 方向相同. 现在，如果分别求出了 x 与 y 的分量，则相当于求出了合力在 x, y 方向的两个分量，这样

$$R_x = 26\cos 10° + 39\cos 114° + 63\cos 183° + 57\cos 261° = -62.1$$

$$R_y = 26\sin 10° + 39\sin 114° + 63\sin 183° + 57\sin 261° = -19.5$$

$$R = \sqrt{(1-62.1)^2 + (-19.5)^2}, \quad R = 65 \text{ lb}$$

$$\tan\theta_x = \frac{-19.5}{-62.1}, \quad \theta_x = 17°, \quad \theta = 180° + 17° = 197°$$

1.6　在图 1-15 中，力 $\boldsymbol{F}$ 沿 OH 方向的垂直分量为 10 lb，且力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴正向夹角为 60°，试求力 $\boldsymbol{F}$ 的大小.

解　☞ 力 $\boldsymbol{F}$ 沿 OH 的分量是 $F\cos\theta$，即 $F\cos 15° = 10$ 或 $F = 10.35$ lb.

1.7　一个重 80 kg 的人站在与水平面夹角为 20°的木板上，求人的重力(a)沿木板的法向分量，(b)平行木板的分量. 见图 1-16.

解　☞ (a) 重力矢量与木板法向夹角为 20°，大小为 80(9.8) = 784 N. 有比例尺量出法向分量为 740 N. 由三角学，法向分量为 784 cos20° = 737 N.

(b) 由比例尺量出其平行分量为 270 N. 由三角学，应是 784cos70° = 268 N.

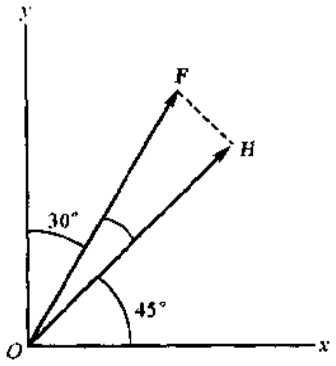


图 1-15

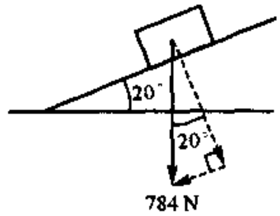


图 1-16

1.8 如图 1-17(a)所示,一木块静止放在与水平线成 22°夹角的斜面上,其上作用一与水平线夹角为 60°的力 $P=235$ N.试用代数方法解出(b)P 的水平及铅垂分量,(c)P 与斜面平行及垂直分量.

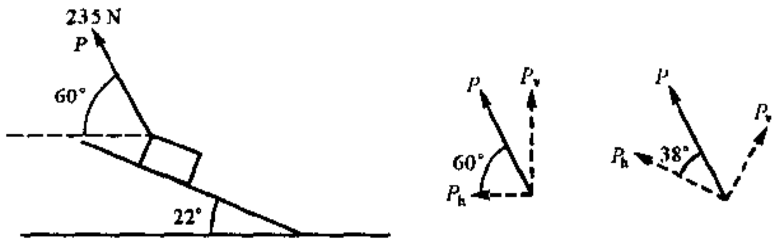


图 1-17

解 (a) 水平分量 P_h,方向指向左,大小等于 $235\cos60°=118$ N.垂直分量 P_v,铅垂向上,大小等于 $235\sin60°=204$ N,如图 1-17(b)所示.

(b)分量 $P_{\parallel}$,平行与斜面,指向上,等于 $235\cos(60°-22°)=15$ N,分量 $P_{\perp}$ 沿斜面法向,大小等于 $235\sin38°=145$ N,如图 1-17(c)所示.

1.9 如图 1-18 所示的 3 个力,若合力大小为 20 lb,沿 y 轴铅垂向下,试求力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的大小.

解 由于合力是 20 lb,并且沿 y 轴指向上,则有 $R_{xz}=0, R_y=20$ lb.

分力沿 x 轴的代数和等于合力在 x 轴的投影 $R_x=P\cos30°-90\cos40°=0$,解出 $P=79.6$ lb.同样地,$R_y=P\sin30°+90\sin40°-F=20$,得 $F=77.7$ lb.

1.10 如图 1-19 所示,坐标轴 x,y 和 z 沿正六面体的三个边的方向,且三边长度分别为 4,3 和 2 m.如果对角线 OP 代表 50 N 的力,试求该力沿 x,y 和 z 的分量.并用单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 符号表示力矢量.

解 让 $\theta_x,\theta_y,\theta_z$ 表示对角线 OP 与坐标轴 x,y,z 之间的夹角.则

$$P_x = P\cos\theta_x,\quad P_y = P\cos\theta_y,\quad P_z = P\cos\theta_z$$

长度 $OP=\sqrt{4^2+3^2+2^2}=5.38$ m.这里

$$\cos\theta_x = \frac{4}{5.38},\quad \cos\theta_y = \frac{3}{5.38},\quad \cos\theta_z = \frac{2}{5.38}$$

每个分量均沿坐标轴的正方向,有

$$P_x = 50\cos\theta_x = 37.2\ \text{N},\quad P_y = 50\cos\theta_y = 27.9\ \text{N},\quad P_z = 50\cos\theta_z = 18.6\ \text{N}$$

矢量 $\boldsymbol{P}=P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k}=37.2\boldsymbol{i}+27.9\boldsymbol{j}+18.6\boldsymbol{k}$ N.

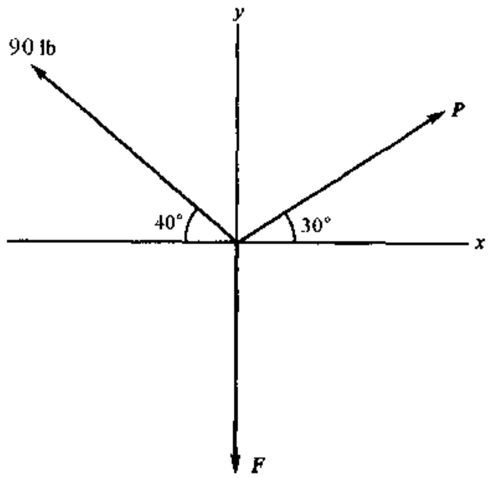


图 1-18

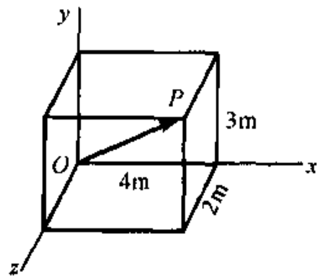


图 1-19

1.11　一力 100 N，力的作用线通过坐标原点及点(2, −4,1). 试求该力沿 x, y, z 轴分量. 并用单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示.

解 ☞ 力作用线的方向余弦为

$$\cos\theta_x = \frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (1)^2}} = 0.437, \quad \cos\theta_y = \frac{-4}{\sqrt{21}} = -0.873, \quad \cos\theta_z = 0.281$$

这里 $P_x = 43.7$ N, $P_y = -87.3$ N, $P_z = 21.8$ N; 矢量 $\boldsymbol{P} = 43.7\,\boldsymbol{i} - 87.3\,\boldsymbol{j} + 21.8\,\boldsymbol{k}$ N.

1.12　试证二矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的矢积等于.

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

解 ☞ 写出已知矢量的分量形式并展开矢积表达式，得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} &= (P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k}) \times (Q_x\boldsymbol{i} + Q_y\boldsymbol{j} + Q_z\boldsymbol{k}) \\ &= (P_xQ_x)\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + (P_xQ_y)\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + (P_xQ_z)\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} + (P_yQ_x)\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + (P_yQ_y)\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} \\ &\quad + (P_yQ_z)\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + (P_zQ_x)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + (P_zQ_y)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} + (P_zQ_z)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$; 并且 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$ 等，有

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = (P_xQ_y)\boldsymbol{k} - (P_xQ_z)\boldsymbol{j} - (P_yQ_x)\boldsymbol{k} + (P_yQ_z)\boldsymbol{i} + (P_zQ_x)\boldsymbol{j} - (P_zQ_y)\boldsymbol{i}$$

整理得

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\boldsymbol{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\boldsymbol{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\boldsymbol{k}$$

写成行列式形式

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

注意，在矢积中，第一个矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量数值，写在行列式的中间一行.

1.13　一力 $\boldsymbol{F} = 2.63\boldsymbol{i} + 4.28\boldsymbol{i} - 5.92\boldsymbol{k}$ N，作用点过原点. 试求此力的大小及与 3 个坐标轴 x, y, z 之间的夹角.

解 ☞

$$F = \sqrt{(2.63)^2 + (4.28)^2 + (-5.92)^2} = 7.75 \text{ N}$$

$$\cos\theta_x = +\frac{2.63}{7.75}, \quad \theta_x = 70.2°$$

$$\cos\theta_y = +\frac{4.28}{7.75}, \quad \theta_y = 56.3°$$

$$\cos\theta_z = -\frac{5.92}{7.75}, \quad \theta_z = 139.8°$$

1.14 试求 $\boldsymbol{P} = 4.82\boldsymbol{i} - 2.33\boldsymbol{j} + 5.47\boldsymbol{k}$ N 与 $\boldsymbol{Q} = -2.81\boldsymbol{i} - 60.9\boldsymbol{j} + 1.12\boldsymbol{k}$ m 的标积.

解 ☞

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} &= P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \\ &= (4.82)(-2.81) + (-2.33)(-6.09) + (5.47)(1.12) \\ &= 6.72\ \mathrm{N\cdot m}\end{aligned}$$

1.15 一直线 L 起点(2,3,0),并过点(−2,4,6),试求单位矢量为 $\boldsymbol{e}_L$ 及矢量 $\boldsymbol{P} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ 沿直线 L 的投影.

解 ☞ 直线 L 沿 x 方向由 +2 到 −2,改变量为 −4. 沿 y 方向的改变量是 4−3=1. 沿 z 方向的改变量是 6−0=+6. 则单位矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_L &= \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + (+1)^2 + (+6)^2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{53}}\boldsymbol{j} + \frac{6}{\sqrt{53}}\boldsymbol{k} \\ &= -0.549\boldsymbol{i} + 0.137\boldsymbol{j} + 0.823\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

力 $\boldsymbol{P}$ 的投影为

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_L = 2(-0.549) + 3(0.137) - 1(0.823) = -1.41$$

1.16 试求力 $\boldsymbol{P} = 10\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$ lb,沿过(2,−5,3)、(5,2,−4)两点的直线 L 的投影.

解 ☞ 沿 L 方向的单位矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_L &= \frac{5-2}{\sqrt{(5-2)^2 + [2-(-5)]^2 + (-4-3)^2}}\boldsymbol{i} + \frac{2-(-5)}{\sqrt{107}}\boldsymbol{j} + \frac{-4-3}{\sqrt{107}}\boldsymbol{k} \\ &= 0.290\boldsymbol{i} + 0.677\boldsymbol{j} - 0.677\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{P}$ 在 L 上的投影为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_L &= (10\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k})\cdot(0.29\boldsymbol{i} + 0.677\boldsymbol{j} - 0.677\boldsymbol{k}) \\ &= 2.90 - 5.42 - 9.478 = -12.0\ \mathrm{lb}\end{aligned}$$

负号表明,投影方向与 L 的正向相反.

1.17 求 $\boldsymbol{P} = 2.85\boldsymbol{i} + 4.67\boldsymbol{j} - 8.09\boldsymbol{k}$ ft 与 $\boldsymbol{Q} = 28.3\boldsymbol{i} + 44.6\boldsymbol{j} + 53.3\boldsymbol{k}$ lb 的矢积.

解 ☞

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2.85 & 4.67 & -8.09 \\ 28.5 & 44.6 & 53.3\end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}[(4.67)(53.3) - (44.6)(-8.09)] - \boldsymbol{j}[(2.85)(53.3) - (28.3)(-8.09)] \\ &\quad + \boldsymbol{k}[(2.85)(44.6) - (28.3)(4.67)] \\ &= \boldsymbol{i}(249 + 361) - \boldsymbol{j}(152 + 229) + \boldsymbol{k}(127 - 132) \\ &= 610\boldsymbol{i} - 381\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}\ \mathrm{lb\text{-}ft}\end{aligned}$$

1.18 试求矢径 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + 6y^2\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$ 对时间的导数.这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是常矢量.

解 ☞ 对时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + 12y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} - 3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

1.19 试求速度矢量 $\boldsymbol{v} = t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ft/s,从时间 $t_1 = 1$ s 到时间 $t_2 = 3$ s 的积分.这里 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是常矢量.

解 ☞

$$\begin{aligned}\int_1^3(t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})\mathrm{d}t &= \boldsymbol{i}\int_1^3 t^2\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int_1^3 2t^2\mathrm{d}t - \boldsymbol{k}\int_1^3\mathrm{d}t \\ &= 8.67\,\boldsymbol{i} + 8.00\,\boldsymbol{j} - 2.00\,\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

补充习题

1.20 试求平面力系 100 N,0°和 200 N,90°的合力.

答案:224 N, $\theta_x=64°$.

1.21　试求平面力系 32 N,20°和 64 N,190°的合力.

答案:33.0 N, $\theta_x=180°$.

1.22　试求平面力系 80 N, −30°和 60 N,60°的合力.

答案:100 N, $\theta_x=6.87°$.

1.23　试求平面力系 120 N,78°和 70 N,293°的合力.

答案:74.7 N, $\theta_x=45.2°$.

1.24　二共面力系的合力 18 oz,30°,若二力之一的力为 28 oz,0°,试求另一力.

答案:15.3 oz, $\theta_x=144°$.

1.25　二共面力系的合力 36 N,45°,若二力之一的力为 24 N,0°,试求另一力.

答案:25.5 N, $\theta_x=87°$.

1.26　二共面力系的合力 50 N,143°,若二力之一的力为 120 N,238°,试求另一力.

答案:134 N, $\theta_x=79.6°$.

1.27　二力合力是 100 lb,并与 x 轴正向夹角 50°,其中之一沿 x 轴正向,另一沿 y 轴正向,试求二力.

答案:$R_x=64.3$ lb, $R_y=76.6$ lb.

1.28　一力 120 N,沿与 x 轴正向夹角为 20°的直线的的垂直分量是 84 N,则此力与 x 轴的正向夹角是多少?

答案:65.6°.

1.29　试求平面力系的合力:6 oz,38°;12 oz,73°;18 oz,67°;24 oz,131°.

答案:50.0 oz, $\theta_x=91°$.

1.30　试求平面力系的合力:20 lb,0°;20 lb,30°;20 lb,60°;20 lb,90°;20 lb,120°;20 lb,150°.

答案:77.2 lb, $\theta_x=75°$.

1.31　试求如下平面力系的合力:120 N,30°;200 N,110°;340 N,180°;170 N,240°;80 N,300°.

答案:351 N,175°.

1.32　试求如下平面力系的合力:150 N,78°;320 N,143°;485 N,249°;98 N,305°;251 N,84°.

答案:321 N,171°.

1.33　一雪橇受到与水平线夹角为 30°的绳子的牵引,其牵引力为 25 lb.试求拉动雪橇的有效牵引力分量是多少?提起雪橇的竖直分量是多少?

答案:$P_h=21.7$ lb, $P_v=12.5$ lb.

1.34　试求下列平面力系的合力:15 N,30°;55 N,80°;90 N,210°;130 N,260°;

答案:136 N, $\theta_x=235°$.

1.35　一辆汽车沿梯度为 1% 的隧道向上匀速行驶,汽车及乘客共重 3100 lb,发动机需提供多大的牵引力才能克服沿隧道方向的重力分量?

答案:31 lb.

1.36　一根电话杆用拉线支承,拉线连在杆的顶部,其拉力为 200 lb.如果拉线与杆之间交角为 50°,求此拉力沿杆的水平与铅垂分量是多少?

答案:$P_h=153$ lb, $P_v=129$ lb.

1.37　一船用与岸夹角为 10°的缆绳拖引行驶.如果缆绳受力为 200 N,试求船沿河道行驶方向的拖动力是多少?

答案:197 N.

1.38　一力起点为(2,5,−3),终点为(−3,2,1),且大小为 200 N,试用单位矢量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示此力.

答案:$\boldsymbol{F}=-141\boldsymbol{i}-84.9\boldsymbol{j}+113\boldsymbol{k}$ N.

1.39　试求三力,即 $\boldsymbol{F}_1=2.0\boldsymbol{i}+3.3\boldsymbol{j}-2.6\boldsymbol{k}$ lb, $\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{i}+5.2\boldsymbol{j}-2.9\boldsymbol{k}$ lb, $\boldsymbol{F}_3=8.3\boldsymbol{i}-6.6\boldsymbol{j}+5.8\boldsymbol{k}$ lb 的合力,且三力交点为(2,2,−5).

答案:$\boldsymbol{R}=9.3\boldsymbol{i}+1.9\boldsymbol{j}+0.3\boldsymbol{k}$ lb,作用点(2,2,−5).

1.40　在导绳上自由移动的滑轮如图 1-20 所示,如果滑轮吊起 160 lb 的重物,绳子的张力为多少?

答案:$T=234$ lb.

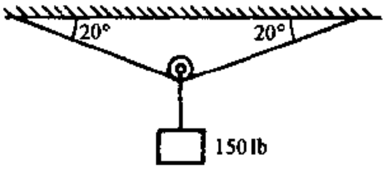


图 1-20

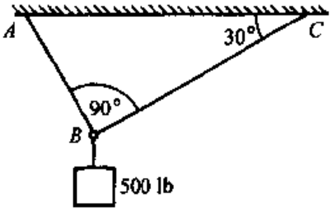


图 1-21

1.41 两条钢丝上支承重 500 lb 的重物,如图 1-21 所示.试求每根钢丝上的张力.

答案:$T_{AB}=433$ lb, $T_{BC}=250$ lb.

1.42 当水平拉力 P 为多大时,能拉住如图 1-22 所示的重为 10 lb 的重物 W?

答案:$P=3.25$ lb.

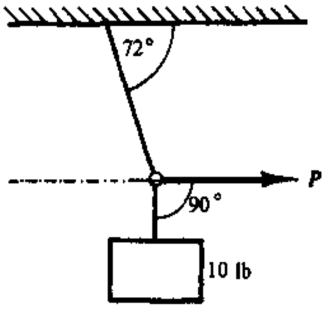


图 1-22

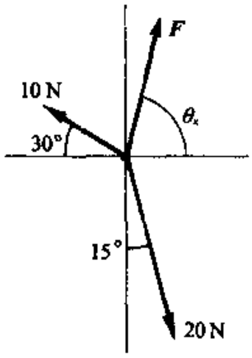


图 1-23

1.43 一静止电荷受到 3 个电荷作用,其中两个电荷的力如图 1-23 所示.试求第三个电荷力的大小和方向.

答案:$F=14.7$ N, $\theta_x=76.8°$.

1.44 试求共面力系 200 N,0°和 400 N,90°的合力.

答案:本题中各力即为题 1.20 中的各力乘以 2,因此,其合力大小是 1.20 题中合力大小的 2 倍,但角度不变.

1.45 矢量 $\boldsymbol{F}=30$ N,60°与某一矢量的和为零矢量,试求此矢量的大小和方向.

答案:30 N, $\theta_x=240°$.

1.46 一点沿曲线运动,当时间 $t=2$ s时,位置坐标(3, −5,2), $t=3$ s时,位置坐标(1, −2,0).求位置矢量的改变量.

答案:$\Delta\boldsymbol{r}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

1.47 试求矢量 $\boldsymbol{P}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{Q}=-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的标积.

答案:+2.

1.48 试求矢量 $\boldsymbol{P}=2.12\boldsymbol{i}+8.15\boldsymbol{j}-4.28\boldsymbol{k}$ N 与 $\boldsymbol{Q}=6.29\boldsymbol{i}-8.93\boldsymbol{j}-10.5\boldsymbol{k}$ m 的标积.

答案:−14.5 N·m.

1.49 试求题 1.47 中二矢量的矢积.

答案:$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=2\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+30\boldsymbol{k}$.

1.50 试求矢量 $\boldsymbol{P}=2.12\boldsymbol{i}+8.15\boldsymbol{j}-4.28\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{Q}=2.29\boldsymbol{i}-8.93\boldsymbol{j}-10.5\boldsymbol{k}$ m 的矢积.

答案:$-124\boldsymbol{i}+12.5\boldsymbol{j}-37.6\boldsymbol{k}$.

1.51 试求 $\boldsymbol{P}=x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}-z^2\boldsymbol{k}$ 对时间 t 的导数.

答案:$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}-2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$.

1.52 如果 $\boldsymbol{P}=2t\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}-t\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{Q}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}-t^3\boldsymbol{k}$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q})=4t+8t^3$$

试证此式成立.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})$$

1.53　如上题中,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})=(15t^4+3t^2)\boldsymbol{i}-(8t^3+2t)\boldsymbol{j}-3t^2\boldsymbol{k}$$

试证此式成立.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})$$

1.54　试求下列矢量的标积.

	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	答
(a)	$3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$	-23
(b)	$0.86\boldsymbol{i}+0.29\boldsymbol{j}-0.37\boldsymbol{k}$	$1.29\boldsymbol{i}-8.26\boldsymbol{j}-4.0\boldsymbol{k}$	-2.77
(c)	$a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}-c\boldsymbol{k}$	$d\boldsymbol{i}-e\boldsymbol{j}+f\boldsymbol{k}$	$ad-be-cf$

1.55　试求题 1.54 中矢量的矢积.

答案:$22\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$

$-1.90\boldsymbol{i}-3.92\boldsymbol{j}-7.48\boldsymbol{k}$

$(bf-ec)\boldsymbol{i}-(af+cd)\boldsymbol{j}-(ae+bd)\boldsymbol{k}$.

1.56　试求矢量 $\boldsymbol{Q}=10\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k}$,沿过点(2,3,−2)与点(1,0,5)的直线的分量.

答案:−11.72.

1.57　试求矢量 $\boldsymbol{P}=1.52\boldsymbol{i}-2.63\boldsymbol{j}+0.83\boldsymbol{k}$,在过点(2,3,−2)与点(1, 0, 5)直线的分量.

答案:$P_L=+1.59$.

1.58　已知矢量 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{Q}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ 的矢积为 $9\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}$,试求 P_y 之值.

答案:$P_y=0.75$.

1.59　矢量分别如图 1-24(a)(b)(c)所示,试用单位矢量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示诸矢量.

答案:(a) $\boldsymbol{P}=-223\boldsymbol{i}+306\boldsymbol{j}-129\boldsymbol{k}$;(b) $\boldsymbol{Q}=+75\boldsymbol{i}+50\boldsymbol{j}-43.3\boldsymbol{k}$;(c) $\boldsymbol{S}=+144\boldsymbol{i}+129\boldsymbol{j}+52.4\boldsymbol{k}$.

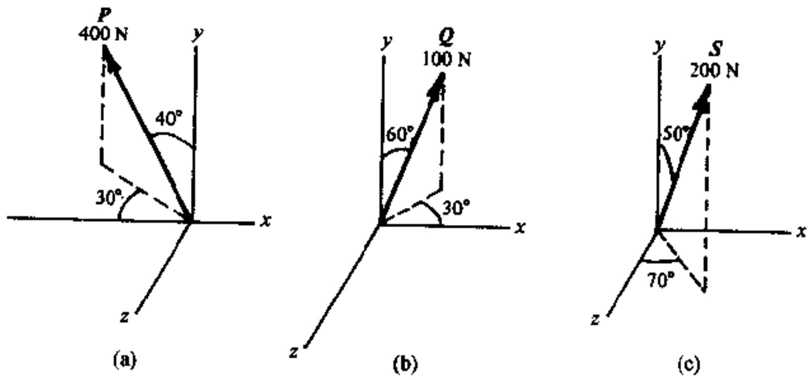


图 1-24

第 2 章　力的运算

2.1　力矩

力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 之矩 $\boldsymbol{M}$ 是矢积运算，即 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{r}$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 P 到取矩点 O 的位置矢量. 显然，$\boldsymbol{M}$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 使物体围绕过 O 点并垂直于力 $\boldsymbol{F}$ 和矢径 $\boldsymbol{r}$ 包含的平面的轴转动的趋势.

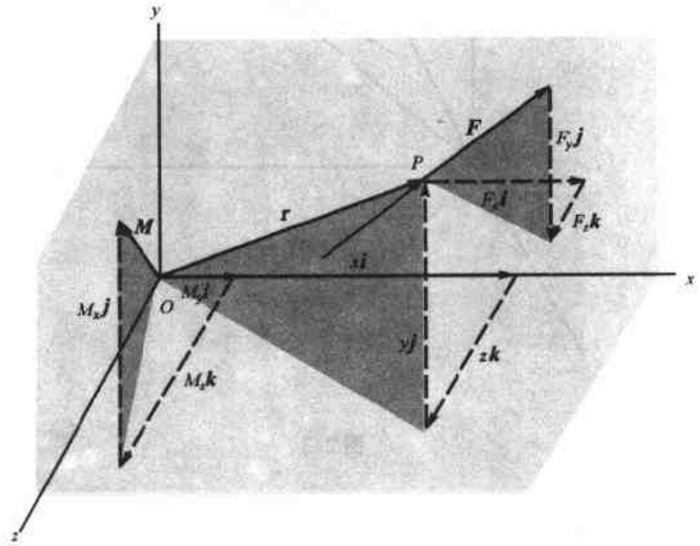


图 2-1

过 O 点建立坐标轴 x, y 和 z，如图 2-1 所示，有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{M}=M_x\boldsymbol{i}+M_y\boldsymbol{j}+M_z\boldsymbol{k}$$

由定义，

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

展开行列式，

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{i}(F_zy-F_yz)+\boldsymbol{j}(F_xz-F_zx)+\boldsymbol{k}(F_yx-F_xy)$$

比较 $\boldsymbol{M}$ 的表达式，可以得到

$$M_x=F_zy-F_yz,\quad M_y=F_xz-F_zx,\quad M_z=F_yx-F_xy$$

代数量 M_x、M_y 和 M_z 表示力 $\boldsymbol{F}$ 对过 O 点的 3 个坐标轴 x, y, z 之矩的大小. 见题 2.3 和 2.4.

M_x 可以由力矩 $\boldsymbol{M}$ 与沿 x 轴方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 的标积运算得到，即

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{i}=(M_x\boldsymbol{i}+M_y\boldsymbol{j}+M_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}=M_x(1)+M_y(0)+M_z(0)=M_x$$

同样地，力 $\boldsymbol{F}$ 关于对过 O 点的任意轴 L 取矩的大小等于 $\boldsymbol{M}$ 沿 L 轴的分量. 它可以通过 $\boldsymbol{M}$ 与沿 L 方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_L$ 标积得到，

$$M_L=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_L$$

2.2　力偶

力偶是由大小相等、平行，但方向相反的两个力组成.

2.3 力偶的矩矢

力偶关于任意点 O 之矩 $\boldsymbol{C}$，等于组成力偶的两个力分别对 O 点取矩之和.

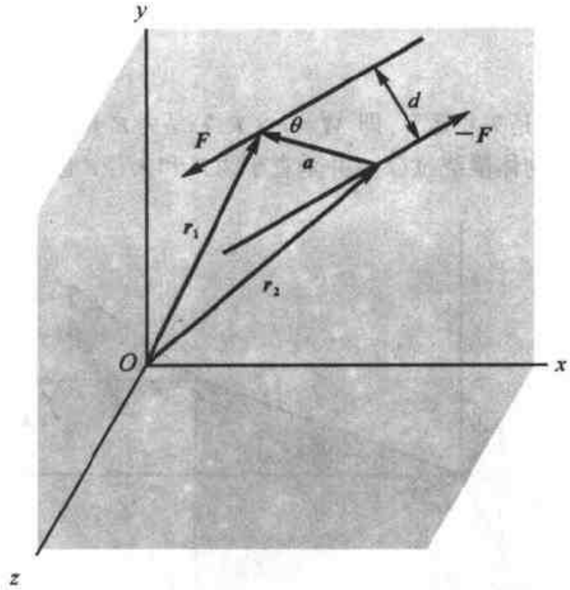


图 2-2

力偶的矩 $\boldsymbol{C}$，如图 2-2 所示，即

$$\boldsymbol{C} = \sum \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_2 \times (-\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}$$

$\boldsymbol{C}$ 是垂直于力偶的两个力组成的平面（$\boldsymbol{a}$ 在相同平面）的矢量. $\boldsymbol{C}$ 由叉乘决定，其大小为 $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}| = aF\sin\theta$.

设 d 为力偶的两个力之间的垂直距离，大小为 $a\ \sin\theta$，所以 $\boldsymbol{C}$ 的大小是 $C = Fd$.

力偶遵循矢量法则. 力偶 $\boldsymbol{C}$ 可以写成 $\boldsymbol{C} = C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j} + C_z\boldsymbol{k}$，其中 C_x，C_y 和 C_z 是分量的大小.

O 点是任意的点，力偶的矩与选择点 O 无关.

2.4 力的等效

力 $\boldsymbol{F}$ 作用在 P 点，其等效条件是：(a)大小相等、方向相同，但作用点在 O 的力并且(b)力偶 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$，$r$ 是从 O 到 P 点的矢径. 见习题 2.11 和 2.12.

2.5 共面力系

共面力系包含了许多力学问题. 以下几点对处理二维问题是十分有用的.

1. 力对位于同一平面的点 O 之矩 M_0 是代数量，与力对过 O 点且垂直于力所在平面的轴之矩等效. 例如，力矩是(a)力与(b)力的作用线到 O 点的垂直距离的乘积. 如果力关于点为逆时针转动时，则力矩为正. 见题 2.1.

2. 合力矩定理表明：合力对任一点之矩等于分力对同一点之矩的代数和. 见例 2.2.

3. 力偶矩矢在下列情况下将不改变：(a)力偶在其平面内转动或移动；(b)力偶移动至一平行平面；(c)同时改变力偶的力与力臂，以保证力偶矩大小不变.

4. 作用在同一平面或平行平面的一个力和一个力偶可合成为一个力，该力与原力具有相同的大小和方向，且作用线相互平行，见题 2.9.

5. 相反地，一个力可分解为：(a)大小相等，方向相同，作用点不同的一个力和(b)位于同

一平面的一个力偶，该力偶矩大小等于已知力对于选择点之矩. 见题 2.11.

2.6 要点

在求解某些问题时要使用矢量方程，但在处理一些等效问题时，则使用代数方程. 事实上，当矢量的方向已知时，只决定于它的大小.

还应注意，在工程单位制中，力矩的单位是磅-英尺(lb-ft). 在国际单位制中，力矩的单位是牛顿·米(N·m).

例 题

2.1 试求 20 lb 的力，对 O 点之矩. 见图 2-3.

解 ☞ 过 O 点作 20 lb 力的作用线的垂线 OD. 它的长度是 4.33 ft. 力对 O 点(事实上是垂直于 xy 面的过 O 点轴)的矩是 $-(20\times4.33)=-86.6$ lb-ft.

由于顺着 z 轴正向看，力矩为顺时针转动，因此为负值(无标注).

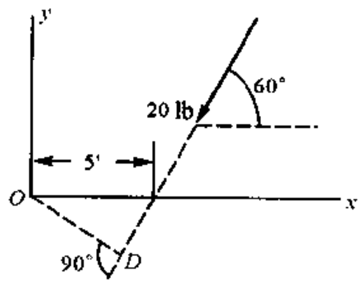


图 2-3

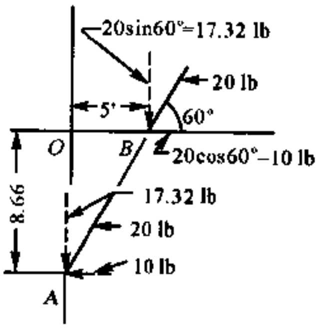


图 2-4

2.2 用合力矩定理求解题 2.1. 见图 2-4.

解 ☞ 运用合力矩定理，将 20 lb 的力沿其作用线上的任意点垂直分解为沿 x, y 轴的分量.

如果选择的 B 点在 x 轴上，则力沿 x 轴的分量对 O 点的矩为零，20 lb 的力对 O 点之矩，只等于沿 y 轴分量对 O 点之矩，即 $-(17.32\times5)=-86.6$ lb-ft.

如果选择的 A 点在 y 轴上，则力沿 y 轴分量对 O 点之矩为零，因此，20 lb 力对 O 点之矩，仅是沿 x 轴分量对 O 点之矩，即 $-(10\times8.66)=-86.6$ lb-ft.

2.3 100 N 的力，在坐标系 x, y, z 中，沿作用线的坐标从(2, 0, 4)点指向坐标(5, 1, 1). 试求该力对 x, y 和 z 轴之矩.

解 ☞ 在图 2-5 中，设 100 N 的力是平行 6 面体的对角线，且 6 面体的边分别与所建坐标轴平行. 因此，3 边分别表示该力的 3 个分量值.

沿 x 边长是 $5-2=3$ m；沿 y 边长是 $1-0=1$ m；沿 z 边长是 $1-4=-3$ m. 负号说明 F_z 分量是反向或沿着 z 轴负向.

$$F_x=\frac{x\text{ 边的长}}{\text{对角线长}}\times100\ \text{N}=\frac{3}{\sqrt{3^2+1^2+3^2}}\times100=\frac{3}{\sqrt{19}}\times100=68.7\ \text{N}$$

同样地，

$$F_y=\frac{1}{\sqrt{19}}\times100=22.9\ \text{N},\qquad F_z=\frac{-3}{\sqrt{19}}\times100=-68.7\ \text{N}$$

求解 100 N 的力对 x 轴的矩，即可求它的分量对 x 轴的矩. 在本题中，只有分量 F_y 对 x 轴有矩，因此，100 N 的力对 x 轴之矩 M_x，即是 F_y 对 x 轴之矩等于 $-22.9\times4=-91.6$ N·m. 负号表明，当沿着 x 轴正向看去，F_y 绕 x 轴顺时针转动.

在求解力对 y 轴之矩时，注意到 F_y 平行于 y 轴，因此无矩. 只需考虑 F_x 和 F_z 对 y 轴之矩. 求解

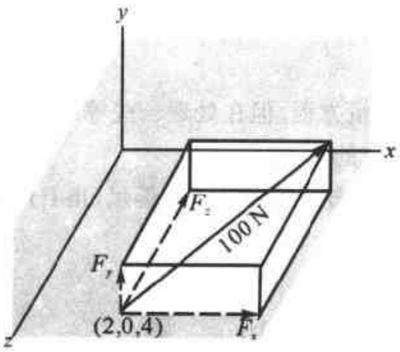


图 2-5

力矩最好的方法是，先确定力矩的符号，然后只写出分量的符号和它的力臂，即 $M_y = +(68.7\times 2) + (68.7\times 4) = +412\ \mathrm{N\cdot m}$.

同理，只有 F_y 对 z 轴取矩(因为 F_z 与 z 轴平行，F_x 与 z 轴相交)，即 $M_z = +(22.9\times 2) = +45.8\ \mathrm{N\cdot m}$.

注意正确地确定力矩的符号及理解力矩含义.

2.4 用叉乘求力矩的方法，求解题 2.3.

解 ☞ 由例 2.3, $\boldsymbol{F} = 68.7\boldsymbol{i} + 22.9\boldsymbol{j} - 68.7\boldsymbol{k}$

矢量 $\boldsymbol{r}$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 作用线上任一点到坐标原点的位置矢量.如果任一点选择点(2,0,4)，则 $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$，有

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 68.7 & 22.9 & -68.7 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}[0 - 4(22.9)] - \boldsymbol{j}[2(-68.7) - 4(68.7)] + \boldsymbol{k}[2(22.9) - 0]$$

$$= -91.6\boldsymbol{i} + 412\boldsymbol{j} + 45.8\boldsymbol{k}\ \mathrm{N\cdot m}$$

此外，若选用 $\boldsymbol{F}$ 作用线上的点(5,1,1)，则 $\boldsymbol{r} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.即

$$\boldsymbol{M} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 68.7 & 22.9 & -68.7 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}[-1(68.7) - 22.9(1)] - \boldsymbol{j}[5(-68.7) - 1(68.7)] + \boldsymbol{k}[5(22.9) - 68.7(1)]$$

$$= -91.6\boldsymbol{i} + 412\boldsymbol{j} + 45.8\boldsymbol{k}\ \mathrm{N\cdot m}$$

单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 前的系数即为对于 x, y, z 轴之矩的值.

2.5 力 $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ lb，作用点为(3,1,1)，试求此力对过点(2,5,−2)与点(3,−1,1)的直线的力矩.单位为英尺.

解 ☞ 矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以选择从直线上的任何一点到力矢量的作用点.如直线上点选为(2,5,−2)，则矢量 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.关于对选择点的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{e}_L = \frac{[(3-2)\boldsymbol{i} + (-1-5)\boldsymbol{j} + (1+2)\boldsymbol{k}]}{\sqrt{(1)^2 + (-6)^2 + (3)^2}} = \frac{\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{46}}$$

力对于直线的力矩为

$$M_L = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_L = (-5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k})\cdot\frac{\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{46}}$$

$$= \frac{-5 - 42 + 33}{\sqrt{46}} = \frac{-14}{\sqrt{46}} = -2.06\ \text{lb-ft}$$

如果力臂选择的点是(3, −1, 1),则 $r=2j$,力矩 M 是

$$M=r\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-2i-4k$$

则力对于直线的力矩为

$$M\cdot e_L=(-2i+0j-4k)\cdot\frac{i-6j+3k}{\sqrt{46}}=\frac{-2-12}{\sqrt{46}}=\frac{-14}{\sqrt{46}}=-2.06\ \text{lb-ft}$$

2.6 一力 P,作用点在(1, −1, −2),其正交分量是 $P_x=22$ N, $P_y=23$ N, $P_z=7$ N. 试求该力对由原点及点(3, −1, 0)所确定的直线之矩. 长度单位为米.

解 ☞

$$P=22i+23j+7k\ \text{N}$$

力臂为

$$r=(1-0)i+(-1-0)j+(-2-0)k=i-j-2k\ \text{m}$$

$$M=r\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 22 & 23 & 7 \end{vmatrix}=39i-51j+45k\ \text{N}\cdot\text{m}$$

2.7 力偶矩 +60 lb-ft 作用在纸面上,试求等效力偶为:(a)力偶的力是 10 lb, (b)力偶的力是 30 lb.

解 ☞ 在(a)中,力臂应为 6 ft,而在(b)中力臂为 2 ft.

力偶的转动方向必须是逆时针转动,其组成力偶的平行力可以是任意角度,如图 2-6 所示.

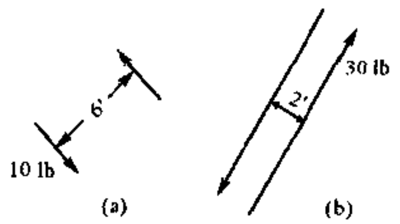


图 2-6

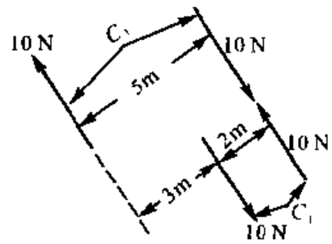


图 2-7

2.8 试求作用在同一平面的二力偶的合力偶,其中 $C_1=+20$ N·m, $C_2=-50$ N·m. 见图 2-7.

解 ☞ 用图解的方法,将二力偶中的力变成相同大小,如为 10 N,并且选择二力偶中各一个力,让其共线、反向.

显然,此共线力相约,剩下二力各为 10 N,力臂是 3 m,则合力偶为 −30 N·m. 结果也可由解析法求解.

2.9 用一个力等效替代一个 −100 N·m 的力偶与一个作用在原点的 50 N 的铅直力,则此等效力作用在何处?

解 ☞ 用大小相等分别为 50 N,方向相反且平行相距为 2 m 的力,表示力偶如图 2-8 所示. 让力偶中的一个与已知 50 N 的力共点,且作用在原点,则此二力消去,最后剩下一个力,铅直向上 50 N,作用在距原点 2 m 处.

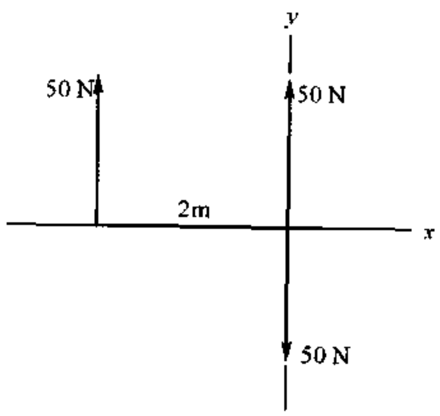


图 2-8

2.10 求作用在同一平面的一个 30 N, 60°的力与一个 +50 N·m 力偶的等效力,见图 2-9.

解 ☞ 力偶是不可以再被简化的最简系统，但力偶可以与一个力合成.

用 30 N 的力表示已知力偶，并让此力偶中的一个力与一个 30 N 的已知力共线且方向相反.将共线力消去，剩下力偶中的另一个 30 N 平行力，与已知力方向相同并距已知力 1.67m.

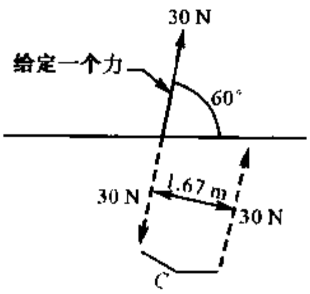


图 2-9

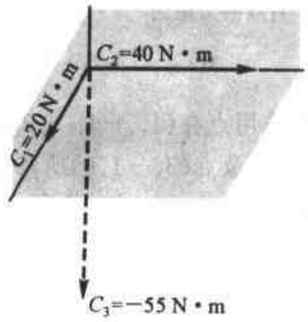


图 2-10

2.11　如图 2-10 所示，力偶 $C_1 = 20$ N·m 作用在 xy 平面上，力偶 $C_2 = 40$ N·m 作用在 yz 平面上，另一力偶 $C_3 = -55$ N·m 作用在 xz 平面上.试求合力偶.

解 ☞ 力偶 C_1 作用在 xy 平面上为正.当顺着 z 轴正向看去，力偶关于 z 轴逆时针转动时，由右手定则，该力偶矩矢为沿 z 轴正向矢量.使用此规则，在图上画出 3 个力偶.根据矢量和

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = \sqrt{(20)^2 + (40)^2 + (-55)^2} = 70.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\cos\phi_x = \frac{C_2}{C} = +0.564, \quad \cos\phi_y = \frac{C_3}{C} = -0.777, \quad \cos\phi_z = \frac{C_1}{C} = +0.282$$

这些是力偶矢量 $\boldsymbol{C}$ 的方向余弦，力偶的作用面垂直于力偶矩矢.

力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$ 可以用矢量表示法写出

$$\boldsymbol{C} = +40\boldsymbol{i} - 55\boldsymbol{j} + 20\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$\boldsymbol{C}$ 的大小可以由上式求出.

2.12　一根直径为 2 英寸的管子，在其端部长 14 英寸的水平杆上铅垂向下作用一个 25 lb 力.该力的等效力系是(1)作用在管子端部引起弯曲的力 25 lb 和(2)长柄上的扭转力偶.力的弯矩及扭转力偶是多少？见图 2-11(a).

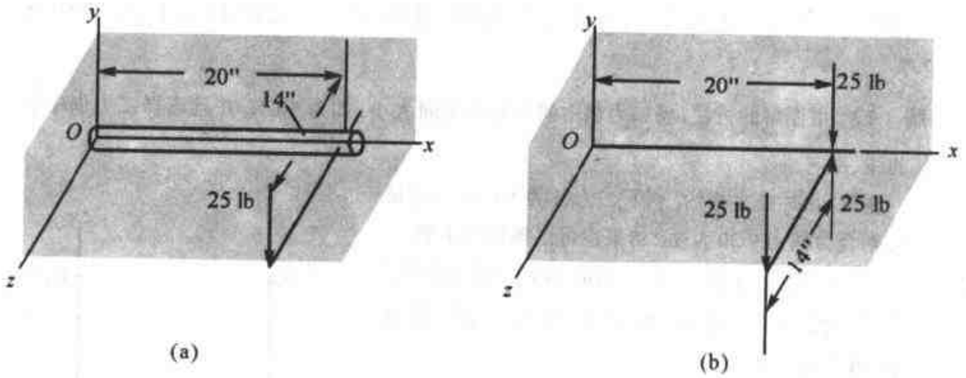


图 2-11

解 ☞ 在管子端部中心处，加两个大小相等(25 lb)、方向相反且共线的力，如图 2-11(b)所示.这 3 个力仍与原力系等效.

向上的力与原力组成一个力偶 $C = 25 \times 14 = 350$ lb-in.这个力偶扭动管子逆时针转动，视为正值.

另一向下的 25 lb 的力引起管子对 z 轴的弯矩为 $M = -25 \times 20 = -500$ lb-in.

2.13　求解题 2.12 中，25 lb 的力对 O 点之矩.

解 ☞ 25 lb 的力的作用点,对原点的位置矢量 $\boldsymbol{r}=20\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{k}$,力 $\boldsymbol{F}=-25\boldsymbol{j}$,即该力对于原点之矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 20 & 0 & 14\\ 0 & -25 & 0\end{vmatrix}\\ &=\boldsymbol{i}[0-14(-25)]-\boldsymbol{j}[0\quad 0]+\boldsymbol{k}[20(-25)-0]\\ &=350\boldsymbol{i}-500\boldsymbol{k}\ \text{lb-in}\end{aligned}$$

结果与题 2.12 一致.

2.14 图 2-12 中的起重机在水平面内. x 轴通过最后轮与地的接触点,y 轴与前后中心线平行,z 轴铅直如图示.起重机床身(平台)在地面之上 3 ft.为实用目的,将起重杆底部支点按在起重机平台上并离司机室中心 6 ft.司机室中心在中心线上离最后轴(右边)向前 15 ft.起重杆长 50 ft,在铅直平面中与起重机平台成 60°夹角,司机室和起重杆相对于水平的机车平台中心线的前后旋转 45°角,尾部车轮的接触点之间的距离是 8 ft.试求 4000 lb 的载荷关于对 x 轴的扭矩.

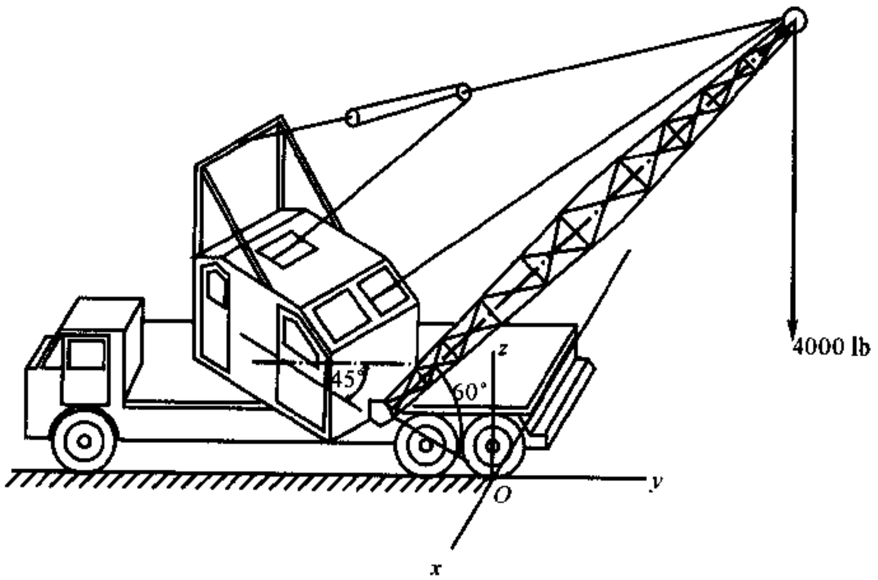


图 2-12

解 ☞ 轴的原点为 O,司机室中心坐标是$(-4,\ -15,\ +3)$,起重杆底端坐标是$(-4+6\sin45°,\ -15+6\cos45°,\ +3)$或$(+0.24,\ -10.8,\ +3)$,起重杆顶端坐标是$(+0.24+50\cos60°\sin45°,\ -10.8+50\cos60°\cos45°,\ +3+50\sin60°)$或$(+17.9,\ +6.91,\ +46.3)$.

4000 lb 重力关于 O 点之矩是

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 17.9 & 6.91 & 46.3\\ 0 & 0 & -4000\end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{i}$ 前的系数是对 x 轴之矩,即 $M_x=-27\ 600$ lb-ft.这样,当顺着 x 轴正向看去,力矩关于 x 轴为顺时针转动.

补充习题

2.15 用合力矩定理,求下表中各力对原点的力矩.

F 的大小	F 与水平面的夹角	F 作用点的坐标	答
20 lb	30°	(5, −4)ft	+119 lb-ft
64 lb	140°	(−3,4)ft	+72.9 lb-ft
15 lb	337°	(8, −2)ft	−19.3 lb-ft
8 oz	45°	(6,1)ft	+28.3 oz-in
4 N	90°	(0, −20)m	0
96 N	60°	(4,2)m	236 N·m

2.16　在题 2.15 中,使用叉乘方法求力矩($\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$).答案均用单位矢量 $\boldsymbol{k}$ 表示.

2.17　50 N 的力,在坐标系 x, y, z 中,沿作用线其坐标从点(8,2,3)指向点(2, −6,5).试求该力对 x, y, z 轴之矩的大小.

答案:$M_x=+137$ N·m, $M_y=-167$ N·m, $M_z=-255$ N·m.

2.18　已知力 $\boldsymbol{P}=32.4\boldsymbol{i}-29.3\boldsymbol{j}+9.9\boldsymbol{k}$ lb,作用在原点.试求该力关于对过点(0, −1, 3)与点(3, 1, 1)的直线之矩.长度单位为英寸.

答案:$M=-88.2$ lb-ft.

2.19　一力作用在原点,其正交分量是 $P_x=68.7$ N, $P_y=22.9$ N, $P_z=-68.7$ N.试求力 $\boldsymbol{P}$ 关于过点(1, 0, −1)与(4, 4, −1)的直线之矩.长度单位为英尺.

答案:$M=-13.7$ N·m.

2.20　试求作用在同一平面上的 3 个力偶的合力偶.其中 $C_1=+20$ lb-ft, $C_2=-80$ lb-ft, $C_3=-18$ lb-ft.

答案:$C=-78$ lb-ft,作用在同一平面或平行平面.

2.21　铅直向下作用点在原点的力 270 lb 与作用点在 $x=-5$ 处的相同力及与多大的力偶等效.

答案:$C=-1350$ lb-in.

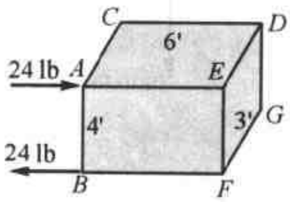


图 2-13

2.22　3 个力偶为 +16 N·m, −45 N·m, +120 N·m,分别作用在 xy、yz 和 xz 平面上,试求其合力偶矩矢.

答案:$C=+129$ N·m, $\cos\theta_x=-0.349$, $\cos\theta_y=0.931$, $\cos\theta_z=0.124$.

2.23　将力偶 $\boldsymbol{C}=30\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}+35\boldsymbol{k}$ N·m 与题 2.22 中力偶求和.

答案:$\boldsymbol{C}=-15\boldsymbol{i}+100\boldsymbol{j}+51\boldsymbol{k}$ N·m.

2.24　大小为 24 lb 的二力分别平行作用在如图 2-13 所示的平行六面体 AE, BF 线的 A, B 两点.试将该已知力偶用一对大小为 16 lb 的铅直力等效作用在 C, D 两点.

2.25　用一个力等效图 2-14 所示的 3 个平行力,并求该等效力的大小、方向和作用点.

答案:80 N,铅直向上,作用在距 A 点左边 0.75 m 处.

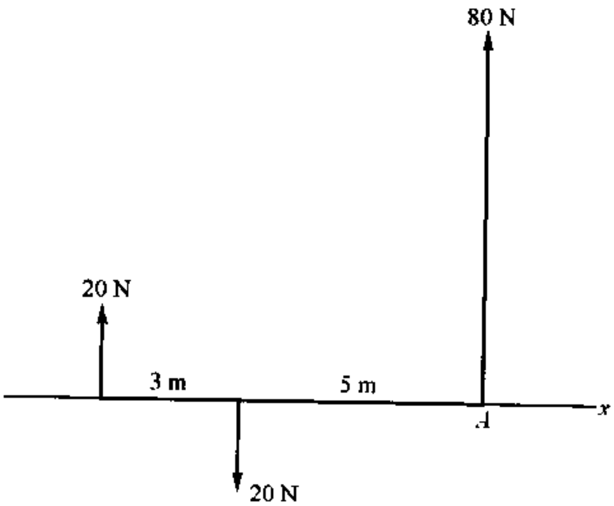


图 2-14

2.26　水平杆 8 m 长，在其右端铅直向下作用力 12 N，如图 2-15 所示．试将该力作用在左端的 12 N 的铅直向下力和一顺时针转动的 96 N·m 的力偶等效．

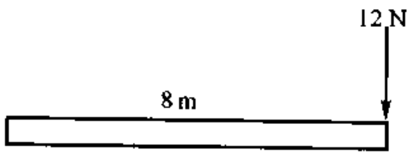


图 2-15

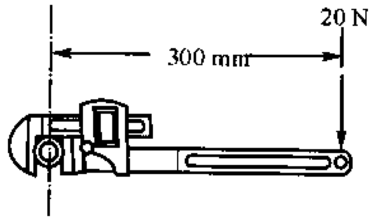


图 2-16

2.27　水平管钳在其左端锁紧管子，一铅直向下力 20 N 作用在距管子中心 300 mm 处的管钳的右端．试将该力用作用在管子中心的铅直向下的 20 N 的力和一个顺时针转动的 6 N·m 力偶等效，如图 2-16 所示．

2.28　将如图 2-17 所示的作用在皮带轮上的力系，简化为作用在中心 O 的一个力与一个力偶．合力既有水平分量也有铅直分量．

答案：78.3 lb，$\theta_x = 296.5°$，$C = 0$．

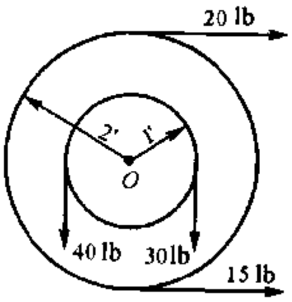


图 2-17

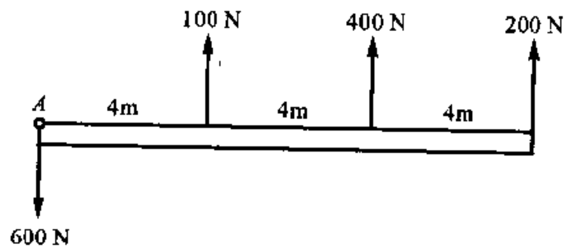


图 2-18

2.29　将如图 2-18 所示的梁上作用的力系，简化成一个作用在 A 点一个力和一个力偶．

答案：$R = 100$ N 向上，作用在 A 点，$C = 6000$ N·m．

2.30　将如图 2-19 所示的力系与力偶系，向 A 点简化．

答案：$R_x = +48.1$ lb，$R_y = -3.9$ lb，$C = +36.2$ lb-ft．

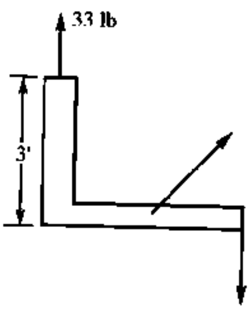


图 2-19

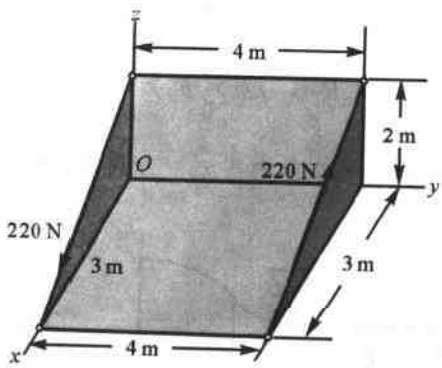


图 2-20

2.31　试求如图 2-20 所示的二力关于对 x, y, z 轴之矩．

答案：$\boldsymbol{M} = 488\boldsymbol{i} + 732\boldsymbol{k}$ N·m 或 $M_x = +488$ N·m，$M_y = 0$，$M_z = +732$ N·m．

第 3 章　共面力系的合成

3.1　共面力系

共面力系中力的作用线均位于同一平面.作用线汇交于一点的力系称为汇交力系.汇交点交于无穷远处的力系为平行力系.由既不汇交也不平行的诸力组成的力系,称为任意力系.

在确定上述系统的合成问题时,可应用矢量方程.但下面叙述的代数方程对已知系统也十分有用.

3.2　汇交力系

合力 $\boldsymbol{R}$ 可以是(a)通过汇交点的一个力,或(b)为零.写成代数式为

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \text{ 和 } \tan\theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

$\sum F_x$, $\sum F_y$ 是力系中各力在 x, y 方向分量的代数和, θ_x 是合力 $\boldsymbol{R}$ 与 x 轴正向间的夹角.

3.3　平行力系

合力可以是(a)与原力系平行的力 $\boldsymbol{R}$,(b)位于同一平面或平行平面的力偶,或(c)为零.写成代数式为

$$R = \sum F \quad \text{和} \quad R\bar{a} = \sum M_o$$

$\sum F$ 等于力系中各力的代数和; O 是位于同一平面上的力矩中心; $\bar{a}$ 是力矩中心 O 到合力 R 的垂直距离; $R\bar{a}$ 是 R 对于 O 点的力矩; $\sum M_o$ 是力系中各力对于 O 点之矩的代数和.

如果 $\sum F$ 不为零,则可用方程 $R\bar{a} = \sum M_o$ 来确定 $\bar{a}$,从面确定 R 的作用线.如果 $\sum F = 0$,合力偶矩不为零,则合成结果是惟一的,其大小等于 $\sum M_o$.

3.4　任意力系

合力可以是(a)一个力 $\boldsymbol{R}$,(b)位于同一平面或平行平面的力偶,或(c)为零.写成代数式为

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad \text{和} \quad \tan\theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

$\sum F_x$, $\sum F_y$ 是力系中各力在 x, y 方向分量的代数和, θ_x 是合力 $\boldsymbol{R}$ 与 x 轴正向间夹角.

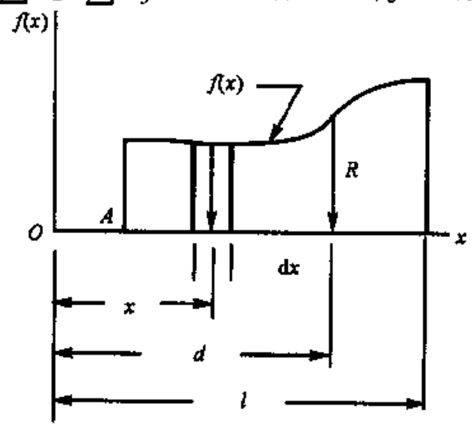


图 3-1

为了确定合力的作用线,应用方程

$$R\bar{a} = \sum M_o$$

O 是位于同一平面上力矩中心; $\bar{a}$ 是力矩中心 O 到合力 R 的垂直距离; $R\bar{a}$ 是 R 对 O 点的力矩, $\sum M_o$ 是力系中各力对 O 点之矩的代数和.

注意,假如 $R = 0$,力偶不为零,则力偶大小为 $\sum M_o$.

3.5　分布力系

分布力系不是作用在空间上确定点的集中力,

它表示了无穷多矢量的集合.每个力矢量是其作用点的函数.考虑如图 3-1 所示共面(平行)分布力系.在工程单位制中,$f(x)$的单位是 lb/ft;在国际单位制中,其单位是 N/m.力系的合力和它的作用点可由积分求出,即

$$R=\int_A^B f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad Rd=\int_A^B xf(x)\mathrm{d}x$$

题 3.13 到 3.15 是具体的例子.

例 题

3.1 试求如图 3-2 所示的汇交力系的合力.

解 ☞ 求出已知 4 个力沿 x,y 方向的分量.将 x 方向的分量进行代数和,求出$\sum F_x$;再求出$\sum F_y$.用表格把求出的数据清楚地表示.

力	$\cos\theta_x$	$\sin\theta_x$	F_x	F_y
150	+0.866	+0.500	+129.9	+75.0
200	−0.866	+0.500	−173.2	+100.0
80	−0.500	−0.866	−40.0	−69.2
180	+0.707	−0.707	+127.3	−127.3

则 $\sum F_x=+44.0$, $\sum F_y=-21.5$, 则

$$R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}=\sqrt{(44.0)^2+(-21.5)^2}=49.0\ \text{lb}$$

$$\tan\theta_x=\frac{\sum F_x}{\sum F_y}=\frac{-21.5}{+44.0}=-0.489$$

解出

$$\theta_x=360^\circ-26^\circ=334^\circ$$

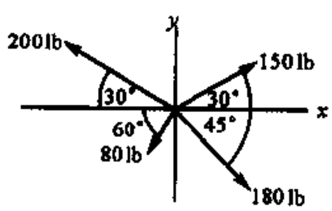


图 3-2

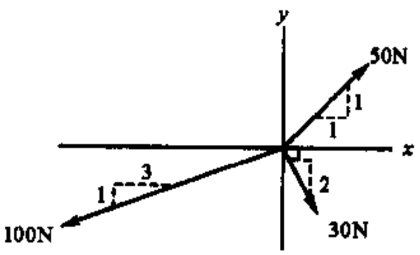


图 3-3

3.2 试求如图 3-3 所示力系的合力.注,每个力的作用线的斜度在图中标注.

解 ☞

力	F_x	F_y
50	$+50\times\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}$	$+50\times\frac{1}{\sqrt{2}}$
100	$-100\times\frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}}$	$-100\times\frac{1}{\sqrt{10}}$
30	$+30\times\frac{3}{\sqrt{1^2+2^2}}$	$-30\times\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sum F_x=-46.1$, $\sum F_y=-23.0$, $R=\sqrt{(-46.1)^2+(-23.0)^2}=51.6\ \text{N}, \theta_x=207^\circ$.

3.3 试求图 3-4 中的共面、汇交力系的合力.

解 ☞

$$\sum F_x = 70 - 100\cos 30° - 125\sin 10° = -38.3\ \text{lb}$$

$$\sum F_y = 125\cos 10° - 100\sin 30° = 73.1\ \text{lb}$$

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \sqrt{(-38.3)^2 + (73.1)^2} = 82.5\ \text{lb}$$

$$\tan\theta_x = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{73.1}{-38.3} = -1.91,\quad \theta_x = 62°$$

得合力与 x 轴正向夹角 $\theta = 180° - 62° = 118°$，合力在图 3-4 中用虚线表示.

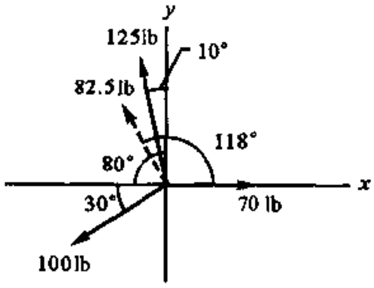


图 3-4

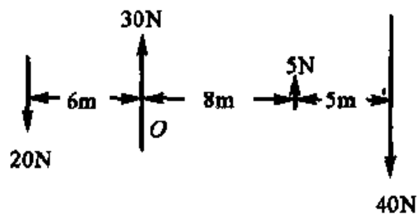


图 3-5

3.4　试求图 3-5 中平行力系的合力.

解　在图 3-5 中所示，各力的作用线铅直. 则

$$R = -20 + 30 + 5 - 40 = -25\ \text{N}\quad (\text{向下})$$

为了确定合力的作用线位置，任意地选取力矩中心 O. 由于力对自身作用线的力矩为零，因此，将矩心 O 选在已知力上. 让 O 点在 30 N 的力作用线上，则

$$\sum M_o = +(20\times 6) + (30\times 0) + (5\times 8) - (40\times 13) = -360\ \text{N}\cdot\text{m}$$

即，R 对 O 点之矩等于 -360 N·m. R 铅直向下，只有位于 O 点的右边，才能产生关于 O 点的顺时针力矩.

应用 $R\bar{a} = \sum M_o$ 得

$$\bar{a} = \frac{360\ \text{N}\cdot\text{m}}{25\ \text{N}} = 14.4\ \text{m}\quad \text{位于 } O \text{ 点之右}$$

注意：确定 $\bar{a}$ 的值，不必考虑 R 或 $\sum M_o$ 的符号，但具体确定位置的时候，要考虑 R 与 $\sum M_o$ 的方向.

3.5　试求图 3-6 中平行力系的合力

解　$R = -100 + 200 - 200 + 400 - 300 = 0$，表明合成的结果不是一个力.

在 100 lb 力的作用线上选择矩心 O 点，如图所示，求 $\sum M_o$

$$\sum M_o = +(100\times 0) + (200\times 2) - (200\times 5) + (400\times 9) - (300\times 11) = -300\ \text{lb-ft}$$

因此，按照合力矩定理，合成结果是作用于纸所在平面内的一个力偶 $C = -300$ lb-ft.

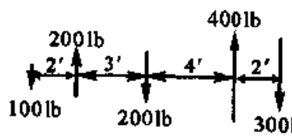


图 3-6

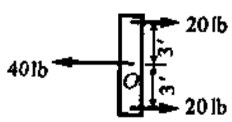


图 3-7

3.6　试求如图 3-7 所示的作用在杆上的平行力系的合力.

解　$R = \sum F_h = +20 + 20 - 40 = 0$，表明合成的结果不是一个力. 现求力偶，

$$\sum M_0 = -(20\times 3) + (20\times 3) = 0$$

显然，本系统合力为零，合力偶也为零.

3.7　如图 3-8 所示的悬臂梁上，作用着 3 个平行力和一个力偶，求此 3 个力和力偶的合力是

多少？

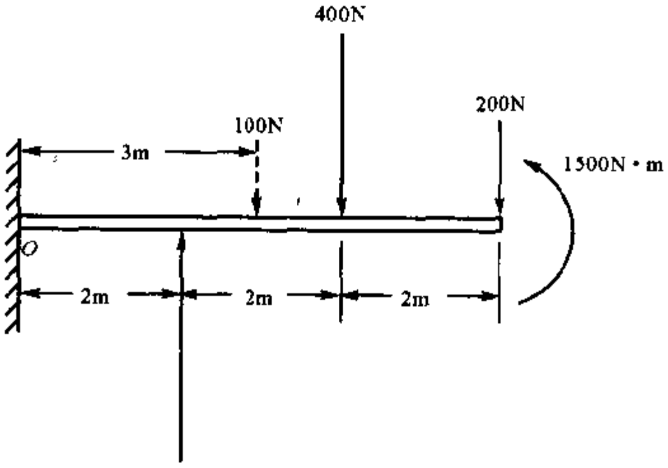


图 3-8

解

$$R = \sum F = 500 - 400 - 200 = -100\ \text{N}$$

$$\sum M_o = 2 \times 500 - 4 \times 400 - 6 \times 200 + 1500 = -300\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$R\bar{a} = \sum M_o, \quad \bar{a} = \frac{-300}{-100} = 3\ \text{m}$$

合力铅直向下，合力对 O 点之矩应为负值，则合力定在 O 点之右．合力及作用位置如图 3-8 中虚线所示．

3.8　试求如图 3-9 所示的共面、非汇交力系的合力．

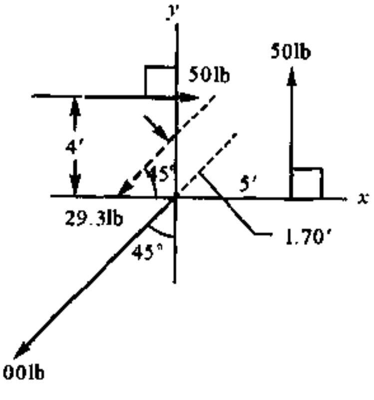


图 3-9

解

$$\sum F_x = 50 - 100\cos 45° = -20.7\ \text{lb}$$

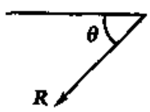
$$\sum F_y = 50 - 100\sin 45° = -20.7\ \text{lb}$$

$$R = \sqrt{(-20.7)^2 + (-20.7)^2} = 29.3\ \text{lb}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = 45°$$

$$\sum M_o = 5 \times 50 - 4 \times 50 = 50\ \text{lb-ft}$$

$$R\bar{a} = \sum M_o = 50, \quad \bar{a} = \frac{50}{29.3} = 1.71\ \text{ft}$$



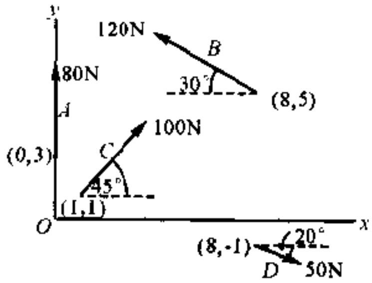
R 指向左下，并且对原点产生正的力矩．

3.9　试求如图 3-10(a)所示的平面任意力系的合力．设长度单位为米．

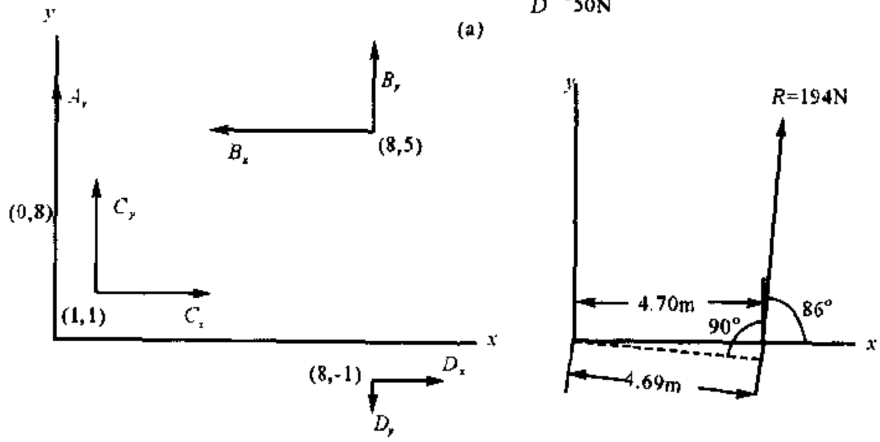
解　为了方便将力用字母 A, B, C, D 表示．最简单的求解是使用列表，将每个力沿 x, y 的分量和分量对同一点如 O 点的力矩制成表格．现将力以它们作用在相同点的分量表示，如图 3-10(b)．有时，使用力的作用线不同点的分量取矩要比已知点时方便，例如，力 C 作用线与 x 轴夹 45°且过原点 O，显然其对 O 点之矩为零．不过在本例题中，要使用通过已知作用点的铅直、水平分量即如图所示的分量．

下列表中填写了必须的数值．在每个分量前写上合适的符号用以确定、检查力矩的符号．

力	$\cos\theta_x$	$\sin\theta_x$	F_x	F_y	F_x 对 O 点之矩	F_y 对 O 点之矩	M_o
A	0	+1	0	+80.0	0	0	0
B	−0.866	+0.500	−103.9	+60.0	+519.5	+480.0	+999.5
C	+0.707	+0.707	+70.7	+70.7	−70.7	+70.7	0
D	+0.940	−0.342	+47.0	−17.1	+47.0	−136.8	−89.8



(a)



(b)

图 3-10

$\sum F_x = +13.8\ \text{N} \quad \sum F_y = +193.6\ \text{N}, \quad \sum M_0 = +910\ \text{N}\cdot\text{m}$

$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \sqrt{(+13.8)^2 + (193.6)^2} = 194\ \text{N}$

$\theta_x = \arctan\dfrac{+193.6}{+13.8} = 86°$

合力的力臂等于 910/194 = 4.69 m.

R 作用线指向右上方,由于 $\sum M_o$ 是正的,即 R 对 O 点之矩为逆时针方向.

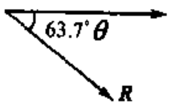
求合力作用线的另一种方法是确定合力与 x 轴的交点.若将合力在其与 x 轴的交点上正交分解,则其 x 方向的分量对 O 点之矩为零.则只需用 y 方向的分量确定力矩,即等于沿 y 方向分量乘以交点到圆点距离(交点的 x 坐标).

$$\bar{x} = \frac{\sum M_o}{\sum F_y} = \frac{910}{193.6} \approx 4.70\ \text{m}$$

因为 $\sum F_y$ 是正的,$\sum M_o$ 也是正的,因此画出合力其与 x 轴交点坐标(4.7,0).

3.10 试求图 3-11(a)中力系的合力.设长度单位为英尺.

解 ☞ 直接写出各分量的代数和,而不列出题 3-9 的表格.



$\sum F_x = 100\cos60° + 80\cos45° + 150\cos75° = 145.4\ \text{lb}$

$\sum F_y = -100\sin60° + 80\sin45° - 120 - 150\sin75° = -294.9\ \text{lb}$

$R = \sqrt{(145.4)^2 + (-294.9)^2} = 328\ \text{lb}, \quad \theta = \arctan\dfrac{-294.9}{145.4} = 63.7°$

各分量对 O 点之矩求和:

$$\sum M_o = -(20)100\cos60° + (5)100\sin60° - (10)80\cos45° + (10)80\sin45° - (25)120 - (15)150\cos75° - (35)150\sin75° = -9220\ \text{lb-ft}$$

确定合力与 x 轴的交点,即

$$(\sum F_y)\bar{x} = \sum M_o, \quad \bar{x} = 31.3\ \text{ft}$$

确定合力与 y 轴的交点,即

$$(\sum F_x)\bar{y} = \sum M_o, \quad \bar{y} = 63.4\ \text{ft}$$

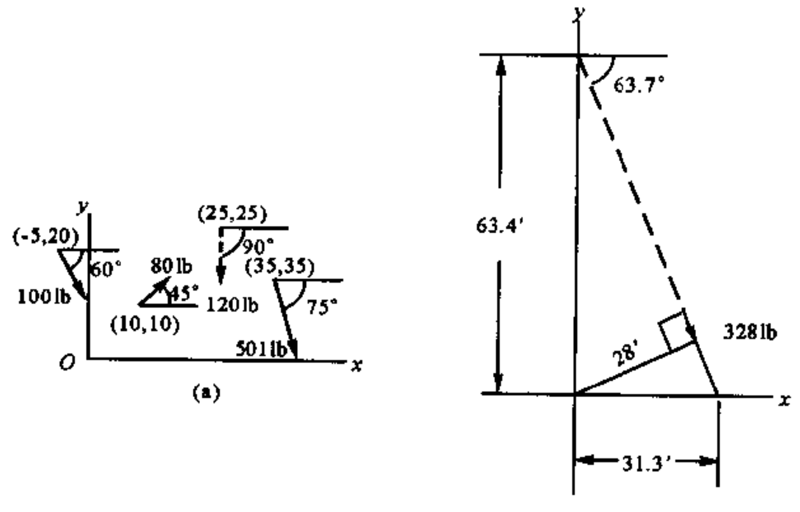


图 3-11

合力如图 3-11(b)所示.

3.11　如图 3-12(a)所示的半径为 3 ft 的圆,沿其切线方向作用 4 个力,试求该力系的合力,并问合力作用位置距圆中心为多少?

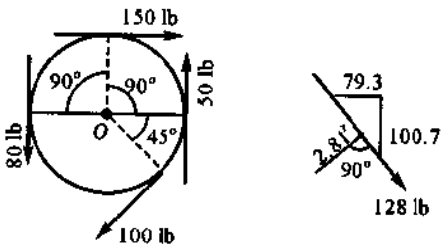


图 3-12

解　100 lb 的力沿水平和铅直分量均为 -70.7 lb. 有 $\sum F_h = +150 - 70.7 = +79.3$ lb, 即指向右; $\sum F_v = +50 - 80 - 70.7 = -100.7$ lb, 即向下.

合力 $R = \sqrt{(\sum F_h)^2 + (\sum F_v)^2} = 128$ lb.

R 对 O 点之矩是 $R \times a$, 并且也等于所有已知力对 O 点之矩的和, 即为 $128a = +50 \times 3 - 150 \times 3 + 80 \times 3 - 100 \times 3 = -360$. 合力如图 3-12(b)所示, 引起对 O 点的负力矩, 所以距圆中心的距离为 2.81 ft.

3.12　试求图 3-13 的薄角撑板上作用的力系的合力,并确定合力与 x 轴相交的位置.

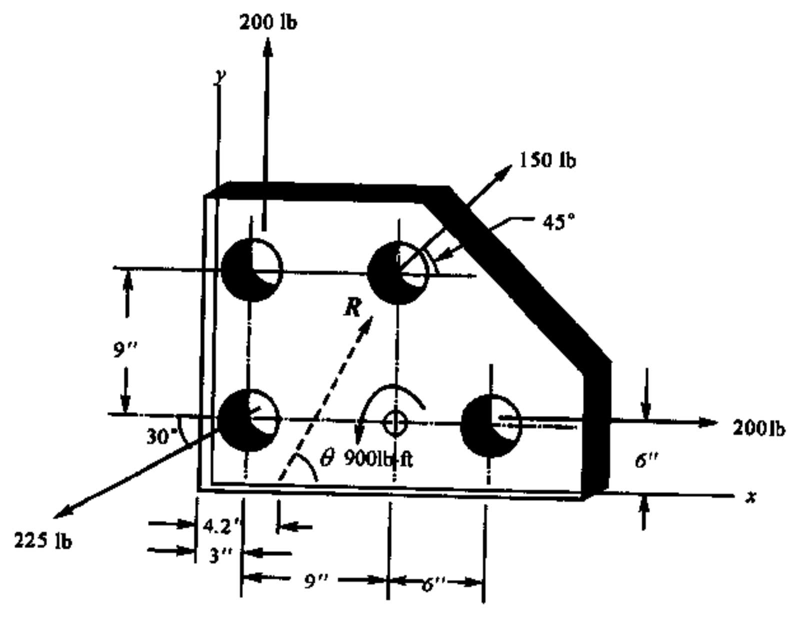
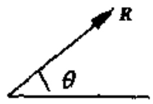


图 3-13

解 ☞



$$\sum F_x = 150\cos 45° + 200 - 225\cos 30° = 111.2\ \text{lb}$$

$$\sum F_y = 150\sin 45° - 225\sin 30° + 200 = 193.6\ \text{lb}$$

$$R = \sqrt{(111.2)^2 + (193.6)^2} = 223\ \text{lb},\quad \theta = \arctan\frac{193.6}{111.2} = 60°$$

$$\sum M_o = (3)200 - (15)150\cos 45° + (12)150\sin 45° - (6)200 + 900 + (6)225\cos 30° - (3)225\sin 30° = 813\ \text{lb-ft}$$

合力与 x 交点,即为

$$\left(\sum F_y\right)\bar{x} = \sum M_o,\quad \bar{x} = \frac{813}{194} = 4.2\ \text{in}$$

3.13　在图 3-14 中,6 ft 的梁上作用有均匀分布载荷 20 lb/ft,试确定 R 和 d.

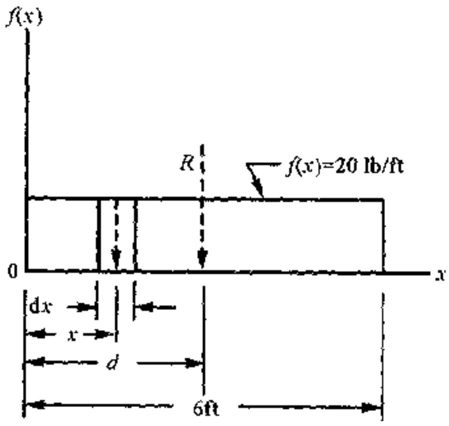


图 3-14

解 ☞

$$R = \int_0^6 20\,\mathrm{d}x = 120\ \text{lb}$$

$$Rd = \int_0^6 x(20)\,\mathrm{d}x = 360\ \text{lb-ft}$$

$$d = \frac{360}{120} = 3\ \text{ft}$$

3.14　图 3-15 中,载荷为三角形分布.图形高度从 O 点随 x 距离的比例等于 $(x/9)30$ N/m.试确定 R 和 d.

解 ☞

$$R = \int_0^9 \frac{x}{9}(30)\,\mathrm{d}x = 135\ \text{N}$$

$$Rd = \int_0^9 x\left[\frac{x}{9}(30)\right]\mathrm{d}x = 810\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$d = \frac{810}{135} = 6\ \text{m}$$

3.15　如图 3-16 中,载荷按抛物线变化.试确定 R 和 d.

解 ☞　$R = \int_0^l 3x^{1/2}\,\mathrm{d}x = 2x^{3/2}\Big]_0^l = 2l^{3/2}$,　$Rd = \int_0^l x(3x^{1/2})\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}l^{5/2}$

$$d = \frac{\frac{6}{5}l^{5/2}}{2l^{3/2}} = 0.6l$$

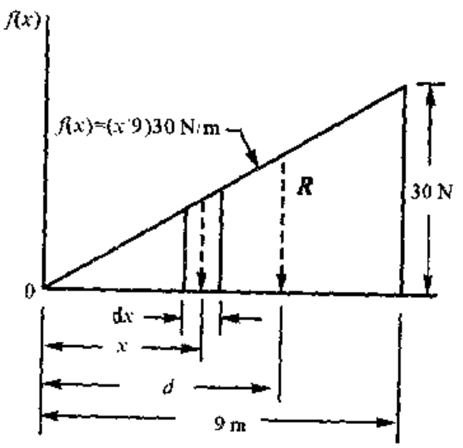


图 3-15

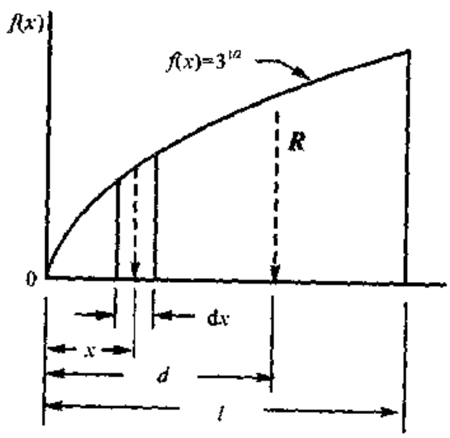


图 3-16

补充习题

3.16 在铅直柱子的水平面上，作用有大小为 200 N 和 300 N 的拉力．如果两力之间的夹角是 85°，它们的合力是多少？合力与 200 N 的力之间的夹角是多少？分别使用图解与解析的方法求解．
答案：$R=375$ N，$\theta=53°$．

在题 3.17 至 3.20 中，求每组汇交力系的合力．已知每个力与 x 轴夹角，力的单位是磅．

3.17 力 85 126 65 223
θ_x 38° 142° 169° 295°
答案：$R=59.8$ lb，$\theta_x=268°$．

3.18 力 22 13 19 8
θ_x 135° 220° 270° 358°
答案：$R=21.3$ lb，$\theta_x=214°$．

3.19 力 1250 1830 855 2300
θ_x 62° 125° 340° 196°
答案：$R=2520$ lb，$\theta_x=138°$．

3.20 力 285 860 673 495 241
θ_x 270° 180° 45° 330° 100°
答案：$R=181$ lb，$\theta_x=89°$．

3.21 4 个力的合力是 100 lb，如图 3-17 所示的是 4 个力中的 3 个力．试求第四个力．
答案：$F=203$ lb，$\theta_x=49°$．

3.22 在一个小环上(直径略去不计)作用 3 个大小均为 80 N 的拉力．设它们之间的相互角度均为 120°，试求合力．这种系统被称为平衡系统．
答案：$R=0$．

3.23 3 个力的合力是 60 N，如图 3-18 所示．3 个力中的两个力为 120 N 和 65 N，如图示，试求第三个力．
答案：169 N，$\theta_x=246°$．

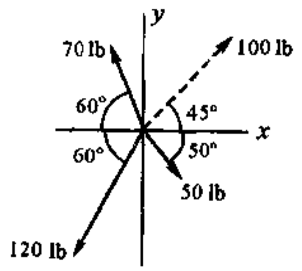


图 3-17

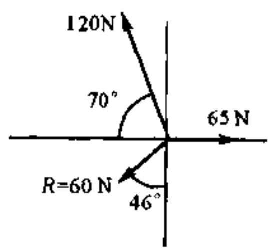


图 3-18

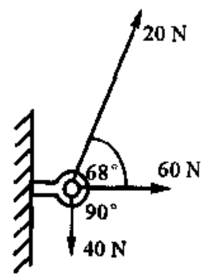


图 3-19

3.24 在图 3-19 眼销中，标出 3 根绳上的张力，设此力系为汇交力系，试用一根绳子上的张力等效此 3 根绳中的张力．
答案：$T=70.8$ N，$\theta_x=343°$．

3.25 试求汇交点为(3，−3)的 3 个力的合力．3 力分别是：120 N，过点(8，6)；18 N，过点(2，5)；269 N，过点(−6，3)．
答案：$R=263$ N，$\theta_x=159°$过点(3，−3)．

3.26 在图 3-20 中，3 个共面力的合力是 100 lb，与 x 轴夹角为 20°，试求其中两力 P 和 Q 之值．
答案：$P=240$ lb；$Q=161$ lb，

试求题 3.27 至 3.29 中的力系的合力．其中各力是水平的，单位用磅，y 为作用线的距离，单位用英尺．

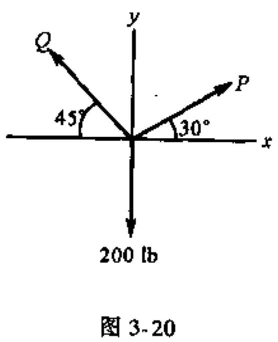


图 3-20

3.27

力	+50	+20	−10
y	+3	−5	+6

答案：$R=+60$ lb，$\bar{y}=-0.167$ ft.

3.28

力	+800	−300	+1000	−600
y	−6	−5	−4	0

答案：$R=+900$ lb，$\bar{y}=-8.11$ ft.

3.29

力	+160	−220	+80	−180	+160
y	+3	−7	−3	+10	0

答案：$C=+20$ lb-ft.

3.30 见图 3-21. 求作用在梁上 3 个载荷的合力.

答案：$R=38$ T 向下，作用线距左边支承处 8.37 ft.

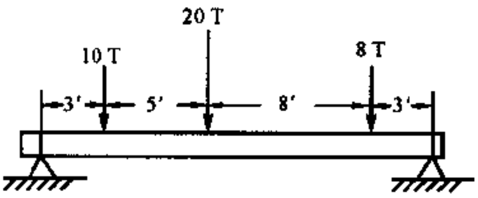


图 3-21

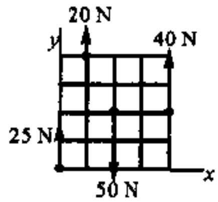


图 3-22

3.31 试求如图 3-22 所示的 4 个力的合力. 每个小正方形的边长是 1 m.

答案：$R=+35$ lb，$\bar{x}=2.99$ m.

3.32 6 个重为 30, 20, 40, 25, 10 和 35 lb 的重物，吊在同一平面的水平支撑上，它们与墙的距离分别为 2, 3, 5, 7, 10 和 12 ft. 试求用一个多大的力能与这 6 个力等效？

答案：$R=-160$ lb，距墙 6.34 ft.

3.33 有 3 个力作用在梁上，在图 3-23 所示中，画出了其中两个力和 3 个力的合力. 试问第三个力是多少？

答案：$F=20$ T 向下，距左支承点 $\bar{x}=10$ ft.

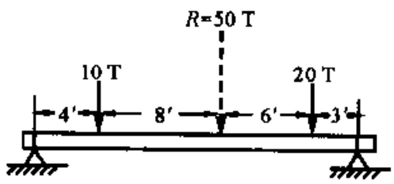


图 3-23

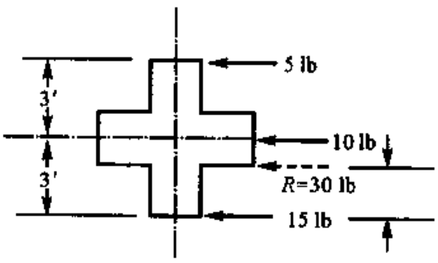


图 3-24

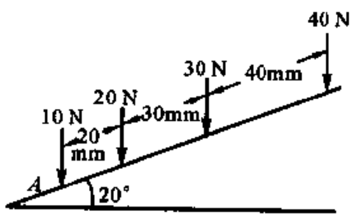


图 3-25

3.34 试求如图 3-24 所示的共面平行力系的合力.

答案：30 lb 指向左，距底部 2 ft.

3.35 试求如图 3-25 所示的共面平行力系的合力.

答案：$R=100$ N 向下，从 A 端沿平面向上 55 mm.

在题 3.36 至 3.38 中，试求平面任意力系的合力. 力的单位是牛顿，坐标的单位是米.

3.36

F	20	30	50	10
θ_x	45°	120°	190°	270°
作用点的坐标	(1, 3)	(4, −5)	(5, 2)	(−2, −4)

答案：$R=547$ N，$\theta_x=157°$，x 交点为 3.52 m.

3.37

F	50	100	200	90
θ_x	90°	150°	30°	45°
作用点的坐标	(2, 2)	(4, 6)	(3, −2)	(7, 2)

答案：$R = 303$ N, $\theta_x = 60.3°$, x 交点为 6.77 m.

3.38

F	2	4	5	8
θ_x	45°	290°	183°	347°
作用点的坐标	(0, 5)	(4, 3)	(9, −4)	(2, −6)

答案：$R = 7.12$ N, $\theta_x = 322°$, x 交点为 1.20 m.

3.39 试求图 3-26 所示中 5 个力的合成结果.力的单位为英两,正方形是 1×1 in.

答案：$C = -268$ oz-in

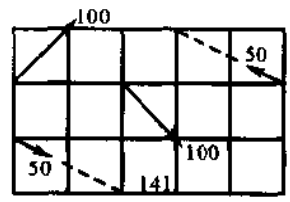


图 3-26

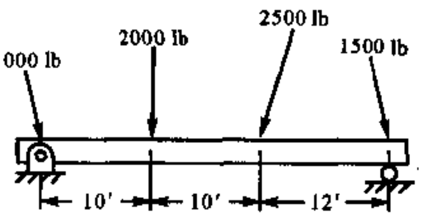


图 3-27

3.40 试求图 3-27 所示的 4 个力的合成结果.其中 2000 lb 的力系是铅直的,其余 3 个力均与铅直线夹角为 15°.

答案：$R = 6830$ lb 向下,距铰链的水平距离为 16.8 ft.

3.41 在图 3-28 所示的薄钢板中,作用了 3 个力.用怎样的一个力能使钢板等效?

答案：$R = 18.7$ N, $\theta_x = 285°$,与底边相交,在 O 点左边 4.23 m.

3.42 试求图 3-29 所示曲柄中的力系的合成.

答案：$R = 247$ lb, $\theta_x = 259°$,从 O 点与水平交点 −63 in.

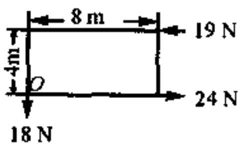


图 3-28

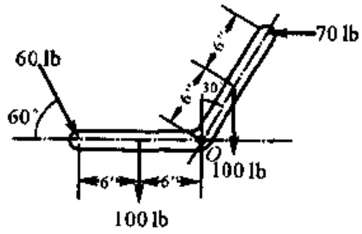


图 3-29

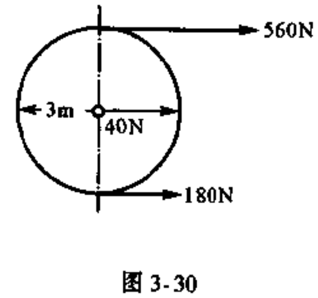


图 3-30

3.43 试求如图 3-30 所示的作用在滑轮上的 3 个力的合力.

答案：$R = 742$ N, $\theta_x = 357°$, R 与铅直直径切点到 O 点为 2.27 m.

3.44 在图 3-31 所示的桁架上,作用了 6 个载荷,试求其合力.载荷的单位用 K,(1 K = 1 Kip = 1000 lb),其中 3 个载荷是铅直的,风载荷垂直于边.桁架是对称的.

答案：$R = 10.7$ K, $\theta_x = 281°$, R 与桁架最底边的交点距左边支承为 +15.3 ft.

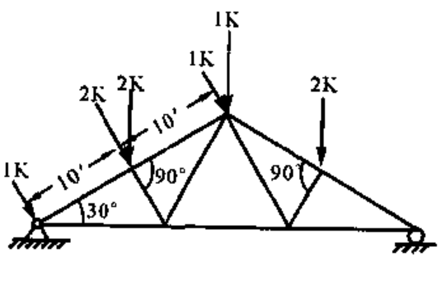


图 3-31

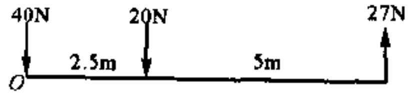


图 3-32

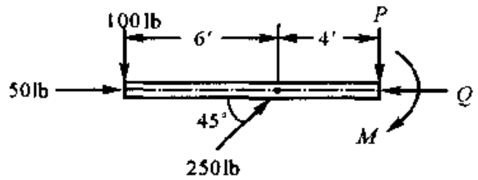


图 3-33

3.45　4 个铅直力的合成结果是一个大小为 300 N·m，逆时针转动的力偶. 在图 3-32 中，画出了 4 个力中的 3 个，试求第四个力.

答案：33 N 向上，距 O 点右边 4.46 m.

3.46　图 3-33 所示的平面任意力系中，力系的合成结果为零. 试求 M，P 和 Q.

答案：$M=293$ lb-ft，$P=76.7$ lb，$Q=227$ lb.

3.47　试求图 3-34 所示的力系中的合力. 坐标单位为英尺.

答案：73.4 lb，$\theta_x=107°$，x 交点到 O 左边 8.38 ft.

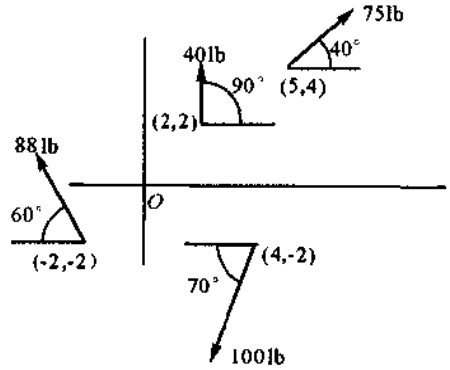


图 3-34

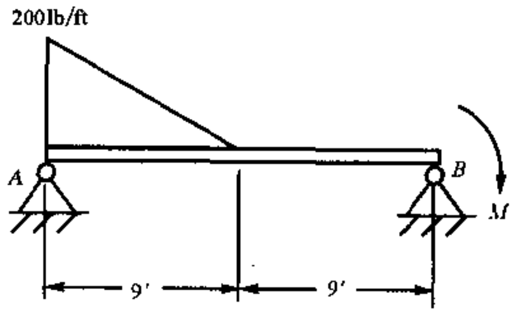


图 3-35

3.48　在如图 3-35 所示的梁中，为了保证不脱离支撑 A，M 的最大值为多少？

答案：$M=13\ 500$ lb-ft.

3.49　试求如图 3-36 所示的力系的合力. 坐标为毫米.

答案：$\mathbf{R}=24.7\boldsymbol{i}+12.9\boldsymbol{j}$ N，x 交点是 24.5 mm.

3.50　在 50 英尺的机翼上作用从 0 到 500 lb/ft 的抛物线变化分布载荷，见图 3-37. 试求 k 值及合力的大小与位置.

答案：$R=16\ 700$ lb，$\bar{x}=30$ ft，$k=70.7$.

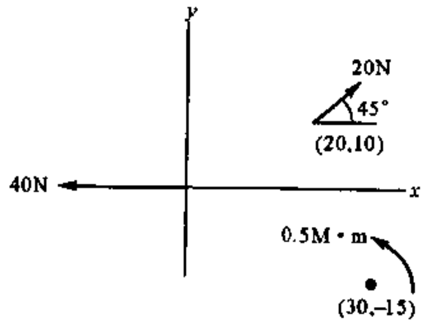


图 3-36

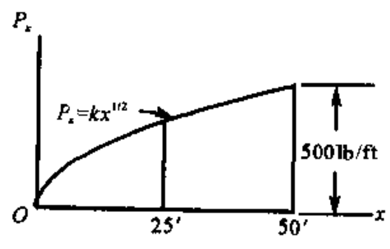


图 3-37

3.51　在 3.50 题中，如果载荷按 0～90°的正弦曲线分布，载荷大小为 0～500 lb/ft，作用长度为 50 ft，且 $P_x=k\sin(\pi x/100)$. 试求 k 值及合载荷的大小与位置.

答案：$k=500$，$R=15\ 900$ lb，$x=319$ ft.

第4章　非共面力系的合成

4.1　非共面力系

非共面力系(空间力系)又可分成以下几种.由作用线汇交于一点的力组成的力系称为空间汇交力系.力的作用线相互平行的力组成的力系称为空间平行力系.力作用线非汇交、非平行(或斜)则称为空间任意力系.

4.2　非共面力系的简化

非共面力系的简化结果是一个力矢 $\boldsymbol{R}$ 和一个力偶矢 $\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F}$,即力系中所有力的矢量和;$\boldsymbol{C}=\sum \boldsymbol{M}$,力系中所有力对任意点(选择的基点)的力矩的矢量和. $\boldsymbol{R}$ 的值与基点的选择无关;$\boldsymbol{C}$ 的值与基点的选择有关.还有一种可能情况,力系对惟一的基点,简化的力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$ 与力 $\boldsymbol{R}$ 平行,则这个专门的组合被称之为力螺旋.

在前面叙述的矢量方程可用于直接求解非共面力系的简化问题,并且也可用代数方程求解下述的问题.

4.3　汇交力系

合力 $\boldsymbol{R}$ 可以是(a)过汇交点的一个力,或(b)为零.写成代数式为

$$R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2}$$

其方向余弦为

$$\cos\theta_x=\frac{\sum F_x}{R},\quad \cos\theta_y=\frac{\sum F_y}{R},\quad \cos\theta_z=\frac{\sum F_z}{R}$$

$\sum F_x,\sum F_y,\sum F_z$ 是力系中各力分别在 x,y,z 方向上的分量的代数和;$\theta_x,\theta_y,\theta_z$ 是合力 $\boldsymbol{R}$ 分别与 x,y,z 轴正向夹角.

4.4　平行力系

合力可以是(a)与原力系平行的力 $\boldsymbol{R}$,(b)一个力偶,或(c)为零.设 y 轴与原力系平行 .则,写成代数式为

$$R=\sum F,\quad R\bar{x}=\sum M_z,\quad R\bar{z}=\sum M_x$$

$\sum F$ 是力系中各力的代数和;$\bar{x}$ 是从 yz 平面到合力的垂直距离;$\bar{z}$ 是从 xy 平面到合力的垂直距离;$\sum M_x,\sum M_z$ 是力系中各力对 x 和 y 轴的力矩的代数和.

如果 $\sum F=0$,合力偶矩矢不为零,则 C 可由下式确定.

$$C=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_z)^2}\quad 与\quad \tan\phi=\frac{\sum M_z}{\sum M_x}$$

ϕ 是合力偶矩矢与 x 轴正向夹角.

4.5　任意力系

已经指明,当合成结果是一个力和一个力偶时,力偶随选择的基点变化.在以下的讨论中,坐标轴 x,y,z 的原点建立在基点上.

任一已知力可简化成一个力和一个力偶:(1)该力作用在基点,与原力大小相等、方向相

同、作用线相互平行;(2)力偶作用在由已知力与原点决定的平面上.

作用在原点的汇交力系的合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小由方程得到

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

方向余弦为

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R}, \quad \cos\theta_y = \frac{\sum F_y}{R}, \quad \cos\theta_z = \frac{\sum F_z}{R}$$

上述方程与第 4.3 节中的方程意义相同.

合力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$ 的大小为

$$C = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

方向余弦为

$$\cos\phi_x = \frac{\sum M_x}{C}, \quad \cos\phi_y = \frac{\sum M_y}{C}, \quad \cos\phi_z = \frac{\sum M_z}{C}$$

$\sum M_x$, $\sum M_y$, $\sum M_z$ 是力系中各力对 x, y, z 轴之矩的代数和;ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z 是力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$ 分别与 x, y, z 轴正向夹角.

例　题

在以下问题中,使用等效的代数方程要比矢量方程更方便.同样地,在图中,清楚地标注了力的大小和方向.

4.1　力系中汇交于原点的各力分别为 20, 15, 30 和 50 lb,并且指向分别过点(2,1,6),(4, −2, 5),(−3, −2,1)和(5,1, −2).试求该力系的合力.

F	坐标	$\cos\theta_x$	$\cos\theta_y$	$\cos\theta_z$	F_x	F_y	F_z
20	(2, 1, 6)	$\frac{+2}{\sqrt{41}} = +0.313$	$\frac{+1}{\sqrt{41}} = +0.156$	$\frac{+6}{\sqrt{41}} = +0.938$	+6.26	+3.12	+18.8
15	(4, −2, 5)	$\frac{+4}{\sqrt{45}} = +0.597$	$\frac{-2}{\sqrt{45}} = -0.298$	$\frac{+5}{\sqrt{45}} = +0.745$	+8.96	−4.47	+11.2
30	(−3, −2, 1)	$\frac{-3}{\sqrt{14}} = -0.803$	$\frac{-2}{\sqrt{14}} = -0.535$	$\frac{+1}{\sqrt{14}} = +0.268$	−24.1	−16.1	+8.04
50	(5, 1, −2)	$\frac{+5}{\sqrt{30}} = +0.912$	$\frac{+1}{\sqrt{30}} = +0.183$	$\frac{-2}{\sqrt{30}} = -0.365$	+45.6	+9.15	−18.3

解 ☞ 每项的分母等于 x, y, z 的坐标的平方和再开平方.如 30 lb 的力,是 $\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(1)^2} = \sqrt{14}$.

F_x 等于 F 与 $\cos\theta_x$ 的乘积,由观察决定数值前的符号.

$\sum F_x = +6.26 + 8.96 - 24.1 + 45.6 = +36.7$,同样有 $\sum F_y = -8.3$,有 $\sum F_z = +19.7$,且

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} = 42.5\ \text{lb}$$

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R} = \frac{+36.7}{42.5} = +0.864, \quad \theta_x = 30.2°$$

$$\cos\theta_y = \frac{\sum F_y}{R} = \frac{-8.30}{42.5} = -0.192, \quad \theta_y = 79.0°$$

$$\cos\theta_z = \frac{\sum F_z}{R} = \frac{+19.7}{42.5} = +0.463, \quad \theta_z = 62.4°$$

$\cos\theta_y$ 是负值,表明合力沿 y 方向分量是负值.如图 4-1 所示.

4.2　如图 4-2 所示的 3 个力为 +20 N, −10 N 和 30 N.选择 y 轴与该力系的作用线平行.力的作用线与 xz 平面交点坐标分别为(2, 3),(4, 2)和(7, 4),单位为 m,求力系的合力.

解 ☞

$$R=\sum F=20-10+30=+40\ \mathrm{N}$$

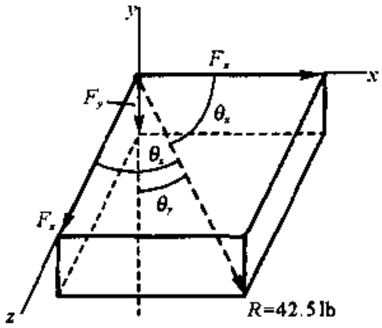


图 4-1

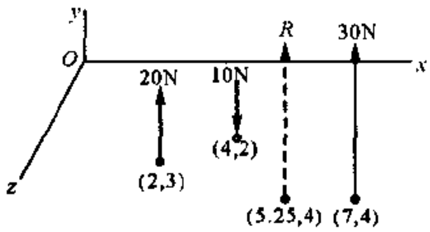


图 4-2

求合力的 x 坐标(即合力作用线与 xz 平面的交点),力系在 xy 面投影如图 4-3 所示.由方程 $R\bar{x}=\sum M_z$,得

$$\sum M_z=\sum M_O=+(20\times 2)-(10\times 4)+(30\times 7)=+210\ \mathrm{N\cdot m}$$

合力 +40 N(向上),乘以 x 坐标,得到关于 z 轴之矩为正的或逆时针转动,因此 R 必须在 O 的右边.即为

$$\bar{x}=+\frac{210}{40}=+5.25\ \mathrm{m}$$

符号的确定已由前节阐明,它并不是力与力矩的综合符号.

图 4-4 表明了力系在 yz 面上的投影.

$$\sum M_x=\sum M_O=-(30\times 4)-(20\times 3)+(10\times 2)=-160\ \mathrm{N\cdot m}$$

合力 40 N(指向上),与 z 坐标相乘,产生对 O 点的负力矩或顺时针转动力矩 160 N·m,因此,R 一定在 O 点的左边.当合力在 O 点(空间图所示)左边时,z 坐标是正的,即

$$\bar{z}=+\frac{160}{40}=+4.00\ \mathrm{m}$$

结论是,合力为 40 N,指向上.它的作用线与 y 轴平行,与 xz 平面交点坐标 x、z 是(+5.25,+4.00).如图 4-2 所示.

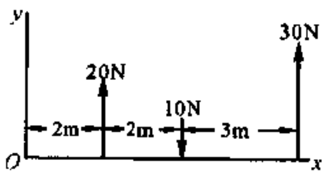


图 4-3

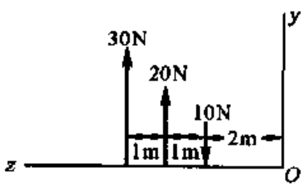


图 4-4

4.3 试求如图 4-5 所示力系的合成结果.长度单位为米.

解 ☞

$$R=\sum F=+100+50-50=0$$

表明合成结果不是一个力,可能是一个力偶.

对上面问题再求 $\sum M_x$ 和 $\sum M_z$ 为

$$\sum M_x=-(100\times 2)+(50\times 2)+(150\times 3)=+350\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$\sum M_z=+(100\times 2)+(50\times 4)-(150\times 8)=-800\ \mathrm{N\cdot m}$$

由于 $\sum F=0$,因此 $\sum M_x$ 和 $\sum M_z$ 分别表示作用在 yz 和 xy 平面上的力偶.如图 4-6 所示.

将二力偶矩矢合成为一个力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$,其大小为

$$C=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_y)^2}=874\ \mathrm{N\cdot m}$$

矢量 $\boldsymbol{C}$ 位于 xz 平面,其与 z 轴夹角为 θ_z 如图示,且 $\theta_z=\theta_x$.

根据力偶的性质,合力偶的作用平面垂直于矢量 C,这个作用平面在图中表示为 y 轴与 xz 平面中虚线 TT 组成的平面.

这条虚线与 x 轴的夹角是

$$\theta_x = \arctan\frac{\sum M_x}{\sum M_z} = \arctan\frac{350}{800} = 23.6°$$

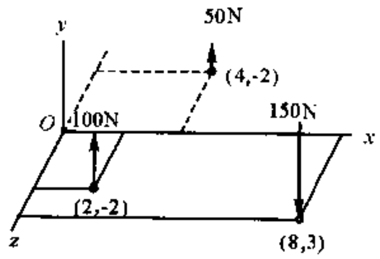


图 4-5

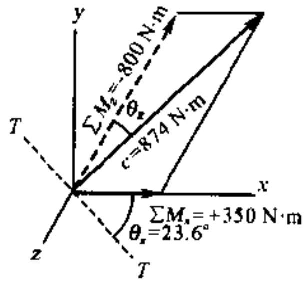


图 4-6

4.4 试求如图 4-7 所示的任意力系的合成结果.

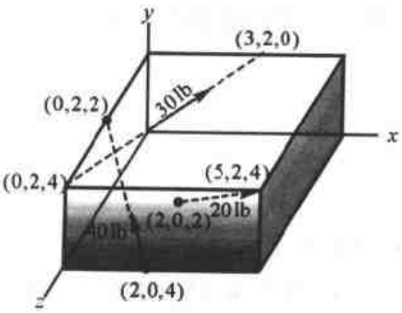


图 4-7

解 ☞ 在本例中,将每一个力用与其大小相等、平行,作用点过原点的力和一个力偶等效.将每个作用在原点的力,使用其方向余弦,分解成沿 x, y, z 方向的分量.如 40 lb 的力,其方向余弦由力的作用线上已知两点的坐标差值确定.

x 差值是 $0-2=-2$;y 差值是 $2-0=+2$;z 差值是 $2-4=-2$. 则 40 lb 的力与 x 轴的夹角余弦为

$$\cos\theta_x = \frac{2}{\sqrt{(-2)^2+(+2)^2+(-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{12}}$$

同样地,$\cos\theta_y = +\frac{2}{\sqrt{12}}$ 和 $\cos\theta_z = -\frac{2}{\sqrt{12}}$.

结果如表所示.

力	$\cos\theta_x$	$\cos\theta_y$	$\cos\theta_z$	F_x	F_y	F_z
40	$\frac{-2}{\sqrt{12}}$	$\frac{+2}{\sqrt{12}}$	$\frac{-2}{\sqrt{12}}$	−23.1	+23.1	−23.1
30	$\frac{+3}{\sqrt{25}}$	0	$\frac{-4}{\sqrt{25}}$	+18.0	0	−24.0
20	$\frac{+3}{\sqrt{17}}$	$\frac{+2}{\sqrt{17}}$	$\frac{+2}{\sqrt{17}}$	+14.6	+9.71	+9.71

$$\sum F_x = +9.5,\quad \sum F_y = +32.8,\quad \sum F_z = -37.4$$

由上面的表格确定作用在原点的汇交力系的合力为

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2} = \sqrt{(+9.5)^2+(+32.8)^2+(-37.4)^2} = 50.8\ \text{lb}$$

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R} = \frac{+9.5}{50.8} = +0.187,\quad \cos\theta_y = \frac{\sum F_y}{R} = +0.645,\quad \cos\theta_z = \frac{\sum F_z}{R} = -0.737$$

平移力系的合力由图 4-8 所示.

在前面没有涉及由于每个力平移产生的附加力偶.分别确定 3 个力对 3 个坐标轴之矩产生的力偶的大小与方向.参见图 4-7,研究作用点在(2, 0, 4)的 40 lb 的力,它对 x 轴之矩是该力的 3 个分量对 x 轴之矩的代数和.不过,只有 y 方向的分量对 x 轴之矩不为零.则 40 lb 力对 x 轴之矩为 $-(23.1\times4)=-92.4$ lb-ft.求对 y 轴之矩(即,M_y),只考虑沿 x, z 方向的分量对 y 轴之矩.x 分量对 y 轴之矩为 $-(23.1\times4)=-92.4$ lb-ft;z 轴分量对 y 轴之矩为 $+(23.1\times2)=+46.2$ lb-ft.因此,$M_y=-92.4+46.2=-46.2$ lb-ft.同样,40 lb 力对 z 轴之矩,只有 y 向分量对 z 轴之矩不为零,即 $M_z=+(23.1\times2)=+46.2$ lb-ft.

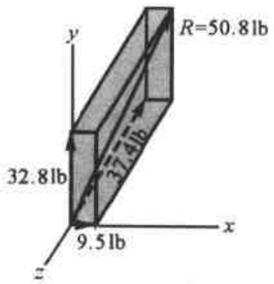


图 4-8

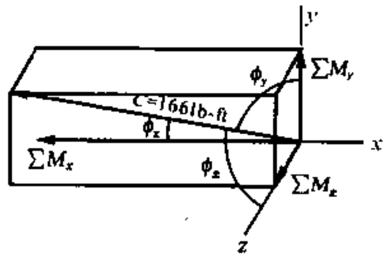


图 4-9

将力与力矩列成表格.

力	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
40	-23.1	+23.1	-23.1	-92.4	-46.2	+46.2
30	+18.0	0	-24.0	-48.0	+72.0	-36.0
20	+14.6	+9.71	+9.71	-19.4	+9.8	+19.4

$$\sum M_x = -159.8,\quad \sum M_y = +35.6,\quad \sum M_z = +29.6$$

合力偶矩的大小为

$$C = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$
$$= \sqrt{(-159.8)^2 + (+35.6)^2 + (+29.6)^2} = 166 \text{ lb-ft}$$

方向余弦为

$$\cos\phi_x = \frac{\sum M_x}{C} = \frac{-159.8}{166} = -0.963,\quad \cos\phi_y = \frac{\sum M_y}{C} = +0.214$$
$$\cos\phi_z = \frac{\sum M_z}{C} = +0.178$$

矢量 $\boldsymbol{C}$ 如图 4-9 所示.合力偶的作用平面垂直于矢量 $\boldsymbol{C}$.

力系的合成结果是力矢 $\boldsymbol{R}$ 与力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$.

4.5 试求由力系与力偶组成的任意力系的合成结果.其中有,150 lb 力沿作用线从(2,0,0)点到(0,0,1)点,90 lb 的力沿作用线从(0,−2,−1)到(−1,0,−1)和位于 xy 平面的力偶 160 lb-ft.长度单位为英尺.

解 用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示每一个力并且求每个力对原点之矩.

$$\boldsymbol{F}_1 = 150\,\frac{(0-2)\boldsymbol{i}+(0-0)\boldsymbol{j}+(1-0)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-2)^2+(10)^2+(1)^2}} = -134\boldsymbol{i}+67\boldsymbol{k} \text{ lb}$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 90\,\frac{(-1)\boldsymbol{i}+(2)\boldsymbol{j}+(0)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(0)^2}} = -40.25\boldsymbol{i}+80.5\boldsymbol{j} \text{ lb}$$

则

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = -174\boldsymbol{i}+80.5\boldsymbol{j}+67.1\boldsymbol{k} \text{ lb}$$

再求 $\boldsymbol{C}_1$ 与 $\boldsymbol{C}_2$

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -134 & 0 & 67.1 \end{vmatrix} = -134\boldsymbol{j} \text{ lb-ft}$$
$$\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ -40.25 & 80.5 & 0 \end{vmatrix} = -80.5\boldsymbol{i}+40.25\boldsymbol{j}-80.5\boldsymbol{k} \text{ lb-ft}$$

作用在平面 xy 上的力偶可写成 $\boldsymbol{C}_3 = 160\boldsymbol{k}$ lb-ft.计算合力偶矩为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{C}_3 = 80.5\boldsymbol{i}-93.8\boldsymbol{j}+79.5\boldsymbol{k} \text{ lb-ft}$$

补充习题

试求题 4.6 至题 4.9 中各汇交力系的合力.力用磅,作用点的坐标用英尺.每题中的力系均汇交在原点.

4.6 力 100 200 500 300

坐标 (1,1,1) (2,3,1) (−2,−3,4) (−1,1,−2)

答案:$R=286$ lb, $\theta_x=-60^\circ$, $\theta_y=-78^\circ$, $\theta_z=33^\circ$.

4.7 力 5 2 3 4 8

坐标 (2,2,3) (5,1,−2) (−3,−4,5) (2,1,−4) (5,2,3)

答案:$R=13.3$ lb, $\theta_x=33^\circ$, $\theta_y=70^\circ$, $\theta_z=66^\circ$.

4.8 力 1000 1500 1800

坐标 (−5,2,1) (6,−3,−2) (−2,−1,−1)

答案:$R=1780$ lb, $\theta_x=-52^\circ$, $\theta_y=-55^\circ$, $\theta_z=-57^\circ$.

4.9 力 40 80 30 20

坐标 (6,5,4) (1,−3,−2) (8,10,−7) (−10,−9,−10)

答案:$R=80.1$ lb, $\theta_x=49^\circ$, $\theta_y=-67^\circ$, $\theta_z=-51^\circ$.

4.10 试求如图 4-10 所示的 3 个力的合力.注意,它们的作用线位于 3 个坐标平面并且过原点.

答案:$R=19.7$ lb, $\theta_x=43^\circ$, $\theta_y=56^\circ$, $\theta_z=66^\circ$.

在题 4.11 至 4.14 中,试求各力系的合力及其作用线与 xz 平面相交点的坐标.力的单位是牛顿且平行于 y 轴,与 xz 平面相交点的坐标用米计.

4.11 力 100 150 200 300

(x,z) (3,−2) (1,6) (2,−3) (−1,−1)

答案:$R=750$ N, $\bar{x}=0.733$ m, $\bar{z}=-0.267$ m.

4.12 力 −25 18 −12 −30 36

(x,z) (1,2) (2,−1) (0,0) (−6,−2) (3,2)

答案:$R=-13$ N, $\bar{x}=-23.0$ m, $\bar{z}=-4.92$ m.

4.13 力 3 −4 2 −5

(x,z) (2,5) (1,−5) (3,3) (−4,−4)

答案:$R=-4$ N, $\bar{x}=-7.00$ m, $\bar{z}=-15.3$ m.

4.14 力 +10 +20 −30

(x,z) (1,1) (2,−5) (3,−4)

答案:$C_x=-30$ N·m, $C_z=-40$ N·m.

4.15 重量为 20, 15, 12, 6 和 10 lb 的重物静止放在桌子上.与桌子的坐标分别为(0.5, 15°),(1.5, 90°),(0.8, 185°),(0.7, 262°)和(1.2, 340°),括号中的第一个数值表示相对桌子中心的半径,用英尺计,第二个角度值代表从上看下去,以桌子的某参考半径为准的逆时针转过的角度值.试求合重量.

答案:$R=63$ lb,向下,$r=0.3$, $\theta=56^\circ$.

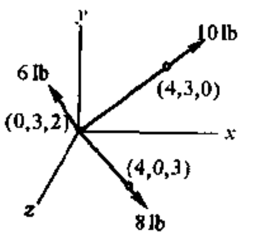


图 4-10

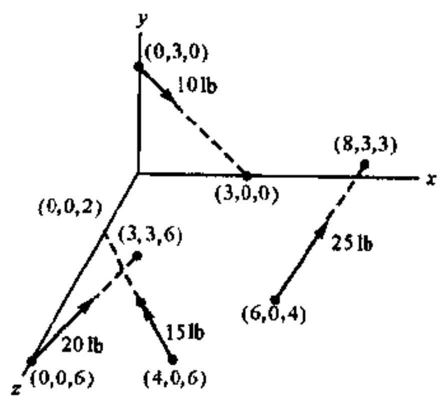


图 4-11

4.16 试求如图 4-11 所示的力系的合成结果.力的单位是磅,长度的单位用英尺.

答案:$R = 40.3$ lb, $\cos\theta_x = +0.594$, $\cos\theta_y = +0.673$, $\cos\theta_z = -0.428$ 在原点, $C = 251$ lb-ft, $\cos\phi_x = -0.660$, $\cos\phi_y = +0.633$, $\cos\phi_z = +0.396$.

4.17 使用矢量矢积的方法,求题 4.4 中 3 个力对原点之矩的矢量合 C.读者应该知道,在求力对力矩中心之矩中,位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 用力矩中心到力作用线上任一点的距离求得.读者应检验选取作用线上的点不止一点.

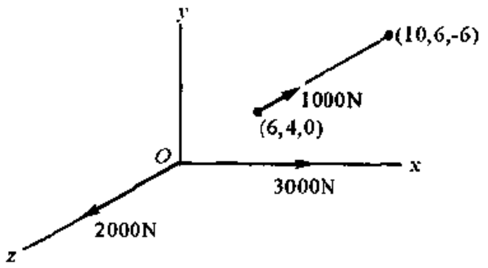


图 4-12

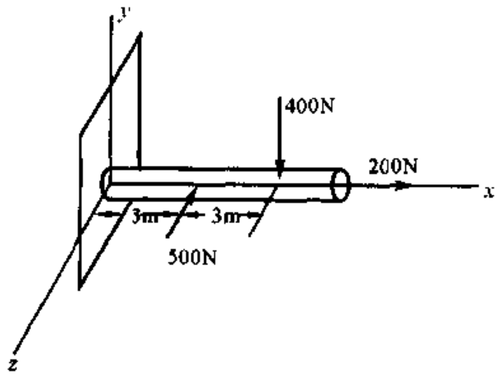


图 4-13

4.18 试求图 4-12 所示 3 力组成的力系的合成结果.坐标以米计.用原点作为基点.

答案:$\boldsymbol{R} = 3530\boldsymbol{i} + 267\boldsymbol{j} + 1200\boldsymbol{k}$ N 过原点, $\boldsymbol{C} = -3200\boldsymbol{i} + 4810\boldsymbol{j} - 534\boldsymbol{k}$ N·m.

4.19 用通过 O 点的合力 $\boldsymbol{R}$ 和一个力偶与图 4-13 所示的 3 个力等效.

答案:$\boldsymbol{R} = 200\boldsymbol{i} - 400\boldsymbol{j} - 500\boldsymbol{k}$ N 或 $\boldsymbol{R} = 671$ N 与 $\cos\phi_x = 0.298$, $\cos\phi_y = -0.597$, $\cos\phi_z = -0.745$; $\boldsymbol{C} = 1500\boldsymbol{i} - 2400\boldsymbol{k}$ N·m 或 $C = 2830$ N·m 与 $\cos\phi_x = 0$, $\cos\phi_y = 0.530$, $\cos\phi_z = -0.848$.

4.20 已知力 $\boldsymbol{F}_1 = 20\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 60\boldsymbol{k}$ lb 作用点$(0, -1, +1)$, $\boldsymbol{F}_2 = 30\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j} - 40\boldsymbol{k}$ lb 作用点$(-1, -1, -1)$和力偶矩 -80 lb-ft 作用在 xy 平面上.试求该力系的合成结果.坐标以英尺计.

答案:$\boldsymbol{R} = 50\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 20\boldsymbol{k}$ lb, $\boldsymbol{C} = 10\boldsymbol{i} - 50\boldsymbol{j} - 50\boldsymbol{k}$ lb-ft.

4.21 用作用在 A 点的合力与力偶等效图 4-14 的力系.(将图 4-14 所示的力系向 A 点简化)

答案:$\boldsymbol{R} = 80\boldsymbol{i} - 100\boldsymbol{j} - 50\boldsymbol{k}$ lb, $\boldsymbol{C} = 100\boldsymbol{i} + 100\boldsymbol{j} - 200\boldsymbol{k}$ lb-ft.

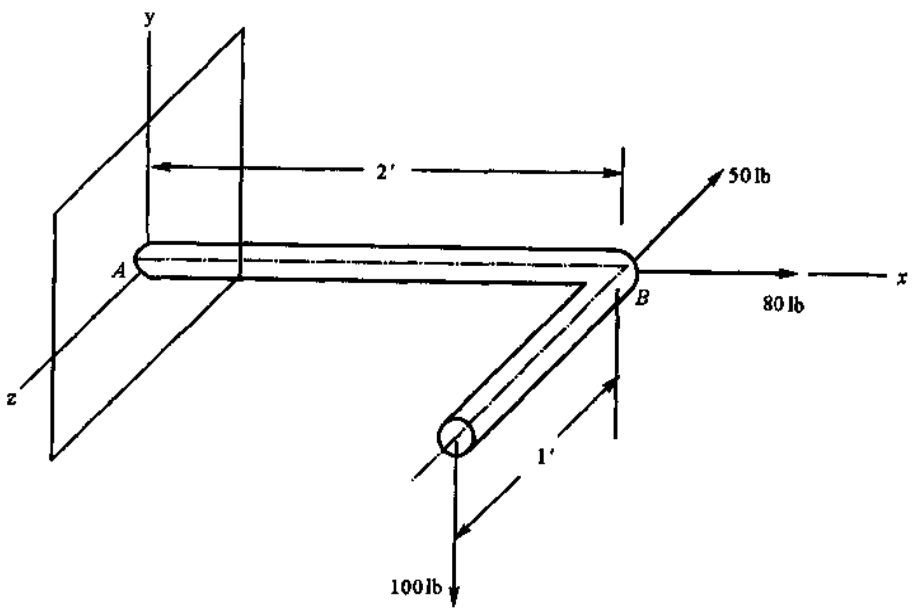


图 4-14

4.22 在题 4.21 中,用简化到 B 点的合力与力偶与原力系等效.(将题 4.21 中的力系向 B 点简化)

答案:$\boldsymbol{R} = 80\boldsymbol{i} - 100\boldsymbol{j} - 50\boldsymbol{k}$ lb, $\boldsymbol{C} = 100\boldsymbol{i}$ lb-ft.

第 5 章　共面力系的平衡

5.1　共面力系的平衡

如果共面力系的合成结果既没有合力矢 $\boldsymbol{R}$，也没有合力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$，则表明共面力系是平衡的.即共面力系平衡的充分必要条件是：$\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都等于零矢量，即

$$R = \sum \boldsymbol{F} = 0 \quad 和 \quad C = \sum \boldsymbol{M} = 0$$

$\sum \boldsymbol{F}$ 是力系中所有力的矢量和；$\sum \boldsymbol{M}$ 是力系中的所有力(对任意点)的力矩的矢量和.

上面的二矢量方程可直接应用，或也可以应用下面的任一种共面力系的代数方程组.

5.2　二力构件

仅受二力作用而处于平衡的构件称为二力构件.二力构件的受力特点是：此二力等值、反向、共线，且二力必沿构件两端的连线.二力构件与其它物体相连时，则作用在该物体上的反力沿着构件两端的连线方向，若端部受到合力作用的构件，而其合力方向没有沿着构件两端的连线方向，则称此构件为三力构件.

5.3　汇交力系

满足下列任何一组平衡方程都能保证汇交力系的平衡；即合力为零.设汇交点为原点.

组	平衡方程	附　注
A	(1) $\sum F_x = 0$	$\sum F_x$ 是力系沿 x 分量的代数和
	(2) $\sum F_y = 0$	$\sum F_y$ 是力系中各力沿 y 轴分量的代数和
B	(1) $\sum F_x = 0$ (2) $\sum M_A = 0$	$\sum M_A$ 是力系中各力对 A 点之矩的代数和，A 点是 y 轴除外的平面上的任意点
C	(1) $\sum M_A = 0$ (2) $\sum M_B = 0$	$\sum M_A$ 和 $\sum M_B$ 是力系中各力关于 A，B 两点之矩的代数和，A，B 也可以是平面上的任意点，但 A 点 B 点与原点不能共线.

如果只有 3 个非平行力作用在同一平面上，并使物体平衡，则此三力一定汇交.

5.4　平行力系

满足下面任何一组平衡方程都能保证平行力系的平衡；即，合成结果既没有力也没有力偶.

组	平衡方程	附　注
A	(1) $\sum F = 0$	$\sum F$ 是平行力系沿其力的作用线方向上各力的代数和
	(2) $\sum M_A = 0$	$\sum M_A$ 是力系中各力对平面上任意点 A 之矩的代数和
B	(1) $\sum M_A = 0$ (2) $\sum M_B = 0$	$\sum M_A$ 和 $\sum M_B$ 是力系中各力对 A，B 点之矩的代数和，A，B 可以选平面上的任意点，但 A，B 两点连线不能与力的作用线平行

5.5　任意力系

满足下面任意一组方程都能保证平面任意力系平衡，即，合成结果既没有力也没有力偶.

组	平衡方程	附　注
A	(1) $\sum F_x = 0$ (2) $\sum F_y = 0$ (3) $\sum M_A = 0$	$\sum F_x$ 是力系中各力沿 x 轴分量的代数和 $\sum F_y$ 是力系中各力沿 y 轴分量的代数和 $\sum M_A$ 是力系中各力对平面上的任意 A 点之矩的代数和
B	(1) $\sum F_x = 0$ (2) $\sum M_B = 0$ (3) $\sum M_A = 0$	$\sum F_x$ 是力系中各力沿 x 轴分量的代数和 $\sum M_A$ 和 $\sum M_B$ 是力系中各力对平面上任意两点 A, B 之矩的代数和，但 A, B 两点连线不能与 x 轴垂直
C	(1) $\sum M_A = 0$ (2) $\sum M_B = 0$ (3) $\sum M_C = 0$	$\sum M_A$, $\sum M_B$, $\sum M_C$ 是力系中各力对平面上任意 3 点 A, B 和 C 点之矩的代数和，但 A, B, C 3 点不能共线.

5.6 附注——隔离体图

在问题的求解中，作以下的辅助注释.

1. 隔离体图. 分析单个物体或物系的受力平衡问题. 将物体(或物系)从周围物体的约束中分离出来，单独画出这个物体(物系)的轮廓图形，并将其受到的外力全部画在图形上. 这样得到的图形称为隔离体图. 这些力包括(a)所有主动力，如作用载荷和重力，(b)所有的约束反力，如地面的支承力、墙、销子、碾子、链条等等反力. 碾子或边缘约束等其反力作用线垂直于物体. 销子连接的反力作用线方向可能是任意角度，它表明其反力的角度是未知，一般使用在同一平面的两个垂直分量用 A_x 和 A_y 表示.
2. 应该注意到，上面提到的如果反力作用的角度是已知的，则假设其沿着作用线方向. 当计算结果是正的表明假设是正确的；如果是负的表明假设的反力方向与实际方向相反.
3. 在求解未知量时，尽量不要联立求解. 如适当地选择力矩中心，使所建方程中只含一个未知量，则可顺利解出.
4. 在上述的对 x, y 轴投影的平衡方程式中，不必选择二轴分别是水平的和铅直的. 因为，如果力系是平衡的，力系中各力沿着任意轴分量值的代数和均等于零.
5. 在隔离体图中，当力的方向、意义十分明显，则标注其大小值.
6. 弹簧中的力的大小等于弹簧的劲度系数 k 与它的伸长量的乘积. 在工程单位制中，k 的单位是lb/in, 因此 $F=[k\ (\text{lb/in})][x\ (\text{in})]=kx\ (\text{lb})$. 在国际单位制中，$k$ 的单位是 N/m 或 N/mm, 则 $F=[k\ (\text{N/m})][x\ (\text{m})]=kx\ (\text{N})$.

例　题

5.1　图 5-1(a)所示的灯，重 25 lb，受链条 AB 和 AC 作用. 求每根链条的张力.

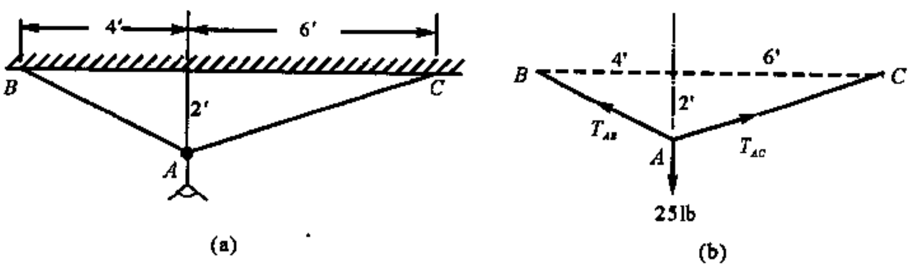


图 5-1

解　☞ 画节点 A 的隔离体图 5-1(b)，A 上作用 25 lb 力(灯的重力)铅直向下和链条的张力 AC 和 AB.

应用汇交力系平衡方程,得到

$$\sum F_x = 0 = + T_{AC}\frac{6}{\sqrt{40}} - T_{AB}\frac{4}{\sqrt{20}} + 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 = + T_{AC}\frac{2}{\sqrt{40}} + T_{AB}\frac{2}{\sqrt{20}} - 25 \tag{2}$$

在两个方程中有两个未知量,则问题可解.

从方程(1)得, $T_{AC} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,T_{AB} = 0.942\,T_{AB}$,代入(2)

$$0.942\,T_{AB}\frac{2}{\sqrt{40}} + T_{AB}\frac{2}{\sqrt{20}} - 25 = 0$$

解出 $T_{AB} = 33.6$ lb 和 $T_{AC} = 0.942\,T_{AB} = 31.7$ lb.

本题也可以使用汇交力系方程组中的 B 组或 C 组平衡方程求解.若选择未知力作用线上的点为矩心,则所建立的平衡方程只含一个未知量.例如,选择 B 点为力矩中心,则

$$\sum M_B = 0 = -25\times 4 + T_{AC}\times\frac{2}{\sqrt{40}}\times 4 + T_{AC}\times\frac{6}{\sqrt{40}}\times 2$$

得

$$T_{AC} = 31.7 \text{ lb}$$

式中 T_{AC}的力矩等于其分量对 B 点之矩.另外,可选择 C 点为矩心,则方程中只包含未知量 T_{AB}.

5.2 在图 5-2(a)中,一碾子重 100 lb,试求水平推力为多大才能使其越过 2 in 的阻碍物.碾子是光滑的.

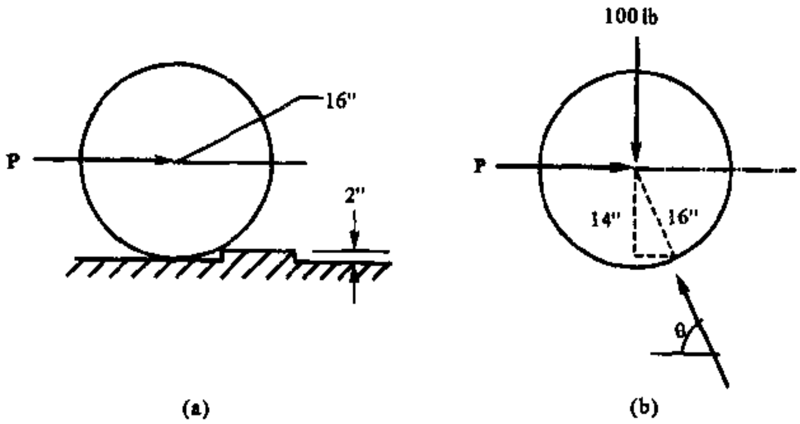


图 5-2

解 ☞ 画隔离体图如图 5-2(b)所示.当碾子开始越向阻碍物的瞬时,地面对碾子的反力为零.阻碍物的角端对碾子的反力为 N,作用在与碾子接触处的表面并指向法线方向,其角度 $\theta = \arcsin\left(\frac{14}{16}\right) = 61°$.则平衡方程式为

$$\sum F_v = N\sin 61° - 100 = 0,\quad N = 114.3 \text{ lb}$$

$$\sum F_h = P - N\cos 61° = 0,\quad P = 55.4 \text{ lb}$$

5.3 如图 5-3(a)所示的起重杆 AC 20 m 长,吊起 1200 kg 的载荷.钢丝 BC 水平且 10 m 长.试求钢丝中的拉力与起重杆受力.

解 ☞ 钢丝和起重机杆都是二力构件.因此钢丝中的力 F 沿着钢丝,起重杆中的力 F_2 沿着起重杆.如图 5-3(b)所示的力的箭头方向表明,钢丝受拉力,起重杆受压力.则

$$AB = \sqrt{(20)^2 - (10)^2} = 17.3 \text{ m},\quad \cos\theta = \frac{17.3}{20} = 0.866$$

对 A 点取矩,所建的平衡方程式中只含一个未知量.即

$$\sum M_A = 0 = +(F_1\times AB) - (11\,760\times 10),\quad 0 = F_1(17.3) - 11760,\quad F_1 = 6800 \text{ N}$$

力沿铅直方向求和.

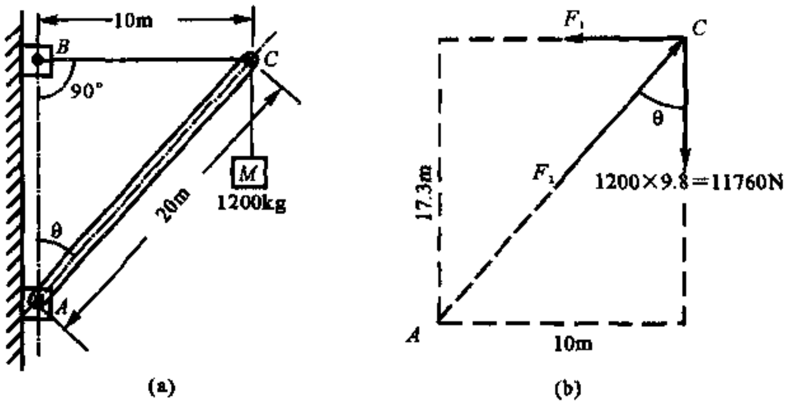


图 5-3

$$\sum F_v = 0 = -11\,760 + F_2\cos\theta, \quad 0 = -11\,760 + 0.866F_2, \quad F_2 = 13\,600\text{ N}$$

5.4 在由构件 AB 和 BC 组成的结构上，作用有水平和铅直力各为 1000 lb，如图 5-4(a)所示．AB、BC 与水平线夹角分别为 θ 角和 β 角．试求 AB、BC 构件中的力．

图 5-4

解 ☞ 在图 5-4(b)的隔离体图中，设 AB 与 BC 构件受压力．则平衡方程是

$$\sum F_x = 0 = (AB)\cos\theta - (BC)\cos\beta + 1000 \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 = (AB)\sin\theta + (BC)\sin\beta - 1000 \tag{2}$$

将 $\cos\theta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$，　$\cos\beta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$，　$\sin\theta = \frac{4}{5}$，　$\sin\beta = \frac{3}{5}$ 代入方程中

$$\frac{3}{5}(AB) - \frac{4}{5}(BC) + 1000 = 0$$

$$\frac{4}{5}(AB) + \frac{3}{5}(BC) - 1000 = 0$$

解出

$$(AB) = 200\text{ lb}\quad（压力）$$

$$(BC) = 1400\text{ lb}\quad（压力）$$

5.5 图 5-5(a)中，杆 AB 重为 10 lb/ft，用钢丝 AC 与销子 B 支撑．试求 B 处反力和钢丝中张力．

解 ☞ 钢丝中的张力沿着钢丝(二力构件)．因为杆 AB 有 3 点受力，所以 AB 杆不是二力构件．在图 5-5(b)的隔离体图中 B 处反力大小与方向未知．由于杆 AB 上作用了 3 个非平行力，所以此三力必汇交于一点，即 D 点，由几何条件 $\theta = 30°$，列写平衡方程为

$$F_x = T\cos30° - R\cos30° = 0$$

$$F_y = T\sin30° + R\sin30° - 120 = 0$$

得到 $T = R = 120$ lb．

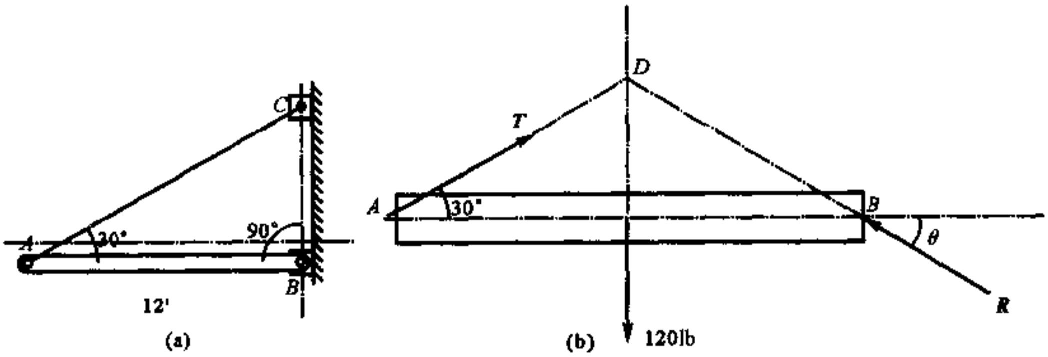


图 5-5

5.6　A 与 B 各重 40 lb 和 30 lb，静止在如图 5-6 所示的光滑平面上. A 与 B 用一根无重绳索连接并跨过一光滑的滑轮上. 试求该系统平衡时，绳中的张力及图示的 θ 角.

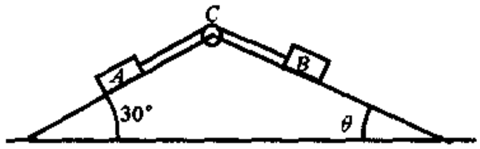


图 5-6

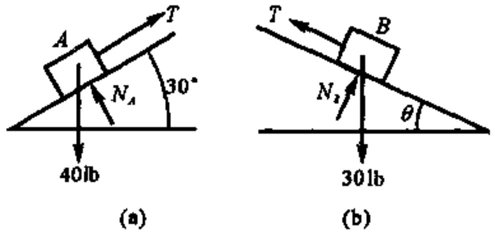


图 5-7

解　画隔离体图如图 5-7(a)和(b).

在图 5-7(b)中有 3 个未知力：T, N_B 和 θ. 因为只有两个独立的平衡方程，所以目前该系统为静不定问题. 不过图 5-7(a)中只含两个未知量，且 T 也出现在图 5-7(b)中，因此，由本系统可求出 T.

将力沿着与 30°平面平行的方向求和，则得到平衡方程为

$$\sum F_{\parallel} = 0 = +T - 40\sin 30^\circ, \qquad 得\ T = 20\ \text{lb}$$

研究图 5-7(b)，仍将力沿着该平面方向求和，得到

$$\sum F_{\parallel} = 0 = +T - 30\sin\theta, \quad \sin\theta = \frac{T}{30} = \frac{2}{3}, \quad \theta = 41.8^\circ$$

5.7　如图 5-8(a)所示的均匀细长杆，质量为 M，作用在重心上，放在具有边缘约束的角上；反力 N 垂直于杆. 左边铅直墙是光滑的. 为保持平衡，角 θ 应是多少？

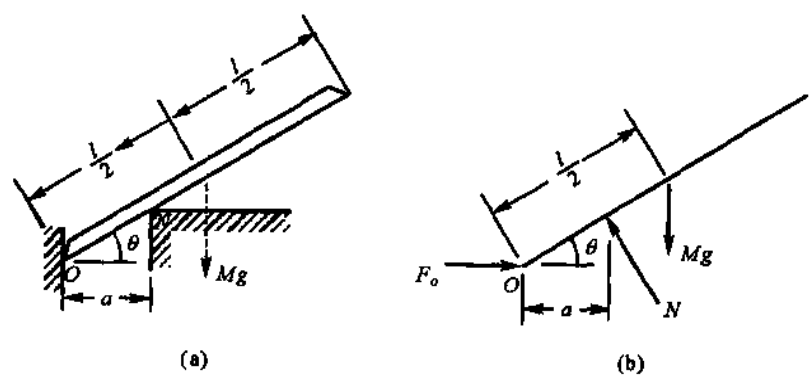


图 5-8

解　隔离体图如图 5-8(b)所示.

对 O 点的力矩之和为

$$\sum M_O = 0 = +N\frac{a}{\cos\theta} - Mg\left(\frac{1}{2}l\cos\theta\right)$$

力在铅直方向求和为

$$\sum F_v = 0 = N\cos\theta - Mg \quad 或 \quad N = \frac{Mg}{\cos\theta}$$

将 $N = \dfrac{Mg}{\cos\theta}$ 代入第一个方程得到

$$\frac{Mga}{\cos^2\theta} - \frac{Mgl\cos\theta}{2} = 0 \quad 则 \quad \cos\theta = \sqrt[3]{\frac{2a}{l}}$$

5.8　无重梁受集中载荷作用，如图 5-9(a)所示. 试求 A，B 两处反力.

(a)　　(b)

图 5-9

解 ☞ 为了求出梁的反力 R_A 和 R_B 如图 5-9(b)所示，可分别对 A，B 两点取矩. 在每一个方程中只含有一个未知量，求反力不需联立方程. 然后用力的求和为零的方程，进行校核. 许多读者喜欢用力矩方程求出一个反力，再用力的求和方程求出另一个反力，当然，这是正确的. 但作者喜欢使用两个力矩方程，而用力和求和方程去校核. 即列出二平衡方程为

$$\sum M_A = 0 = +(125+4) - (200\times 3) - (340\times 10) - (180\times 15) + R_B\times 17$$

$$R_B = 365\ \text{N} \tag{1}$$

$$\sum M_B = 0 = +(125+21) - R_A\times 17 + (200\times 14) + (340\times 7) + (180\times 2)$$

$$R_A = 480\ \text{N} \tag{2}$$

校核，$\sum F = -125 + 480 - 200 - 340 - 180 + 365 = 0$，求和为零，在精度范围之内则梁的反力是正确的.

5.9　如图 5-10 所示的梁上作用有二集中载荷与分布载荷，试求反力.

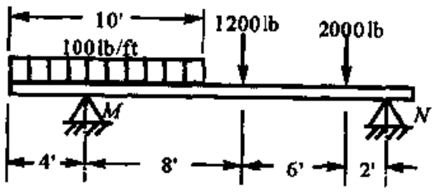


图 5-10

解 ☞ 在隔离体图(图 5-11)中，将 100 lb/ft 的分布载荷用作用在其中点的集中载荷等效，确定梁的反力.

由平衡方程

$$\sum M_M = 16R_N - 100 - (8)(1200) - (14)(2000) = 0,\quad R_N = 2410\ \text{lb}$$

$$\sum M_N = -16R_M + (15)(1000) + (8)(1200) + (2)(2000) = 0,\quad R_M = 1790\ \text{lb}$$

5.10　使用如图 5-12(a)所示的滑轮系统，需用多大的力 P 才能平衡吊住质量为 10 kg 的物块. 设滑轮尺寸相等.

解 ☞ 图 5-12(b)是最底滑轮的隔离体图. 重力 10×9.8 N 向下. 滑轮两边绳子的拉力向上. 因为绳子是连续的，且滑轮无摩擦，因此，滑轮两边其绳中拉力相等. 由铅直方向力求和为零，即 $\sum F_v = 0 = +2T_2 - T_1 = 2T_2 - 49$，因此，得 $T_2 = 24.5$ N.

最后，画最高处滑轮的隔离体图，如图 5-12(d). 由于绳子是连续的，即 $P = T_2$ 或 $P = 24.5$ N.

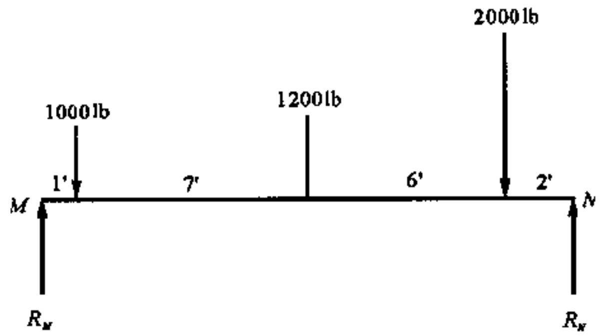


图 5-11

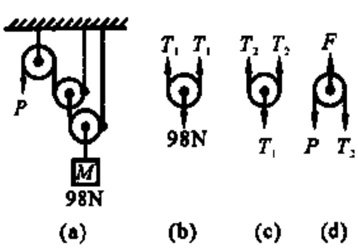


图 5-12

5.11　图 5-13(a)中的刚性梁，A 处用销子支承，B，C 处用弹簧支撑．如果每根弹簧的劲度系数均为 20 lb/in，试求 A 处反力及每根弹簧的拉力．均匀载荷为 20 lb/ft．

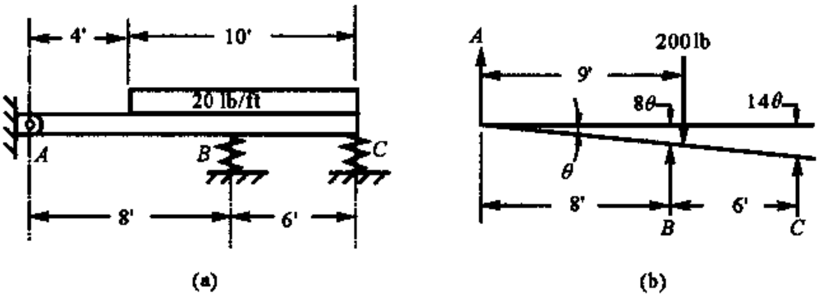


图 5-13

解　如图 5-13(b)所示，设梁转过角度 θ，则弹簧压缩量分别为 8θ 和 14θ，并用英尺计．则 B 点的力为 $8\theta\times12=1920\theta$　lb，C 点的力为 $14\theta\times240=3360\theta$　lb．为了求出 θ，对 A 点的力矩求和，即

$$\sum M_A = 0 = -200\times9 + 1920\theta\times8 + 3360\theta\times14$$

得　0.0288 rad

$$力\ B = 1920\theta = 55.3\ \text{lb},\quad 力\ C = 3360\theta = 96.8\ \text{lb}$$

为了求 A 处反力，使用力在铅直方向求和，如下式

$$\sum F = 0 = A + 55.3 + 96.8 - 200\quad 得\quad A = 47.9\ \text{lb}\ 向上$$

5.12　悬臂梁长 3.8 m，质量均匀分布为 10 kg/m，并在自由端作用有集中载荷 1000 N．梁的另一端插入墙里 0.8 m，求梁 A，B 处的反力是多少？见图 5-14(a)．

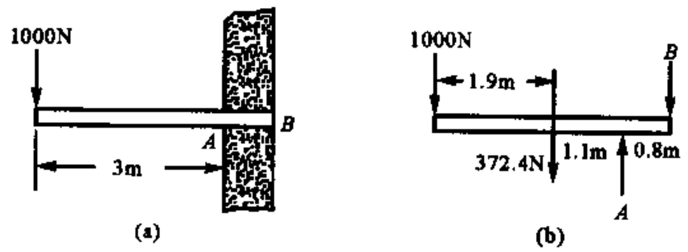


图 5-14

解　设梁弯曲，以使得 A 处反力向上，B 处反力向下．画隔离体图将重力 372.4 N(3.8 m×10 kg/m×9.8 m/s^2)作用在中点．见图 5-14(b)．

为了确定 A 处反力，将力对 B 点之矩求和，得到

$$\sum M_B = 0 = +1000\times3.8 + 372.4\times1.9 - 0.8A,\quad A = 5630\ \text{N}$$

为了确定 B 处反力，将力对 A 点之矩求和，得到

$$\sum M_A = 0 = +1000 \times 3.0 + 372.4 \times 1.1 - 0.8B, \quad B = 4260\ \mathrm{N}$$

5.13 物块 A、B，分别重 400 和 200 lb，静止放在 30°的斜面上，并且用绳子系在与斜面垂直的杆子上，另有一与斜面平行的力 P 作用在杆子[见图 5-15(a)]．设所有接触面光滑，且绳子与斜面平行．试求 P 的值．

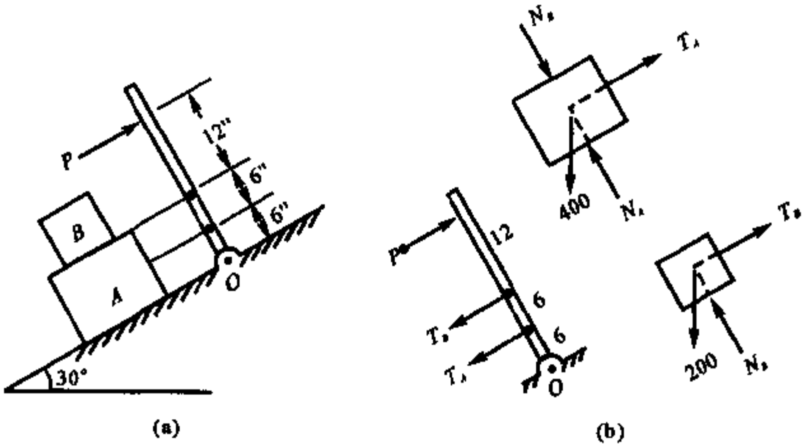


图 5-15

解 ☞ 画 A，B 和杆子的隔离体图如图 5-15(b)所示．对于 A，B 物块，利用力沿斜面平行方向的求和方程，可求出 T_A 和 T_B．即，$T_A = 400\sin 30° = 200$ lb，同样地，$T_B = 100$ lb．

在杆子的隔离体图中，将力对 O 点之矩的求和，得到 $-P\times 24 + T_B\times 12 + T_A\times 6 = 0$，代入 T_A 和 T_B 的值，得到 $P = 100$ lb．

5.14 铅直力 50 N 作用在曲柄的 A 点，如图 5-16(a)所示．为了防止曲柄绕 O 点转动，在 B 点施加一力 P．试求力 P 和铰 O 的反力 R．

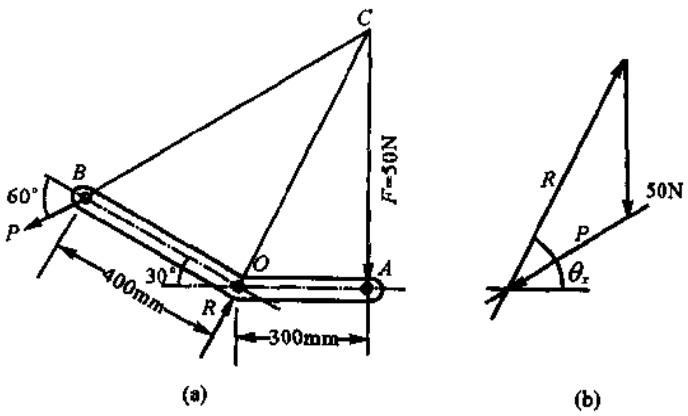


图 5-16

解 ☞ 因为只有 3 个力作用在曲柄上，为保持其平衡，三力一定汇交，即 R 一定过力 F 与 P 的交点 C．

在如图 5-16(b)所示的力三角形中，反力 R 与直线 OC 平行．可测量出力三角形中 $P = 43.0$ N，$R = 80.8$ N 与 $\theta_x = 62.5°$．

5.15 试求如图 5-17(a)中所示的受载荷梁的支反力．载荷用千牛顿(kN)计，略去梁的厚度和质量．

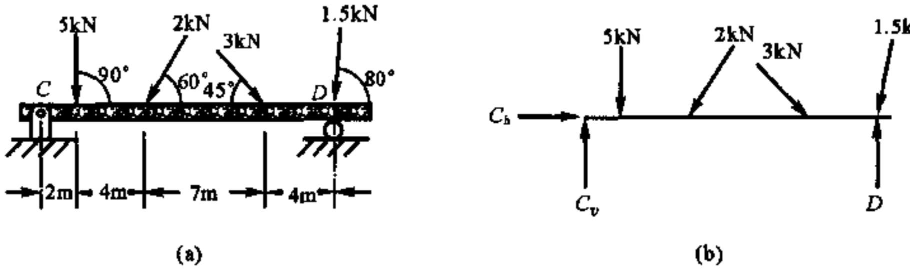


图 5-17

解 ☞ 在隔离体图中,如图 5-17(b),画出销子 C 的水平与铅直的反力分量 C_h 和 C_v,并设为正.滚柱支承 D 的反力沿梁的法向,如图示.

所有力沿水平方向的求和方程中,只有 C_h 一个未知量.即

$$\sum F_h = 0 = C_h - 2\cos60° + 3\cos45° - 1.5\cos80°, \quad C_h = -0.86 \text{ kN}$$

表示 C_h 指向左与假设相反.

为了求 D,让所有的力对 C 点之矩求和,则方程中只包含 D 未知:

$$\sum M_C = 0 = -5\times2 - (2\sin60°)\times6 - (3\sin45°)\times13 - (1.5\sin80°)\times17 + D\times17$$

注意,每个力对 C 点之矩都只等于它的铅直分量对 C 点之矩,因为其水平分量的作用线过 C 点.解力矩方程,得到 $D=4.3$ kN.

为了求 C_v,列出所有力对 D 点之矩求和的方程是最方便的.

$$\sum M_D = 0 = -C_v\times17 + 5\times15 + 2\sin60°\times11 + 3\sin45°\times4, \; C_v = 6.03 \text{ kN}$$

校核 C_v 与 D 的值,可以使用所有在铅直方向的求和方程,因为此方程没有使用过.在这个方程中,将 C_v 的 D 值代入应等于零.

$$\sum F_v = 6.03 - 5 - 2\times0.866 - 3\times0.707 - 1.5 + 4.30 = -0.02$$

误差在问题的精密度之内,校核值足够可靠.

5.16　试求如图 5-18(a)所示的梁 A、B 两点处的反力.

解 ☞ 隔离体图如图 5-18(b)所示.

由平衡方程

$$\sum M_A = 4R - (1)200 - (3)200 + 500 = 0, \quad R_B = 75 \text{ N}$$

$$\sum M_B = -4R + (3)200 + (1)200 + 500 = 0, \quad R_A = 325 \text{ N}$$

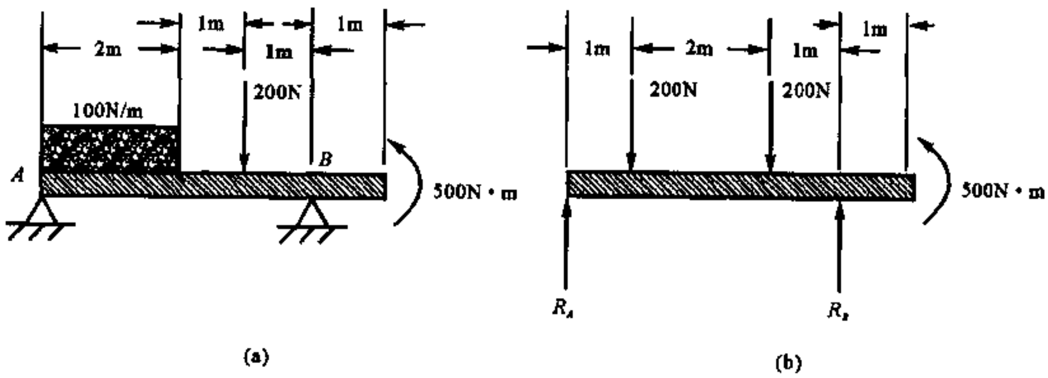


图 5-18

5.17　试求阻止杆子 BC 滑动的钢丝绳 AB 中的拉力.尺寸如图 5-19(a)所示.杆子重 18 lb.假设所有接触面是光滑的.

解 ☞ 图 5-19(b)是隔离体图.由于假设地面无摩擦,R_D 沿杆子法向,R_B 沿地面法向.

首先,建立对 B 点之矩方程,求出 R_D,然后,再由力沿水平方向的求和方程,求出 T.下面列出

方程为

$$\sum M_B = 0 = -18(7\cos 60^\circ) + R_D \frac{10}{\cos 30^\circ}$$

$$\sum F_h = 0 = T - R_D\cos 30^\circ$$

$$= T - 5.46(0.866)$$

解出 $R_D = 5.46$ lb, $T = 4.72$ lb

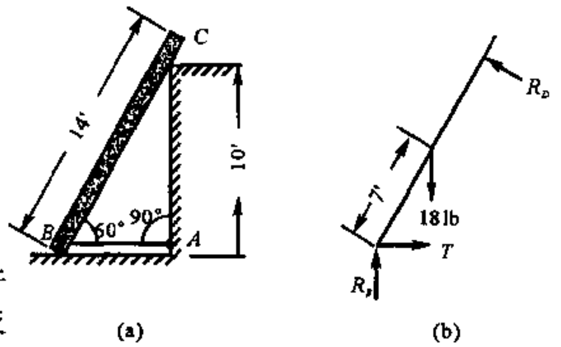


图 5-19

5.18 在如图 5-20(a)所示的 A 字形框架中,试求(1)地面 A,E 点的反力,(2)CE 杆销子 C 的反力,(3)AC 杆销子 B 处反力.设地面是光滑的,略去构件自重.

解 为了确定地面 A,E 两点反力,研究框架整体隔离体图,如图 5-20(b)所示.列对 A,E 点之矩的方程,得到如下结果:

$$\sum M_A = 0 = R_E \times 8.00 - 400 \times (8.00 - 3.54), \quad R_E = 223 \text{ lb}$$

$$\sum M_E = 0 = -R_A \times 8.00 + 400 \times 3.54, \quad R_A = 177 \text{ lb}$$

让力在铅直方向求和等于零进行校核.

在求解第(2)与第(3)问时,画构件 CE 的隔离体图,如图 5-20(c),设 CE 上的销子的反力如图示.在图中有 4 个未知量,但只有 3 个平衡方程是有效的.另一个隔离体图也包含了同样的未知量.画构件 BD 的隔离体图,如图 5-20(d),其中销子 D 的反力与图 5-20(c)中的假设方向相反.

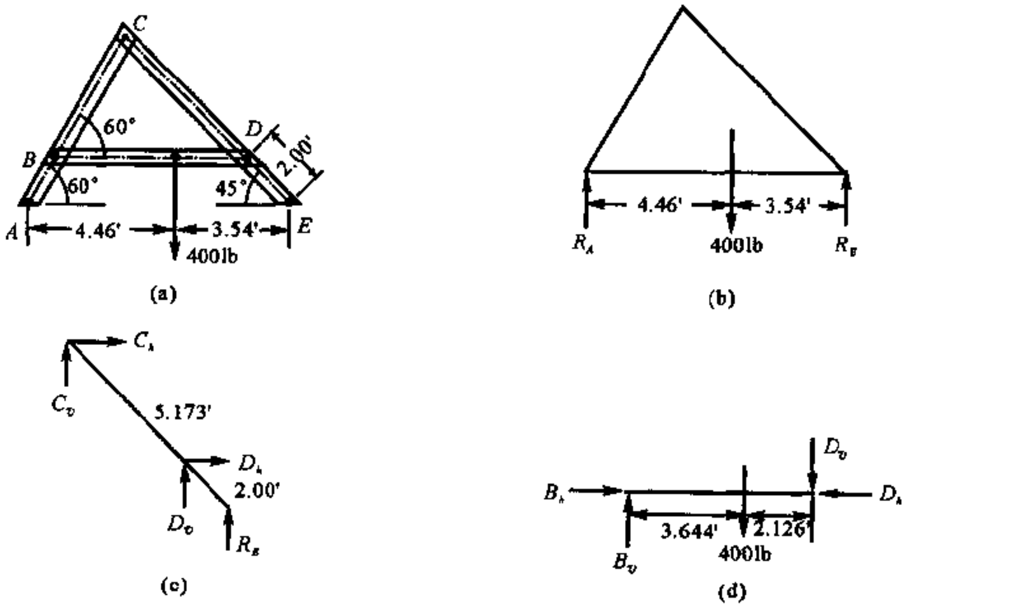


图 5-20

图 5-20(d)中的尺寸 2.126′是 3.54′减去 2.00′在水平方向的投影值.同理,得到其它尺寸条件.对于图 5-20(c)写出如下的平衡方程:

$$\sum F_h = 0 = +C_h + D_h \tag{1}$$

$$\sum F_v = 0 = +C_v + D_v = 223 \tag{2}$$

$$\sum M_D = 0 = +223 \times 2\cos 45^\circ - C_v \times 5.173\cos 45^\circ - C_h \times 5.173\sin 45^\circ \tag{3}$$

由图 5-20(d)写出如下方程:

$$\sum M_B = 0 = -400 \times 3.644 - D_v \times 5.770 \tag{4}$$

$$\sum M_D = 0 = -B_v \times 5.770 + 400 \times 2.126 \tag{5}$$

$$\sum F_h = 0 = +B_h - D_h \tag{6}$$

在求解上述方程中,寻找只含一个未知量的方程.

从(4),得

$$D_v = \frac{-400 \times 3.644}{5.770} = -252.6 \text{ lb}$$

从(5),得

$$B_v = \frac{400 \times 2.126}{5.770} = 147.4 \text{ lb}$$

将 $D_v = -252.6$ lb 代入方程(2)得到 $C_v = -223 - (-252.6) - 29.6$ lb.

将 $C_v = 29.6$ lb 代入方程(3)得到 $C_h = 56.6$ lb.

由方程(6)与(1)得, $B_h = +D_h = +(-C_h) = +(-56.6) = -56.6$ lb.

列出结果,以强调符号:

1. 地面反力

$$R_A = 177 \text{ lb} \quad 向上, \qquad R_E = 223 \text{ lb} \quad 向上$$

2. CE 上 C 销反力.假设作用在 CE 上是正方向.

$$C_h = 56.6 \text{ lb} \quad 向右, \qquad C_v = 29.6 \text{ lb} \quad 向上$$

3. AC 上 B 销反力.在图 5-20(d)中画出了 BD 上 B 销的反力.因此,AC 上 B 销反力方向应与之相反.在 BD 上的反力解出的结果是: $B_h = -56.6$ lb,即向左; $B_v = 147.4$ lb,即向上.因此 AC 上销子的反力是

$$B_h = 56.6 \text{ lb} \quad 向右, \qquad B_v = 147.4 \text{ lb} \quad 向下$$

注:附录 C 中,题 5.18 的计算机计算结果是有效的.

5.19 质量 10 kg 的圆柱体,直径为 1 m,放在夹角 60°的叉形结构中,如图 5-21(a)所示.试求水平绳 DE 的张力,假设地面光滑.

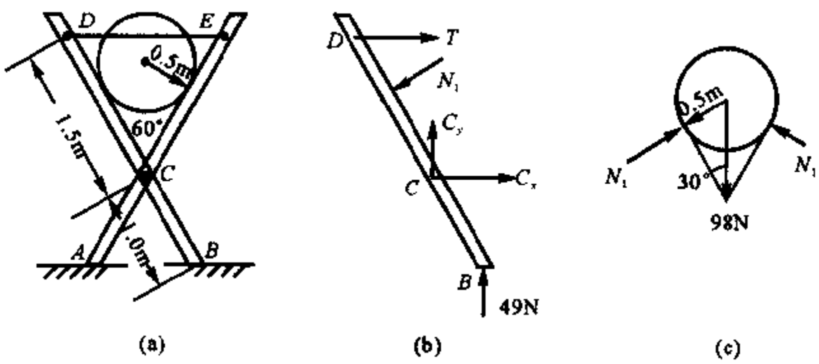


图 5-21

解 研究整体,由于对称性,A,B 反力铅直向上,为 $A = B = 49$ N(重力是 $10 \times 9.8 = 98$ N).

再者,研究臂 DB 的受力如图示,画出绳子中张力 T 和销于 C 反力 C_x 和 C_y[图 5-21(b)].圆柱体的反力 N 与臂垂直.

如果 N_1 已知,则对 C 点取矩,可解出 T.但 N_1 必须由圆柱体的隔离体图[图 5-21(c)]中求出.由几何条件,N_1 一定通过圆柱体中心.建立力沿铅直方向的求和方程,得

$$\sum F_v = 0 = 2N_1 \sin 30° - 98, \quad N_1 = 98 \text{ N}$$

还应注意 N_1 到 C 的垂直距离为 $0.5/(\tan 30°) = 0.866$ m.

回到 BD 臂的隔离体图,列出对 C 点之矩的求和方程,得到

$$\sum M_C = 0 = -T \times 1.5\cos 30° + 98 \times 0.866 + 49 \times 1\sin 30°, \quad T = 84.2 \text{ N}$$

补 充 习 题

5.20 重 100 lb 的重物被绳子系住,吊在天花板上,一水平力拉此重物使之连接的绳子与天花板成 70°的夹角,试求水平力 H 和绳中张力.使用代数法和几何方法求解.

答案: $H = 36.4$ lb, $T = 106$ lb.

5.21　橡皮带原长 8 in，一拉力将之拉成 10 in，如图 5-22 所示．当水平拉力 P 是 6 oz 时，带中张力是多大？
答案：$T=5$ oz.

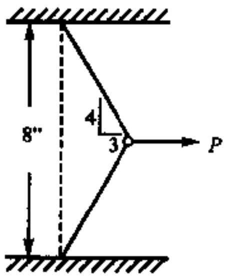


图 5-22

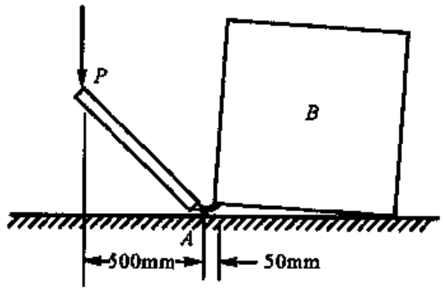


图 5-23

5.22　如图 5-23 所示，一小圆杆在 A 点作为挨棍的支点．抬起箱子 B 的左边需要 1200 N 的力 P；使用同样的挨棍，抬起箱子的右边需要 1000 N 的力．箱子的质量是多少？
答案：$M=2240$ kg.

5.23　如图 5-24 所示，物体 A 重 32.8 lb 静止在光滑地面上，物体 B 重 14.3 lb．试求张力 S_1 和 S_2 及水平地面对 A 的法向反力．
答案：$S_1=12.4$ lb, $S_2=14.3$ lb, $N=25.7$ lb.

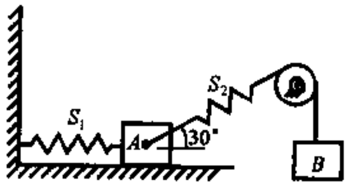


图 5-24

5.24　如图 5-25 所示的基础中的锚栓上，紧系两根牵绳．地基受到多大拉力？
答案：$P=1030$ lb, $\theta_x=135°$.

5.25　三力组成的汇交力系，其三力大小分别为 40，60 和 50 N．此三力相互成多大夹角能组成平衡力系？
答案：97°，138°，125°.

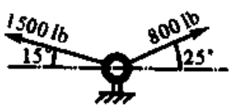


图 5-25

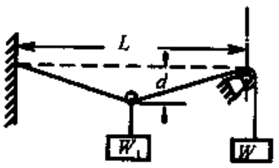


图 5-26

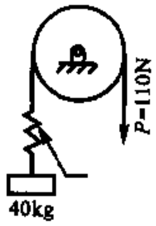


图 5-27

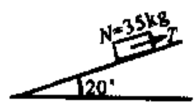


图 5-28

5.26　滑轮系一重物 W_1，并悬在绳上，此绳左端固定，右端跨过滑轮后吊起重物 W（见图 5-26）．左端支撑点到右端滑轮的水平距离为 L．试用 W，W_1 和 L 表示中心高度 d．
答案：$d=\frac{1}{2}L\sqrt{(2W/W_1)^2-1}$.

5.27　如图 5-27 所示系统，静止于地面的质量与地面之间的法向反力是多少？假设滑轮质量与支承的摩擦不计．
答案：$N=282$ N.

5.28　参见图 5-28，与光滑斜面平行的力 T 为多大，才能使具有 $M=35$ kg 质量的物块平衡？
答案：$T=117.6$ N.

5.29　见图 5-29，无重杆 AB 吊挂一重为 80 lb 的重物，且 AB 杆由钢丝 CB 和 A 处的销子支撑．试求钢丝绳中张力及 AB 杆上 A 处销子反力．
答案：$T=197$ lb, $A_x=180$ lb, $A_y=0$ lb.

5.30　在图 5-30 中，质量为 2 kg，直径为 350 mm 的 3 个相同的球，静止放在宽为 760 mm 的箱子里．求 (a) B 对 A 的反力，(b) 壁对 C 的反力，和 (c) 地面对 B 的反力．
答案：(a) 12.1 N 沿其中心连线，(b) 7.09 N 指向左，(c) 29.4 N 向上．

5.31　刚性构件 AB 和 BC 销子连接，并吊挂重 500 lb 的重物，如图 5-31 所示．画销 B 的隔离体图，分别求

AB 和 BC 构件中的力 F_1 和 F_2.

答案：$F_1=433$ lb, $F_2=250$ lb.

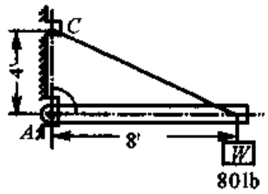


图 5-29

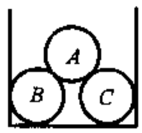


图 5-30

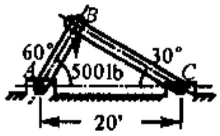


图 5-31

5.32 过中心的水平力多大，才能开始将 20 kg，直径为 1 m 的圆轮越过高 150 mm 的物块？在运动瞬时，轮与地面反力为零.注：轮与物块之间反力通过轮子中心.

答案：$F=200$ N.

5.33 重 339 lb 的碾子如图 5-32 所示，需用多大的 T 力，才能使碾子开始越过物块 A？

答案：$T=403$ lb.

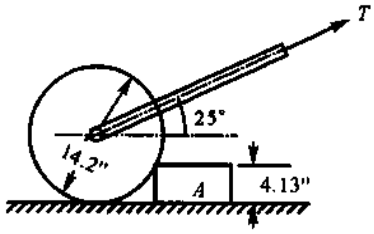


图 5-32

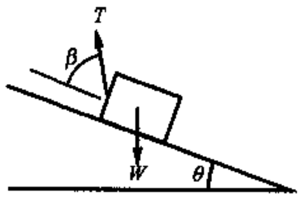


图 5-33

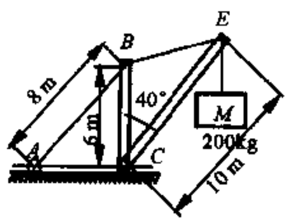


图 5-34

5.34 在图 5-33 中，用符号 θ, β 和 W 表示使物块平衡的力 T，及物块 W 与斜面之间的反力，假设斜面与物块之间无摩擦.

答案：$T=\dfrac{W\sin\theta}{\cos\beta}$, $N=W\dfrac{\cos(\theta+\beta)}{\cos\beta}$.

5.35 在图 5-34 所示的起重机上吊起质量为 200 kg 的 M 块.由销子 E 的隔离体图，求钢丝 BE 中及起重杆 CE 的力.

答案：$BE=2450$ N(拉力)，$CE=3360$ N(压力).

5.36 如果题 5-31 的结构中，其 A, C 是置放在光滑地面上，且 A, C 两端用钢丝连接，试求钢丝绳 AC 中的张力.

答案：$T=217$ lb.

5.37 质量 50 kg 的光滑圆柱体，静止放在互成直角的光滑箱子里.如果箱子斜 45°角，则箱子底部对圆柱体的反力是多少？

答案：693 N.

5.38 12 英尺长的简支梁，在其全长受均布载荷为 220 lb/ft 的力及在其中心处受到顺时针力偶 2000 lb-ft 的作用.试求梁两端的支反力.

答案：$R_L=1033$ lb, $R_R=1367$ lb.

5.39 如图 5-35 所示的梁，受有载荷，试求其支反力.均布载荷为 300 kg/m.略去梁的质量.

答案：$R_A=3540$ N, $R_B=930$ N.

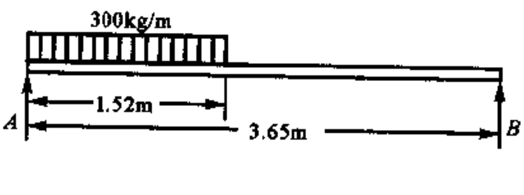


图 5-35

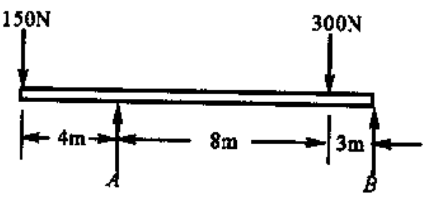


图 5-36

5.40　图 5-36 中的梁，只受二集中载荷，试求其支反力.
答案：$R_A = 286$ N，$R_B = 164$ N.

5.41　图 5-37 所示的杆 A，重 30 lb/ft，长 12 ft. 左端插入墙中 14 in，右端铰接直径为 2 ft、重 40 lb 的滑轮，且绳中张力 T 为 80 lb. 试求杆与墙内的接触点 B，C 的反力.
答案：$R_C = 3910$ lb 向上，$R_B = 3350$ lb 向下.

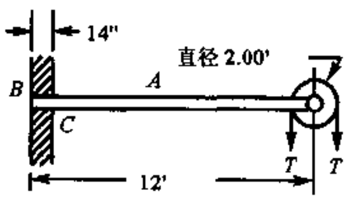


图 5-37

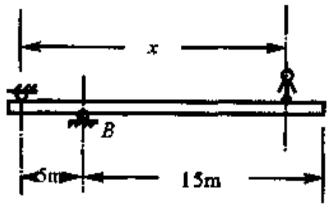


图 5-38

5.42　在图 5-38 中，如果允许 A，B 两处滚筒的力各为 1500 N，试求 80 kg 的人在板上能距 A 点走到多远？不计板重.
答案：$x = 14.6$ m.

5.43　在图 5-39 中，需用多大的 P 力，才能均速吊起质量为 90 kg 的 M.
答案：$P = 441$ N.

5.44　在图 5-40 中，需用多大的 P 力，才能平衡吊住 600 lb 的重物？
答案：$P = 200$ lb.

5.45　在图 5-41 中，上部物块与固定面连接，绳子牢固地套在上部物块的下端，并同时跨过吊有下部物块的滑车轮，然后跨过吊在上部物块的滑车轮和施加 P 力. 当下部物块的底端吊起质量是 50 kg 时，表示平衡的力 P 是 245 N.

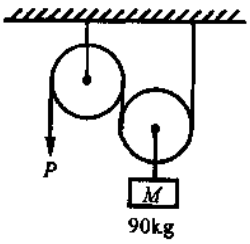


图 5-39

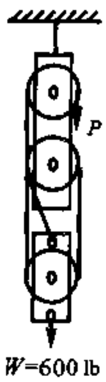


图 5-40

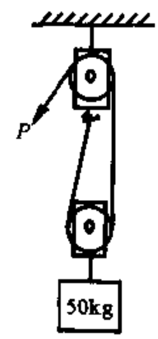


图 5-41

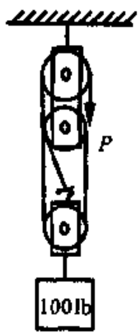


图 5-42

5.46　在图 5-42 中，上面物块上连接两个滑轮，下面物块连接一个滑轮. 绳子紧系在下面物块的上端，然后绕过上面物块中的一个滑轮，接着又绕过下面物块的滑轮，最后绕过上面物块的第二个滑轮，并施加力 P. 当下面物块的低端吊起质量为 100 lb 的重物时，所示平衡的力 P 为 33.3 lb.

5.47　在如图 5-43 所示的杠杆系统中，作用有载荷 80 N. 试求杠杆上 A，B 两点的反力.
答案：$R_A = -71.1$ N，$R_B = +124$ N.

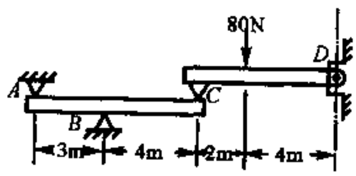


图 5-43

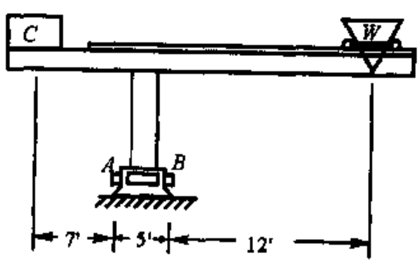


图 5-44

5.48 行走式起重机在轨道上移动的轮子 A 和 B 如图 5-44 所示.起重机重 10 吨,重心在 A 之右端 3 ft,平衡重 C 为 4 吨,重心在 A 之左端 7 ft,吊起重物在 B 点之右 12 ft,试求吊起重物而不致使起重机倾倒的最大值.

答案:$W = 5.67$ 吨.

5.49 质量为 70 kg 的人,用 M 表示.平衡吊住 25 kg 质量的物块,如图 5-45 所示.假设滑轮无摩擦.人站在被两绳 A,B 支撑的平台上.绳 A 中的张力是多少?

答案:$A = 147$ N.

5.50 图 5-46 所示的外伸梁,重 32 lb/ft,并受有均匀分布载荷为 200 lb/ft 和 3 个集中载荷.试求梁的反力.考虑梁的重.

答案:$R_A = 1280$ lb, $R_B = 2440$ lb.

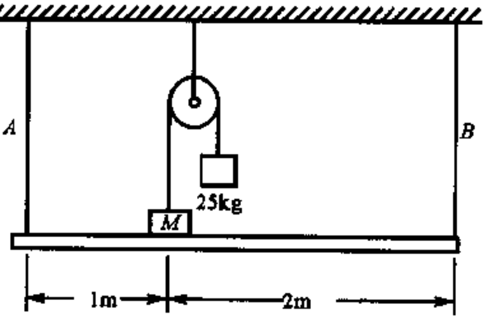


图 5-45

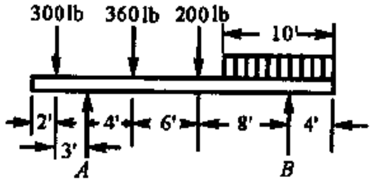


图 5-46

5.51 差动式起重机如图 5-47 所示.上部由两开槽滑轮组成,并与固定面相连.两滑轮直径为 d_1 和 d_2.最底的滑轮直径为 $1/2(d_1 + d_2)$,吊起一重物.连续链条绕过滑轮,如图示.设松弛(上部小滑轮右边的部分链条)无张力.试求施加多大的 P 力,才能使重物 W 开始向上运动.

答案:$P = \frac{1}{2}W(d_2 - d_1)/d_2$.

5.52 在图 5-48 中,AB 是刚性杆,CB 是钢丝,如果 M 为 900 kg,杆 AB 上 A 销反力是多少?绳中张力是多少?

答案:$A_h = 15.3$ kN, $A_v = 8.82$ kN, $T = 15.3$ kN.

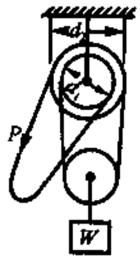


图 5-47

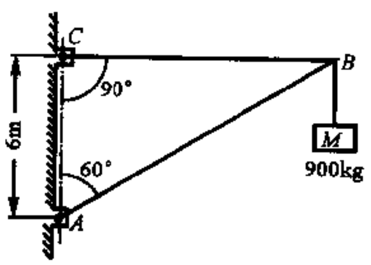


图 5-48

5.53 水平力 F 为 5 lb,作用在锤子上,如图 5-49 所示.设锤子支承在 A 点,多大的力施加在垂直的钉子上,才能将其从水平地面上拔出来?

答案:$P = 15.8$ lb.

5.54 在图 5-50 中,试求保持曲柄平衡的力 P.略去支承点 O 处的摩擦.

答案:$P = 52.2$ N.

5.55 质量为 450 kg 的 M,系在销子 C 上,如图 5-51 所示.试求作用在构件 AC 和 BC 上的力.

答案:$AC = 5880$ N, $BC = 7350$ N.

5.56 如图 5-52 所示,载荷作用在具有等分间隔的梁上.载荷用 kN 计.试求 A,B 处反力.

答案:$A_h = 1.65$ kN, $A_v = 4.60$ kN, $B = 8.71$ kN.

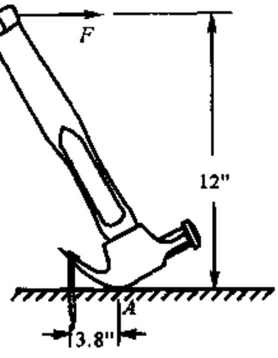


图 5-49

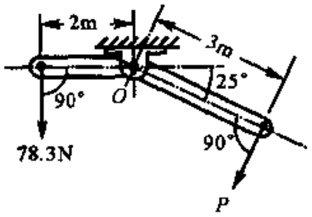


图 5-50

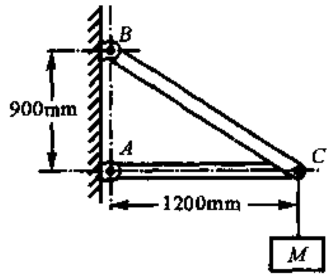


图 5-51

图 5-52

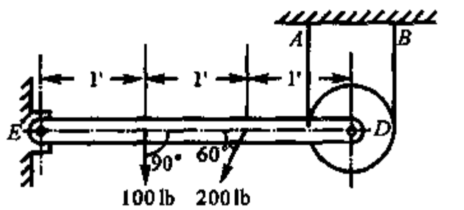


图 5-53

5.57 梁 ED 如图 5-53 所示. 梁与墙在 E 点用销子连接, D 点无摩擦铰接直径为 8 in 的滑轮. 绳绕过滑轮连接在与滑轮水平直径两端垂直的上方 A, B 两点. 求销 E 处反力及绳中张力.

答案: $E=160$ lb, $\theta_x=51°$, $T=74.4$ lb.

5.58 图 5-54 中所示的均质杆 8 ft 长, 重 40 lb. 设地面与铅直墙是光滑的, 试求绳 AC 中张力.

答案: $T=11.55$ lb.

5.59 试求图 5-55 所示托架的 A, B 两处反力.

答案: $B=333$ lb, $A_y=-333$ lb, $A_x=250$ lb.

5.60 参见图 5-56. 试求钢丝 BC 中的张力. 略去 AB 重.

答案: $T=1000$ lb.

5.61 参见图 5-57, 均匀门具有 18 kg 质量, A, B 处铰连接. 试求门上的铰 A, B 处反力. 假设 A, B 两处垂直分量相等.

答案: $A=99.8$ N, $\theta_x=118°$, $B=99.8$ N, $\theta_x=62.1°$.

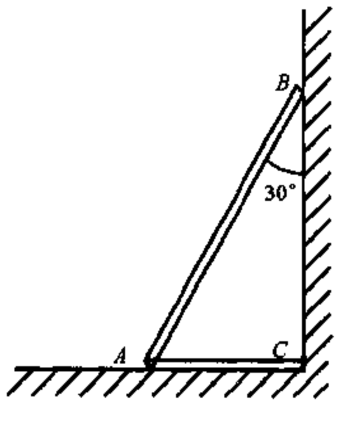


图 5-54

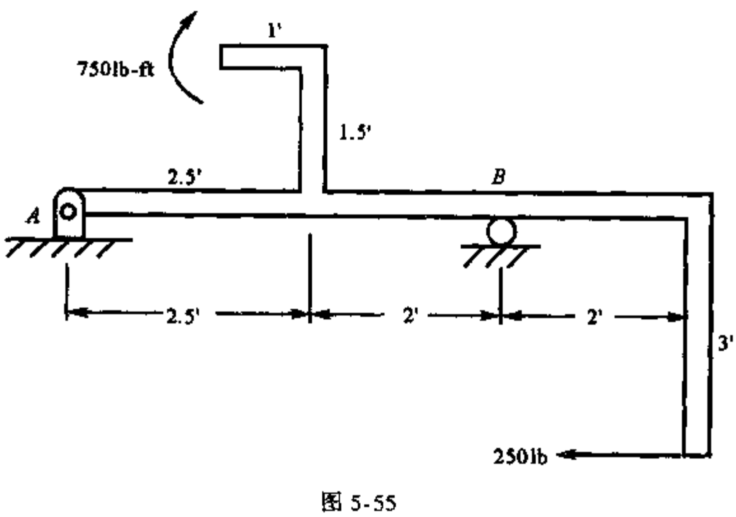


图 5-55

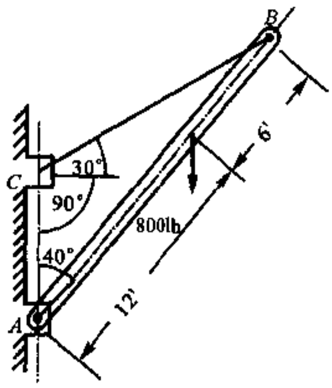


图 5-56

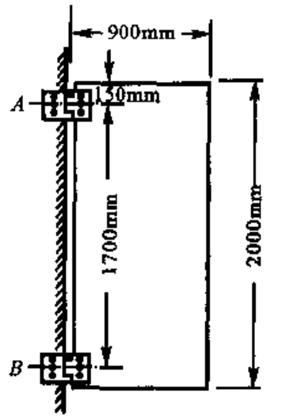


图 5-57

5.62　参见图 5-58，用图示的框架在 F 点，吊起 200 kg 质量．试求(a)DE 上 E 处销子反力，(b)CF 上 C 处销子反力．和(c)AB 在 B 处的地面反力．

答案：(a)$E=6570$ N, $\theta_x=207°$, (b)$C=5960$ N, $\theta_x=189°$, (c)$B_x=2350$ N, $B_y=1960$ N.

5.63　垂直于手钳爪的夹紧力 10 lb，夹紧螺栓 B，如图 5-59 所示．作用于手钳柄上的铅直力 P 多大能提供 10 lb 的夹紧力？

答案：$P=4.07$ lb.

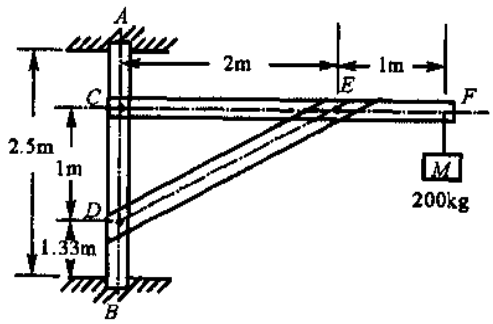


图 5-58

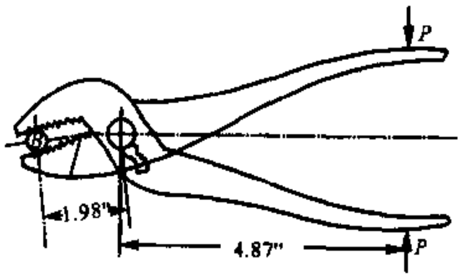


图 5-59

5.64　参见图 5-60，试求框架中 A 销子反力的分量．其中构件 AB 水平，构件 DBC 铅直．所有销连接无摩擦．

答案：$A_x=2730$ N 指向左，$A_y=250$ N 向上．

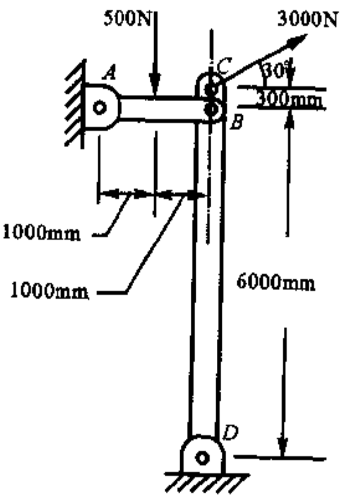


图 5-60

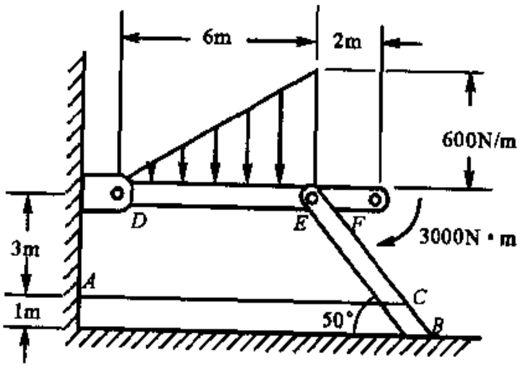


图 5-61

5.65 图 5-61 的框架，在其 8 m 长的构件 DEF 上作用 6 m 长的分布载荷，力偶为 3000 N·m 作用在 DEF 的端部. 试求水平绳 AB 中的张力.

答案：$T = 1900$ N.

5.66 图 5-62 中的框架，由铅直构件 $GFHCB$ 与水平构件 CDE 组成，并用无摩擦的销子连接二滑轮. 滑轮直径均为 400 mm，50 kg 质量的物块被绳子平衡拉住，该绳子绕过二滑轮与二力构件 FD 平行. 绳子 AB 保持整体框架的平衡. 试求 AB 绳中张力 T 和 CDE 上 C 销反力的大小.

答案：$T = 490$ N, $C = 1100$ N.

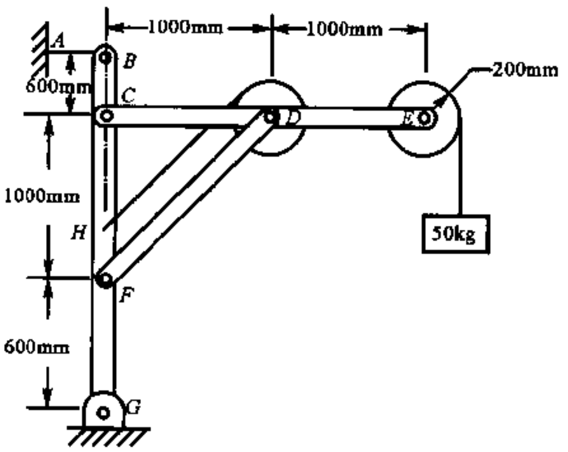


图 5-62

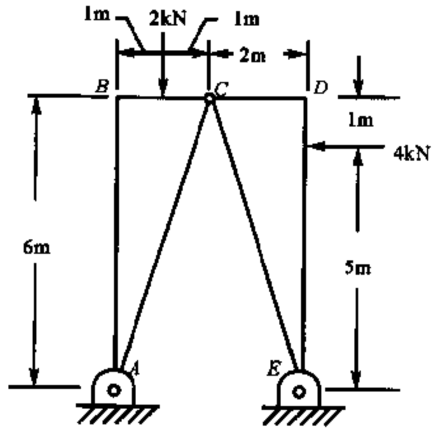


图 5-63

5.67 如图 5-63 所示，两个三角形薄板各有一铅直边和水平顶部. 在 C 点用无摩擦销连接，载荷既有铅直的也有水平的. 试求销子 C 反力的大小.

答案：4.86 kN.

5.68 图 5-64 所示的结构中，试求水平构件 BD 上 B 销反力的大小. 地面光滑结构台座是水平的.

答案：79.4 kN.

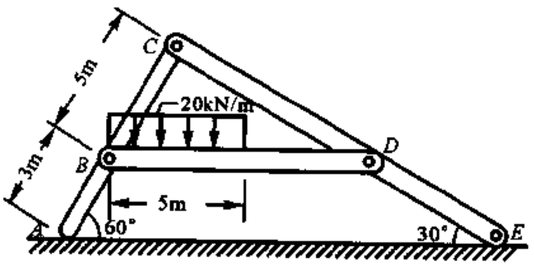


图 5-64

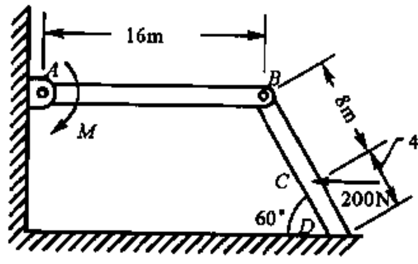


图 5-65

5.69 图 5-65 中，水平力 200 N 作用在斜构件 BCD 上，此构件底座放在光滑的水平面上，上部端点与水平构件 AB 在 B 处销连接. 求作用在构件 AB 上的力偶多大，才能保持系统平衡？并求 B 销反力是多大？

答案：$M = 3700$ N·m, $B = 306$ N.

5.70 试求如图 5-66 所示的受有载荷的水平梁的支反力. 该力系是任意力系.

答案：$A_x = -0.44$ K, $A_y = 2.98$ K,

$B = 6.27$ K.

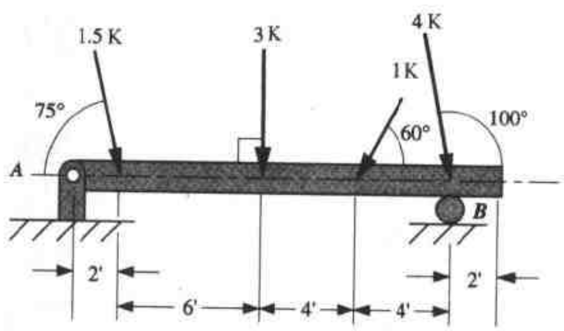


图 5-66

第 6 章　非共面力系的平衡

6.1 非共面力系的平衡

如果非共面力系的合成结果既没有合力矢 $\boldsymbol{R}$，也没有合力偶矩矢 $\boldsymbol{C}$，表明非共面力系是平衡的.即非共面力系平衡的充分必要条件是：$\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 均为零矢量，即

$$\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F}=0 \quad 和 \quad \boldsymbol{C}=\sum \boldsymbol{M}=0$$

$\sum \boldsymbol{F}$ 是力系中所有力的矢量和；$\sum \boldsymbol{M}$ 是力系中的所有力(对任意点)之矩的矢量和.

以上二矢量方程可以直接应用；或者，在简单问题中，可将导数的代数方程用在以下 3 类非共面力系.

6.2 汇交力系

非共面汇交力系平衡的充分必要条件是

$$\sum F_x=0 \tag{1}$$

$$\sum F_y=0 \tag{2}$$

$$\sum F_z=0 \tag{3}$$

$\sum F_x$，$\sum F_y$，$\sum F_z$ 是力系中各力分别沿 x，y，z 轴方向分量的代数和.

可以使用 $\sum M=0$ 代替以上方程中的任一个.例如，如果替代方程(3)，则 $\sum M$ 是力系中各力对于与 z 轴既不平行也不汇交的轴之矩的代数和.

6.3 平行力系

非共面平行力系平衡的充分必要条件是

$$\sum F_y=0 \tag{1}$$

$$\sum M_x=0 \tag{2}$$

$$\sum M_z=0 \tag{3}$$

$\sum F_y$ 是力系中各力沿 y 轴方向投影的代数和，选择 y 轴与力系平行；$\sum M_x$，$\sum M_z$ 是力系中各力分别对 x 和 z 轴之矩的代数和.

6.4 任意力系

空间任意力系平衡的充分必要条件：

$$\sum F_x=0 \tag{1}$$

$$\sum F_y=0 \tag{2}$$

$$\sum F_z=0 \tag{3}$$

$$\sum M_x=0 \tag{4}$$

$$\sum M_y=0 \tag{5}$$

$$\sum M_z=0 \tag{6}$$

$\sum F_x$，$\sum F_y$，$\sum F_z$ 分别是力系中各力在 x，y，z 轴分量的代数和；$\sum M_x$，$\sum M_y$，$\sum M_z$ 分

别是力系中各力对 x,y,z 轴之矩的代数和.

前面研究过的所有力系都是空间任意力系的特殊情形.在这些特殊情形中,不必需要 6 个方程.

例　题

6.1　如图 6-1 所示,一根杆子高 30 ft,在 xy 平面受一绳子作用,此绳系于杆子顶部与水平线夹角为 10°,并在绳上施于 150 lb 的力.二牵绳 OA,OB 固定如图所示.试求每根牵绳的张力及杆子所受的压力.

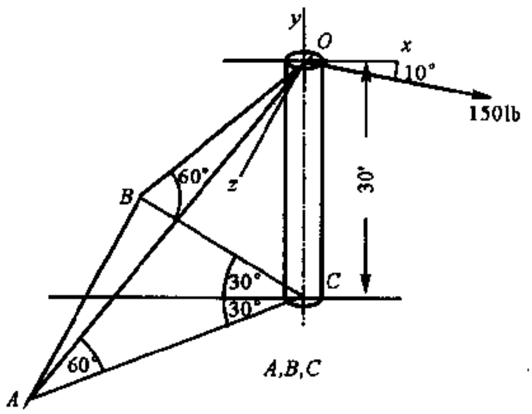


图 6-1

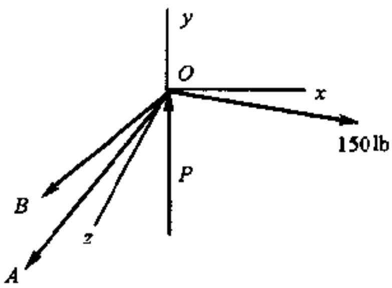


图 6-2

解　因为杆子两端受力,故为二力构件,设沿轴向压力为 P.如隔离体图所示,此为汇交力系(见图 6-2),

$$\sum F_z = 0 = +A\cos60°\sin30° - B\cos60°\sin30° \quad 则\ A = B$$

和

$$\sum F_x = 0 = +150\cos10° - B\cos60°\cos30° - A\cos60°\sin30°$$

用 A 代替 B,解出 $A = 171$ lb 拉力.

为了确定 P,力沿垂直 y 轴方向求和,得

$$\sum F_y = 0 = P - 150\sin10° - 2A\sin60° \quad 则\ P = 322\ \text{lb 压力}$$

6.2　使用 $\sum M_C = 0$,重新求解题 6.1.

解　杆子在如图 6-3 所示 4 个力的作用下处于平衡,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (-A\cos60°\cos30°)\boldsymbol{i} + (-A\sin60°)\boldsymbol{j} + (A\cos60°\sin30°)\boldsymbol{k} \\ &= -0.433A\boldsymbol{i} - 0.866A\boldsymbol{j} + 0.25A\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= (-B\cos60°\cos30°)\boldsymbol{i} + (-B\sin60°)\boldsymbol{j} + (-B\cos60°\sin30°)\boldsymbol{k} \\ &= -0.433B\boldsymbol{i} - 0.866B\boldsymbol{j} - 0.25B\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{C} = C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j} + C_z\boldsymbol{k} \tag{3}$$

$$150\ \text{lb 的力是}: +(150\cos10°)\boldsymbol{i} + (150\sin10°)\boldsymbol{j} = +149\boldsymbol{i} - 25.9\boldsymbol{j} \tag{4}$$

O 关于 C 的位置矢量是:$\boldsymbol{r} = 30\boldsymbol{j}$.即,使用 $\sum M_C = 0$,

$$\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}) = A\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 30 & 0 \\ -0.433 & -0.866 & +0.25 \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 30 & 0 \\ -0.433 & -0.866 & -0.25 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 30 & 0 \\ +149 & -25.9 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式，并重新组合得到

$$(7.5A - 7.5B)\boldsymbol{i} + (0)\boldsymbol{j} + (13A + 13B - 4470)\boldsymbol{k} = 0$$

或者 $7.5A - 7.5B = 0$, $13A + 13B - 4470 = 0$，解出 $A = 171$ lb 拉力，$B = 171$ lb 拉力．

力沿 y 方向求和可解出 C_y，即为杆子的压力：

$$\sum F_y = C_y - 0.866A - 0.866B - 25.9 = 0, \quad 即\ C_y = 322\ \text{lb}$$

对 O 点之矩求和表明，$C_x = C_z = 0$．

6.3　3 根绳子吊挂质量为 6.12 kg 的物块，如图 6-4 所示．AB 和 AC 在 xz 平面，试求张力 T_1, T_2, T_3．

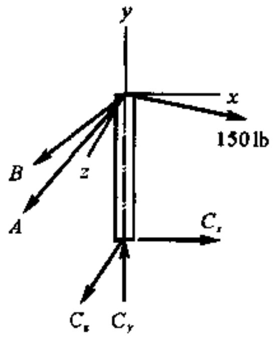


图 6-3

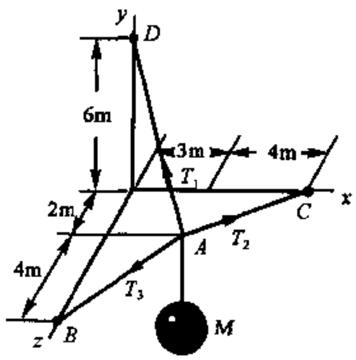


图 6-4

解 ☞

$$AD = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7 \quad AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47 \quad AB = 5$$

首先，列出力沿 y 轴方向求和方程，该方程只含一个未知量，即 T_1．

$$\sum F_y = 0 = -6.12 \times 9.8 + \frac{6}{7}T_1 \quad T_1 = 70\ \text{N}$$

再列出力沿 x, z 方向的求和方程：

$$\sum F_x = 0 = T_2\frac{4}{4.47} - T_3\frac{3}{5} - 70\frac{3}{7}$$

$$\sum F_z = 0 = T_3\frac{4}{5} - T_2\frac{2}{4.47} - 70\frac{2}{7}$$

将 $\sum F_z$ 方程乘以 2，再与 $\sum F_x$ 方程相加，得到 $T_3 = 70$ N，将此值代入 $\sum F_x$ 方程或 $\sum F_z$ 方程，可得到 $T_2 = 80.5$ N．

6.4　求解题 6.3，用单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的分量表示每个力．

解 ☞ 在以下 4 个汇交力的作用下，A 点处于平衡状态．

$$\boldsymbol{T}_1 = -\frac{3}{7}T_1\boldsymbol{i} + \frac{6}{7}T_1\boldsymbol{j} + \frac{2}{7}T_1\boldsymbol{k} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{T}_2 = +\frac{4}{4.47}T_2\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - \frac{2}{4.47}T_2\boldsymbol{k} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{T}_3 = -\frac{3}{5}T_3\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}T_3\boldsymbol{k} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{W} = -6.12 \times 9.8\boldsymbol{j} = -60\boldsymbol{j} \tag{4}$$

则

$$\sum \boldsymbol{F}_y = 0 = \frac{6}{7}T_1\boldsymbol{j} - 60\boldsymbol{j} \quad 或 \quad T_1 = 70\ \text{N}$$

写成矢量形式，$\boldsymbol{T}_1 = -30\boldsymbol{i} + 60\boldsymbol{j} - 20\boldsymbol{k}$

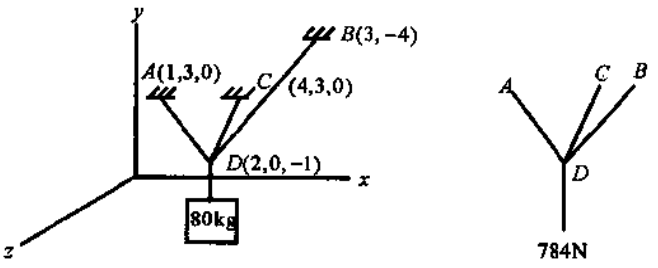
$$\sum \boldsymbol{F}_x = 0 = -\frac{3}{7}T_1\boldsymbol{i} + \frac{4}{4.47}T_2\boldsymbol{i} - \frac{3}{5}T_3\boldsymbol{i}$$

$$\sum \boldsymbol{F}_z = 0 = -\frac{2}{7}T_1\boldsymbol{k} - \frac{2}{4.47}T_2\boldsymbol{k} + \frac{4}{5}T_3\boldsymbol{k}$$

或者 $\left(\frac{4}{4.47}\right)T_2 - \left(\frac{3}{5}\right)T_3 = \left(\frac{3}{7}\right)T_1 = 30$, $-\left(\frac{2}{4.47}\right)T_2 + \left(\frac{4}{5}\right)T_3 = \left(\frac{2}{7}\right)T_1 = 20$,

联立解出 $T_2=80.5$ N, $T_3=70.0$ N.

6.5 在图 6-5(a)中,3 根绳子在汇交点 $D(2,\ 0,\ -1)$,吊起一质量为 80 kg 的物块.3 根绳子的另一端悬挂点分别为 $A(1,\ 3,\ 0)$,$B(3,\ 3,\ -4)$和 $C(4,\ 3,\ 0)$,坐标以米计.试求悬挂 C 点绳中张力.



(a) (b)

图 6-5

解 ☞ 利用力系中各力对直线 AB 之矩求和等于零的方程,可以很容易地求出 DC 绳中的张力.因为 DA 与 DB 绳中张力与 AB 直线相交,所以方程中此二张力在力矩方程中的力矩为零,只有 DC 绳中的力与重力(80×9.8 N 与 $\boldsymbol{j}$ 方向相反)对 AB 直线之矩.

隔离体图 6-5(b),表示了所有作用在 D 点的力.DC 绳中张力可以写成

$$\boldsymbol{C}=C\frac{(4-2)\boldsymbol{i}+(3-0)\boldsymbol{j}+[0-(-1)]\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(+1)^2}}=C\frac{2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}$$

为了求力系关于对直线 AB 之矩求和,我们首先应求出沿该直线的单位矢量,即

$$\boldsymbol{e}_{AB}=\frac{(3-1)\boldsymbol{i}+(3-3)\boldsymbol{j}+(-4-0)\boldsymbol{k}}{\sqrt{20}}=\frac{\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}}{\sqrt{5}}$$

应该求出 C 处张力与重力对直线 AB 上任一点的矩.让我们选择点 A.二力的位置矢量选择从 A 到 D,即

$$\boldsymbol{r}_{AD}=(2-1)\boldsymbol{i}+(0-3)\boldsymbol{j}+(-1-0)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

二力之矩之和为,

$$\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\+1&-3&-1\\0&-784&0\end{vmatrix}+\frac{C}{\sqrt{14}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\+1&-3&-1\\+2&+3&+1\end{vmatrix}$$

$$=-1\times784\boldsymbol{i}-784\boldsymbol{k}+\frac{C}{\sqrt{14}}(0\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})$$

最后得到

$$\boldsymbol{e}_{AB}\cdot\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=0$$

即

$$\frac{\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}}{\sqrt{5}}(-1\times784\boldsymbol{i}-784\boldsymbol{k})+\frac{\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}}{\sqrt{5}}\left(\frac{C}{\sqrt{14}}\right)(-3\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})$$

$$=-1\times784\sqrt{5}+\frac{2\times784}{\sqrt{5}}-\frac{18C}{\sqrt{5}\times\sqrt{14}}=0$$

则 $C=163$ N.

读者也可以通过选择 AB 上的 B 点为力矩中心,也可以得到相同的结果.

6.6 将重 200 lb 的物块从直径为 4 ft 的洞中提出.3 根绳子系在重物上;由 3 人以相等的间距站在洞边拉重物.当重物离洞口 4 ft 时,每根绳中的拉力是多少?假设(a)每人的拉力大小相等,(b)重物位于洞口中间,并且(c)每人握的绳子通过边缘.

解 ☞ 3 个拉力的铅直分量一定等于重物之重量 200 lb,即 $3T\cos\theta=200$ lb,θ 是绳与通过重物铅直线的夹角.即

$$\theta = \arctan \frac{2}{4} = 26.6° \quad 则 \quad T = 74.5\ \mathrm{lb}$$

6.7 如图 6-6 所示的系统，受到位于 xy 平面的水平力 P 为 100 N 的作用. 试求系统中各力.

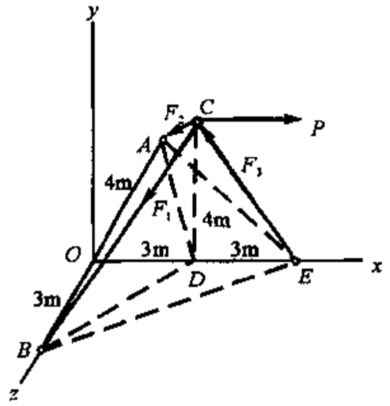


图 6-6

解 ☞ 计算得到 $CE=5, BC=\sqrt{34}, AC=\sqrt{41}$ m.

设 3 个非共面力 F_1, F_2, F_3 方向如图示.

由力系沿 z 轴平行方向投影的代数和，得到 F_1 和 F_2 之间的关系；再由力系对直线 AB 之矩求和方程，求得 F_3；最后由力系沿 x 轴平行方向投影的代数和，得到 F_1 和 F_2 之间的关系. 即

$$\sum F_z = 0 = + \frac{3}{\sqrt{34}}F_1 - \frac{4}{\sqrt{41}}F_2 \tag{1}$$

$$\sum M_z = 0 = + \frac{4}{5}F_3 \times 6 - 100 \times 4 \tag{2}$$

$$\sum F_x = 0 = + 100 - \frac{3}{5}F_3 - \frac{3}{\sqrt{34}}F_1 - \frac{3}{\sqrt{41}}F_2 \tag{3}$$

结果为 $F_1=55.6$ N 拉力，$F_2=45.7$ N 拉力，$F_3=$ 83.3 N 压力.

6.8 使用矢量表示法求解题 6.7.

解 ☞ 4 个力由其假设方向表示如下：

$$\boldsymbol{F}_1 = -\frac{3}{\sqrt{34}}F_1\boldsymbol{i} - \frac{4}{\sqrt{34}}F_1\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{34}}F_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\frac{3}{\sqrt{41}}F_2\boldsymbol{i} - \frac{4}{\sqrt{41}}F_2\boldsymbol{j} - \frac{4}{\sqrt{41}}F_2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}_3 = -\frac{3}{5}F_3\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}F_3\boldsymbol{j} + 0$$

$$\boldsymbol{P} = 100\ \boldsymbol{i}$$

由于力系平衡，所以力沿 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 三方向分量之和分别为零：

$$-\frac{3}{\sqrt{34}}F_1 - \frac{3}{\sqrt{41}}F_2 - \frac{3}{5}F_3 + 100 = 0$$

$$-\frac{4}{\sqrt{34}}F_1 - \frac{4}{\sqrt{41}}F_2 + \frac{4}{5}F_3 = 0$$

$$+\frac{3}{\sqrt{34}}F_1 - \frac{4}{\sqrt{41}}F_2 = 0$$

三方程联立解出 $F_1=55.6$ N(如假设为拉力)，$F_2=45.7$ N(如假设为拉力)，$F_3=83.3$ N(如假设为压力).

注意：在附录 C 中，计算机解出的题 6.8 是可靠的.

6.9 一张桌子 600×600 mm，有 3 条腿，4 个载荷作用，如图 6-7 所示. 试求 3 处反力. 因为平行力系只有 3 个方程是独立的，因此结构只有 3 处支撑是必要的.

解 ☞ 利用平行力系的 3 个平衡方程，即

$$\sum F_y = 0 = R_1 + R_2 + R_3 - 20 - 30 - 10 - 50 \tag{1}$$

$$\sum M_x = 0 = -R_1 \times 600 - R_2 \times 600 + 20 \times 500 + 30 \times 300 + 50 \times 500 + 10 \times 200 \tag{2}$$

$$\sum M_z = 0 = +R_2 \times 600 + R_3 \times 600 - 20 \times 200 - 50 \times 400 - 10 \times 400 - 30 \times 200 \tag{3}$$

化简为

$$R_1 + R_2 + R_3 = 110 \tag{1′}$$

$$R_1 + R_2 = 76.7 \tag{2′}$$

$$R_2 + R_3 = 56.7 \tag{3′}$$

将 $R_1+R_2=76.7$ 代入方程(1′)，得到 $76.7+R_3=110$，得 $R_3=33.3$ N.

将 $R_2+R_3=56.7$ 代入方程(1′)，得到 $R_1+56.7=110$，得 $R_1=53.3$ N.

最后，从方程(1′)，得 $R_2 = 110 - R_1 - R_3 = 23.4$ N.

注意：另一种解法是，力系分别对 R_1R_2 和 R_2R_3 之桌子边缘取矩求和，得到 R_3 和 R_1.

6.10 一根曲轴在平行于 z 轴方向上受到拉力 F_1 和 F_3 作用，在平行于 y 轴方向上受到力 F_2 和 F_4 作用，见图 6-8，如果每个拉力大小相等，A，B 两处轴承反力是多少？

解 ☞ 轴承反力假设沿 y，z 轴的正方向，列平衡方程为：

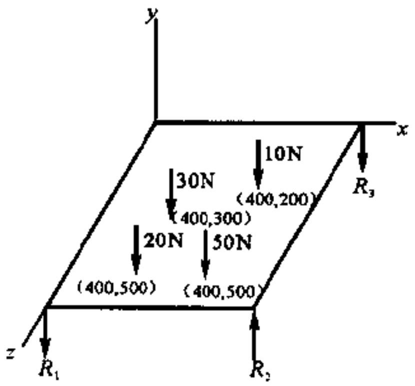


图 6-7

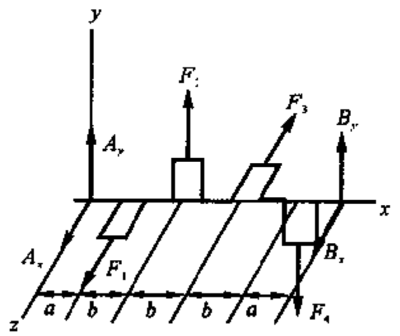


图 6-8

$$\sum M_z = 0 = + F_2(a + b) - F_4(a + 3b) + B_y(2a + 3b) \quad (1)$$

$$\sum M_y = 0 = - F_1(a) + F_3(a + 2b) - B_z(2a + 3b) \quad (2)$$

$$\sum M_{Bz} = 0 = - A_y(2a + 3b) - F_2(a + 2b) + F_4(a) \quad (3)$$

$$\sum M_{By} = 0 = + A_z(2a + 3b) + F_1(a + 3b) - F_3(a + b) \quad (4)$$

实际上力 F_s 是不相等的．如果假设 F_s 相等，则

$$B_y = \frac{2b}{2a + 3b}F,\quad B_z = \frac{2b}{2a + 3b}F,\quad A_y = \frac{-2b}{2a + 3b}F,\quad A_z = \frac{-2b}{2a + 3b}F$$

分量 A_z 和 A_y 前面的负号表明其实际方向应分别是向左和向下．B 处与 A 处的合反力应该平行，且大小相等，方向相反，形成力偶．因为 F_1，F_3 和 F_2，F_4 当假设其大小相等时即形成力偶．

6.11 设矩形自动门重 60 lb，宽 3 ft，高 4 ft，重心在其几何中心(见图 6-9)．门打开 45°，风载荷 50 lb 作用在门的几何中心，并与门垂直．门把手距离底边 28 in，右边 3 in．把手上的力 P 作用在与门垂直的水平面内，其作用线与门垂直直线的夹角 20°，试问此力多大，才能保持门的打开状态？并求 A，B 处铰反力为多少？选择 x 轴与门底边重合．假设最低铰 B 承担了全部铅直载荷，即 $A_y = 0$.

解 ☞ 铰链反力的分量(设为正)如图 6-9 所示．力 P 的二分量如图所示，一个与门垂直，一个与门平行．

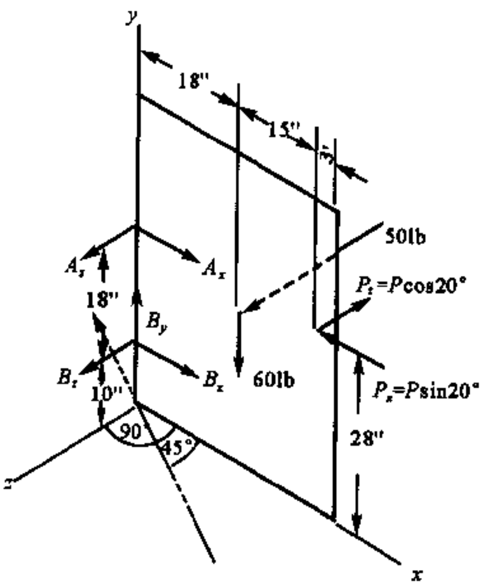


图 6-9

在力系对 y 轴之矩求和方程中，只含未知量 P_z，所以 P 可以解出．

力系沿 z 轴方向求和方程中，含未知量 A_z 和 B_z，而力系对于 x 轴之矩求和的方程中仍含 A_z 和 B_z，可联立解出．

再由力系对于 z 轴之矩求和方程及沿 x 轴方向求和方程，解出 A_x 和 B_x.

力系沿铅直方向求和方程中，只含 B_y，可解．则方程如下：

$$\sum M_y = 0 = -50 \times 18 + P_z \times 33 \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 = A_z + B_z + 50 - P_z \quad (2)$$

$$\sum M_x = 0 = +A_z \times 28 + B_z \times 10 + 50 \times 24 - P_z \times 28 \quad (3)$$

$$\sum M_z = 0 = -B_x + P_x \times 28 - 60 \times 18 - A_x \times 28 \quad (4)$$

$$\sum F_z = 0 = A_x + B_x - P_x \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0 = B_y - 60 \quad (6)$$

从方程(1), $P_z = (50 \times 18)/33 = 27.3$ lb. 由 $P\cos30° = P_z = 27.3$ lb, 即 $P = 29.1$ lb. 将 $P_z = 27.3$ lb 代入方程(2)和(3), 得

$$A_z + B_z = -50 + 27.3 \quad (2')$$

$$28A_z + 10B_z = -1200 + 765 \quad (3')$$

联立解方程(2′)和(3′), 得到 $A_z = -11.6$ lb, $B_z = -11.1$ lb. 再代入方程(4)和(5)中, 得到

$$10B_x + 28(29.1 \times 0.342) - 28A_x = 1080 \quad (4')$$

$$A_x + B_x - 29.1 \times 0.342 = 0 \quad (5')$$

联立解方程(4′)和(5′)得到 $A_x = -50$ lb, $B_x = +60$ lb. 从方程(6)得 $B_y = 60$ lb.

6.12　均质杆 BC 长 10 m, 质量 1 kg. B 端靠在光滑的墙上, C 端放在光滑的地面上(见图 6-10). 试求维持杆平衡的绳 AB 和 DC 中的张力. 在图 6-10 中 BC 与 x 轴垂直, AB 在 yz 平面中.

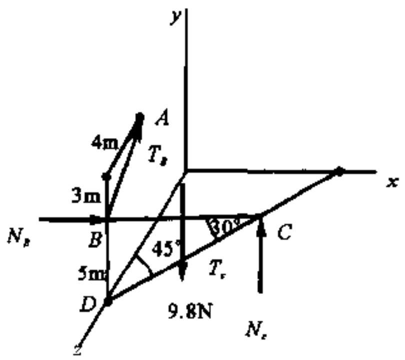


图 6-10

解 ☞ 在杆的隔离体图上, 画上墙与地面的法向反力 N_B 和 N_C, 建立如下的平衡方程:

$$\sum F_x = 0 = N_B - T_C\cos45° \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = T_B \times \frac{3}{5} - 9.8 + N_C \quad (2)$$

$$\sum M_z = 0 = -9.8 \times 5\cos30°\cos45° + N_C \times 9.8\cos30°\cos45° - N_B \times 5 \quad (3)$$

3 个平衡方程中包含了 4 个未知量, 因此不能解出未知量. 不过, 力系对于沿平面 BCD 垂直的方向投影之和为零的方程中, 只包含了与此平面垂直的两个分量(N_B 和 T_B), 即 $T_B \times \frac{4}{5} \times \cos45° = N_B\cos45°$, 化简为 $T_B = \frac{4}{5} = N_B$.

将此值代入方程(2), 得到 $N_C = 9.8 - \frac{3}{4}N_B$; 再代入方程(3), 得到 $N_B = 3.03N$, 则 $T_B = \frac{4}{5} \times 3.03N = 3.79$ N.

由方程(1), 得 $T_C = 3.03/0.707 = 4.29$ N.

6.13　图 6-11(a)所示是卷扬机的两个视图. 轴承无摩擦. 垂直于曲柄的力 P 多大, 才能吊起图示状态中的 200 lb 的物块? 并求轴承 A, B 处反力.

解 ☞ 如图 6-11(b)所示的卷扬机的隔离体图上, 作用了所有的力. 因为在卷扬机轴的方向上无力作用, 因此轴承反力也没有 x 方向的分量.

力系对 x 轴之矩: $\sum M_x = 0 = -P \times 12 + 200 \times 5$, 得 $P = 83.3$ lb.

为了求轴承反力, 列出以下 4 个方程为

$$\sum M_y = 0 = -B_z \times 36 + P\cos25° \times 48 \quad (1)$$

$$\sum M_z = 0 = -200 \times 20 + B_y \times 36 - P\sin25° \times 48 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 = A_y - 200 + B_y - P\sin25° \quad (3)$$

$$\sum F_z = 0 = A_z + B_z - P\cos25° \quad (4)$$

将力 P(83.3 lb)分解成分量为 $P\cos 25°$ 和 $P\sin 25°$,分别沿 z 和 y 轴.这样,力 P 对于 y 轴之矩只有它的 z 轴方向分量关于 y 轴之矩不为零,而 y 轴方向分量与 y 轴平行,故无矩.

由方程(1),得 $B_z=101$ lb;由方程(2),得 $B_y=158$ lb.

将 B_y,B_z 和 P 代入方程(3)和(4),得 $A_y=77.2$ lb,$A_z=-25.5$ lb.

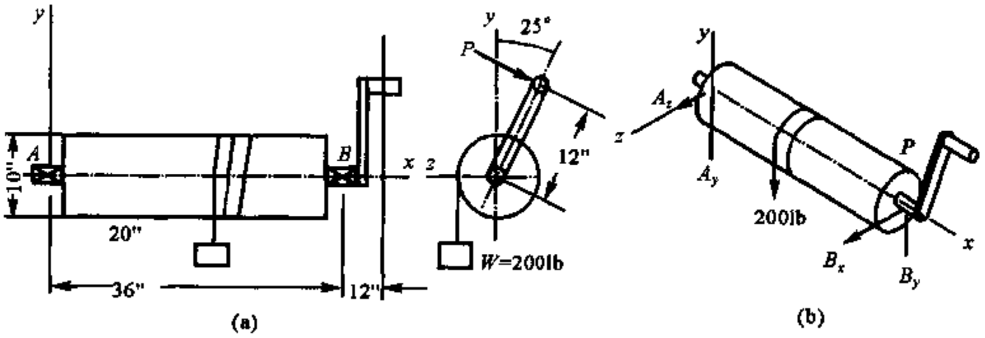


图 6-11

6.14 试求如图 6-12(a)所示的水平轴上的轴承 A,B 处反力.轮盘与轴固连.大轮盘上载荷水平,小轮盘上载荷铅直.

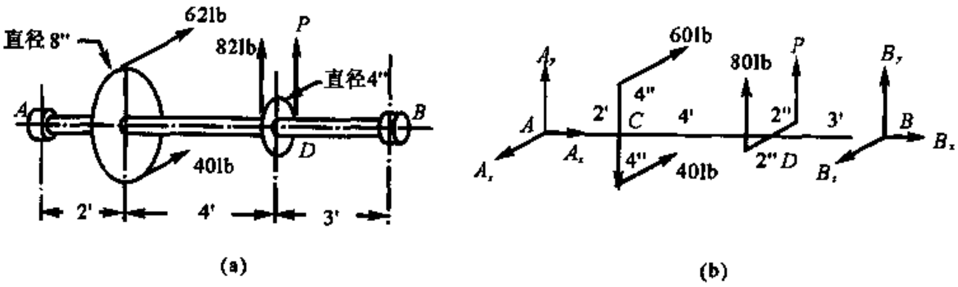


图 6-12

解 图 6-12(b)是简化轴的隔离体图,为了确定 P,求力系对 x 轴之矩的和,得

$$P\times 2-80\times 2+40\times 4-60\times 4=0,\quad \text{即 } P=120\text{ lb}$$

因为在 x 方向上无外加载荷,所以 $A_x=B_x=0$. 由力系对于 A_z 方向轴之矩求和,得

$$80\times 6+120\times 6+B_y\times 9=0$$

则

$$B_y=-133.3\text{ lb}$$

力系对于 B_z 方向轴之矩求和为

$$-80\times 3-120\times 3-A_y\times 90=0$$

得到

$$A_y=-66.7\text{ lb}$$

作为校核,将 A_y 与 B_y 求和为 200 lb 向下,正好等于作用在小轮上作用的两个向上的外载荷.

为了求 B_z,将力系对于 A_y 方向轴之矩求和,得

$$-6\times 2-40\times 2+B_z\times 9=0$$

得到

$$B_z=+22.2\text{ lb 指向前}$$

为了确定 A_z,将力系对于 B_y 方向轴之矩求和,得

$$-60\times 7+40\times 7-A_z\times 9=0$$

则有

$$A_z=77.8\text{ lb 向前}$$

作为校核,将 A_z 与 B_z 求和得 100 lb 向前,正好等于作用在大轮盘上两个向后的力.

6.15 图 6-13 中，梁 EF 重 10 lb/ft，并且在末端受有载荷 138 lb. 梁 EF 在 E 处为球铰连接，并用二绳 AB 和 CD 固定. 试求绳 AB 和 CD 中张力及 E 处的约束反力.

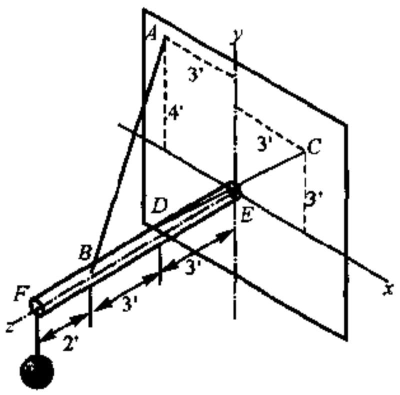


图 6-13

解 选 x, y 和 z 轴如图 6-13 所示. 由于梁 EF 平衡，选择 $\sum M_E = 0$ 和 $\sum F = 0$.

作用在系统中的力如下：

(1) 重物 W 重 138 lb 铅直向下，写为 $-138j$；

(2) 梁的重力为 8×10 lb，写为 $-80j$；

(3) 球铰反力为 $E_x i + E_y j + E_z k$；

(4) 绳 AB 中张力写为 $A_x i + A_y j + A_z k$，其中

$$A_x = A\cos\theta_x = -\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2+6^2}}A = -\frac{3}{\sqrt{6}}A = -0.384A$$

$$A_y = A\cos\theta_y = +\frac{4}{\sqrt{61}}A = +0.512A$$

$$A_z = A\cos\theta_z = -\frac{6}{\sqrt{61}}A = -0.768A$$

用每个分量符号确定假设的绳 AB 中张力，即作用在梁 EF 上从 B 点指向 A 点的拉力，分别沿 x 轴负方向，y 轴正方向和 z 轴负方向.

(5) CD 绳中张力写成 $C_x i + C_y j + C_z k$，其中

$$C_x = C\cos\theta_x = +\frac{3}{\sqrt{3^2+3^2+3^2}}C = +\frac{3}{\sqrt{27}}C = +0.577C$$

$$C_y = C\cos\theta_y = +\frac{3}{\sqrt{27}}C = +0.577C$$

$$C_z = C\cos\theta_z = -\frac{3}{\sqrt{27}}C = -0.577C$$

综合写出 5 个力及从点 E 到位置矢量作用线的点坐标为

(1′) $-138j$ 在(0, 0, 8)

(2′) $-80j$ 在(0, 0, 4)

(3′) $E_x i + E_y j + E_z k$ 在(0, 0, 0)

(4′) $-0.384Ai + 0.512Aj - 0.768Ak$ 在(0, 0, 6)

(5′) $+0.577Ci + 0.577Cj - 0.577Ck$ 在(0, 0, 3)

5 个力对 E 点之矩求和等于零矢量. 利用每个从点(0, 0, 0)到上面所列出的力矢量的点所得到的位置矢量，得到

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -138 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -80 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ -0.384A & +0.512A & -0.768A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 3 \\ 0.577C & 0.577C & -0.577C \end{vmatrix} = 0$$

即 $8(138)i + 4(80)i + [-6(0.512A)i - 6(0.384A)j] + [-3(0.577C)i + 3(0.577C)j] = 0$

令 i 前系数为零和 j 前系数为零，得到

$$1424 - 3.072A - 1.731C = 0 \quad 和 \quad -2.304A + 1.731C = 0$$

解出 $A = 265$ lb 和 $C = 353$ lb. 因此，有

$$A = -0.384(265)i + 0.512(265)j - 0.768(265)k = -102i + 136j - 204k$$

$$C = 0.577(353)i + 0.577(353)j - 0.577(353)k = 204i + 204j - 204k$$

为了求销子反力，令 $\sum F = 0$ 方程中，i, j 和 k 前面的系数分别等于零，得到

$$E_x - 102 + 204 = 0, \quad -138 - 80 + E_y + 136 + 204 = 0, \quad E_z - 204 - 204 = 0$$

解出：$E_x = -102$ lb,　$E_y = -122$ lb,　$E_z = +408$ lb.

补充习题

6.16　在图 6-14 中,由压杆 CD 和两个拉杆 AC 和 BC 组成的结构,吊起一质量为 30 kg 的物体.CD 与墙的夹角 40°,A,B 点和 C 点在水平面内,$AE = EB = 1000$ mm.求 AC,BC 和 CD 中的力.
答案:$AC = BC = 143$ N 拉力,$CD = 384$ N 压力.

6.17　在图 6-15 中,起重机由起重杆 BE,支柱 BD(铅直)和 3 根绳子 AD,CD,DE 组成.A,B 和 C 点在水平面内,包含 BD,BE 和 DE 的平面平分 AC.试求 AD,CD 和 BD 中的力.
提示:首先研究包含 DE 中力的 E 点这一平面汇交力系.然后研究 D 点空间汇交力系.
答案:$AD = CD = 2910$ lb 拉力,$BD = 2970$ lb 压力.

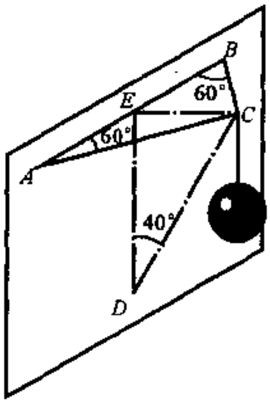


图 6-14

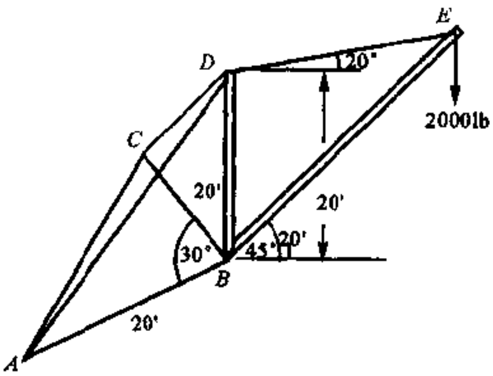


图 6-15

6.18　在图 6-16 所示中,一水平拉力 400 N 作用在杆子的顶部.杆子被两根牵绳 AD 和 CD 固定而平衡,A,B 和 C 在水平地面上.试求 AD 和 CD 所受的力.
答案:$AD = 366$ N 拉力,$CD = 293$ 拉力.

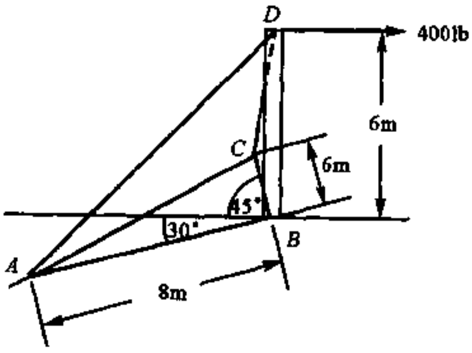


图 6-16

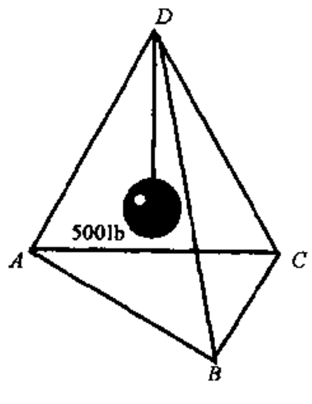


图 6-17

6.19　质量为 2 kg 的电视摄影机放在三脚架上,与三脚架的 3 支脚等空间距离摆放,并使各腿与铅直线夹角为 18°.设该力系汇交于距地面之上 1200 mm 的点,试求每根腿所受的力.
答案:$C = 6.87$ N.

6.20　如图 6-17 所示,重 500 lb 的物体吊在具有等长腿的三角架中,每根腿与绳的角度为 30°.A,B 和 C 水平面内并形成一等边三角形.试求每根腿所受的力.
答案:$AD = BC = CD = 192$ lb 压力.

6.21　在 6-18 所示图中,具有直径为 1800 mm 的圆桌,受到载荷 400 N 作用在过支承点反力 R_1 的直径上,并距中心 300 mm 与 R_1 方向相反.R_1,R_2 和 R_3 等距离.试求它们的大小.
答案:$R_1 = 44$ N,$R_2 = 178$ N,$R_3 = 178$ N.

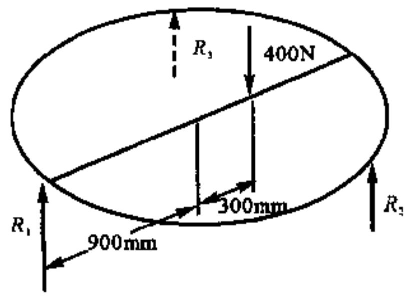


图 6-18

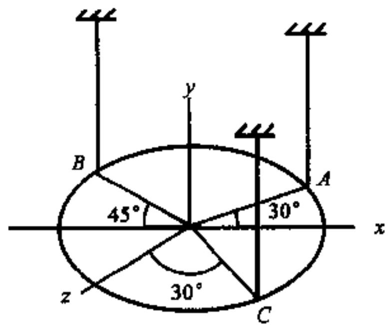


图 6-19

6.22　见图 6-19,如果每根绳中最大允许强度为 3500 lb.试求半径为 5 ft 的均质圆盘的允许重量.

答案:7800 lb.

6.23　图 6-20 的三角形板,受有 140 N 载荷,且载荷作用在左顶角 1200 mm 的角平分线上.T_1, T_2 和 T_3 是铅直绳中的拉力,其值是多少?

答案:$T_1 = 41.0$ N, $T_2 = T_3 = 49.5$ N.

6.24　均质立方体重 W,在其角上被 6 根弹簧支撑,如图 6-21 所示.每根弹簧与其作用平面垂直,即在箱子边上.试求维持箱子平衡的每根弹簧中的拉力.

答案:$T = \frac{W}{2}$.

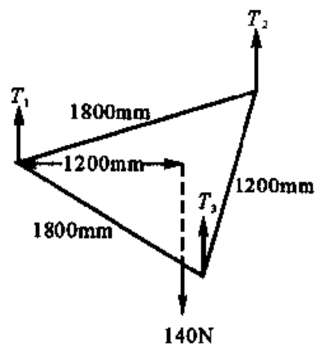


图 6-20

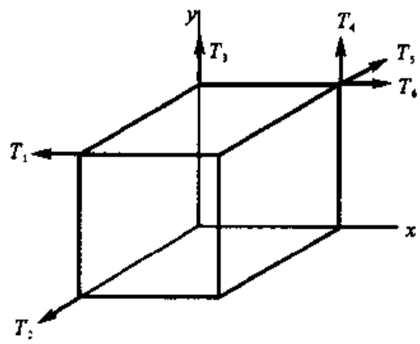


图 6-21

6.25　见图 6-22.设马达重 500 lb,重心在纵向中心线上是前面全长的 $\frac{5}{8}$.如果基础宽 22 in,长 34 in,R_R 作用在基础底边的中点处,支撑反力是多少?

答案:$R_F = 94$ lb, $R_R = 312$ lb.

6.26　见图 6-23,铅直轴重 40 lb,连接两个轮盘 B 和 D,分别重 12 lb 和 9 lb.轮盘 B 直径 16 in,D 直径 12 in.15 lb 和 60 lb 的拉力与 x 轴平行,20 lb 的拉力和 P 与 z 轴平行.轴承 C 和立式止推轴承 A 为无摩擦.试求力 P 和轴承 A, C 处反力.

答案:$P = 80$ lb, $A_x = 50$ lb, $A_y = 61$ lb, $A_z = -33$ lb, $C_x = 25$ lb, $C_z = 133$ lb, $C_y = 0$.

6.27　图 6-24 所示的简单起重机中,CH 铅直,GD 水平,AC 和 BC 为二牵绳.点 A 和 B 与由 CH, DG 和 EF 组成的平面等距离.重物 $W = 4000$ lb,试求 AC 中拉力及 H 处反力.

答案:$AC = 2590$ lb 拉力, $H_x = 2800$ lb, $H_y = 8040$ lb, $H_z = 0$.

6.28　铅直杆受 620 N 力,该力作用在 yz 平面中与水平线成 15°角.拉绳 AB 和 AC 系在 xy 平面中,杆子在插座中,见图 6-25.每根绳中张力是多少?

答案:$T_{AB} = T_{AC} = 689$ N.

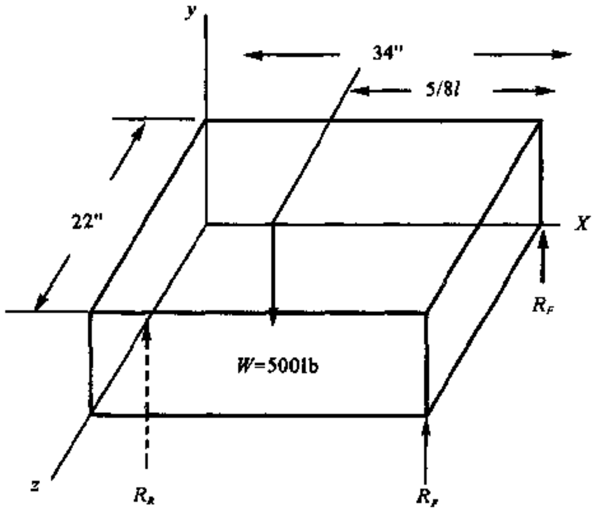


图 6-22

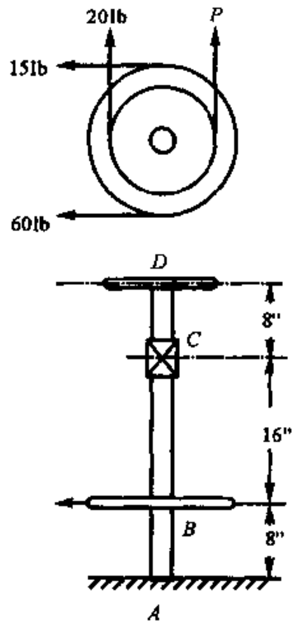


图 6-23

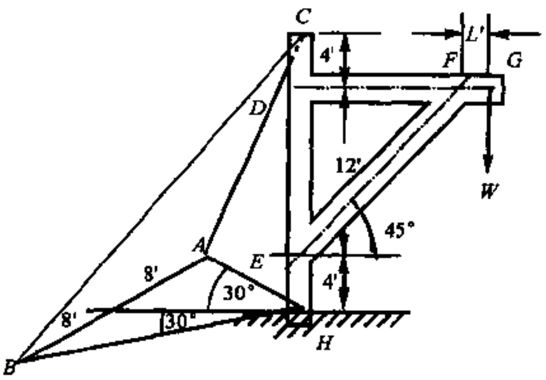


图 6-24

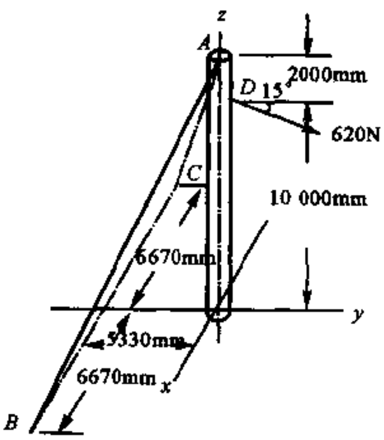


图 6-25

6.29　均质活板门重 96 lb. 求需用多大的绳子张力 T, 使门维持在 26°角的位置, 如图 6-26 所示. A, B 处铰反力是多少? 设滑轮 D 在铅直 z 轴上.

答案: $T = 52.4$ lb, $A_x + B_x = -28.8$ lb, $A_y = +30.0$ lb, $A_z = +30.7$ lb, $B_y = -4.3$ lb, $B_z = +29.9$ lb.

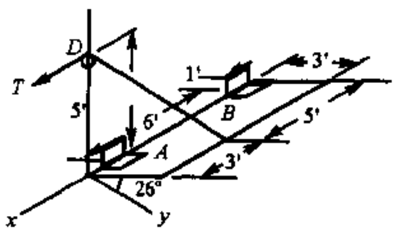


图 6-26

6.30　图 6-27 所示的起重杆 EF 不计质量, 在 E 处销子连接, 并被绳 AB 和 CD 拉住. 试求二绳中之张力及销 E 的反力.

答案: AB 中张力 = 9020 N, DC 中张力 = 5590 N, $E_x = -1600$ N, $E_y = 8600$ N, $E_z = -3630$ N.

6.31　如图 6-28 所示, 门用搭板焊接在轴 EB 上. 轴 EB 支承在轴承 A 和 B 上, 并在端部安装一齿轮 E. 水平力 F 作用在齿轮 E 的最底点(没表示). 设均质门重 30 lb. 试求当角 $\alpha = 58°$时, 力 F 和轴承反力.

答案: $F = 71.5$ lb, $A_x = -89.5$ lb, $A_y = 15$ lb, $A_z = 0$, $B_x = 17.9$ lb, $B_y = 15$ lb, $B_z = 0$.

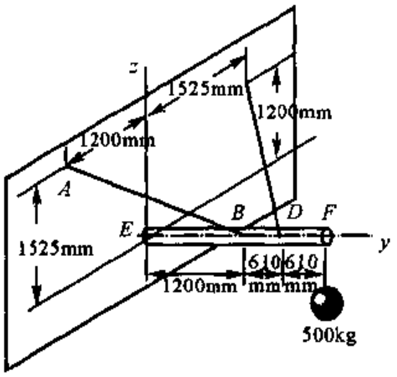


图 6-27

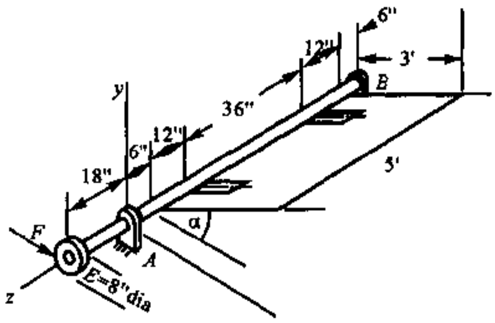


图 6-28

6.32 设 $\alpha = 32^{\circ}$,重新求解题 6.31.

答案:$F = 114.5$ lb, $A_x = -143.1$ lb, $A_y = 15$ lb, $A_z = 0$, $B_x = 28.6$ lb, $B_y = 15$ lb, $B_z = 0$.

6.33 在题 6.30 中,如果每根绳中最大的强度是 8000 N,则在 F 点最大的允许质量是多少?

答案:$M = 443$ kg.

第 7 章　桁架和悬索

7.1　桁架和悬索

这些是共面力系平衡的例子(见第 5 章).

7.2　桁架

假设

1. 假设桁架是由位于同一平面的刚性构件组成.意指属于平面力系的范围.
2. 略去构件自重.因为自重与载荷相比很小,故略去.
3. 在构件中,力通过光滑销子从一个构件传递给另一个构件上.这些构件被称为二力构件,不是受压便是受拉.

节点法

使用这种方法,要画桁架中销子的隔离体图,而该节点上作用的未知力不能多于二个.原因是节点上作用的力系为汇交力系,只有两个方程在求解中有效.使用节点法,一般应依次从一个销子到另一个销子研究,直到所有的未知力确定为止.

截面法

在节点法中,利用销子的受力图,将每根构件内的力全部求出.在截面法中,以桁架的部分作为隔离体图.为了隔离桁架的一部分,切开部分构件,并画上这些构件的未知力.这些力作为外力维持部分桁架的平衡.因为力系是平面任意力系,有 3 个独立的平衡方程.因此,对于任何截出的部分未知力不多子 3 个时可解.确信隔离体未知力不多于 3 个.

7.3　悬索

抛物线

悬索加载 W,即每水平单位长度的力.例如 lb/ft 或 N/m.假设按抛物线分布,如图 7-1 所示.图示中为在同一水平支承上悬索.温度引起张力的变化略去不计.

对这个平面力系,应用下列方程:

$$d = \frac{wa^2}{8H} \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2}wa\sqrt{1 + \frac{a^2}{16d^2}} \tag{2}$$

$$l = a\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{d}{a}\right)^4 + \frac{256}{7}\left(\frac{d}{a}\right)^6 + \cdots\right] \tag{3}$$

d 为下垂高度以英尺或米为单位;

w 为载荷以 lb/ft 或 N/m 为单位;

a 为跨距以英尺或米为单位;

H 为中点张力以磅或牛顿为单位;

T 为支承点处张力以磅或牛顿为单位;

l 为悬索长度以英尺或米为单位.

悬索受载沿索长用 lb/ft 或 N/m,而不是如图 7-1 所示抛物线情形,采用水平单位长度的力.假设曲线如图 7-2 所示,图示中是在同一水平支承上悬置.

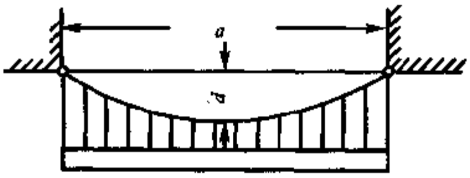


图 7-1

图 7-2

为了求解这类问题,略去温度变化,令

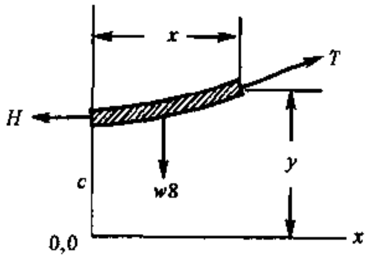


图 7-3

T 是距离中点处 x 的张力;

s 是从中点到张力为 T 点的悬索的长度;

w 是沿悬索分布的载荷,即 lb/ft 或 N/m,例如单位英尺或米的重力;

a 是跨距以英尺或米为单位;

d 是下垂高度以英尺或米为单位;

l 是全长以英尺或米为单位;

H 是中点张力以磅或牛顿为单位;

T_{max}是支承点张力以磅或牛顿为单位.

参见悬索从中心到右边部分隔离体图(图 7-3),坐标轴如图示,这样选择坐标可简化推导.

方程如下:当 $x=\frac{a}{2}$和 $y=c+d$ 时, $T=T_{max}$

$$c=\frac{H}{w} \tag{4}$$

$$y=c\cosh\frac{x}{c} \quad 和 \quad c+d=c\cosh\frac{a}{2c} \tag{5}$$

$$T=wy \quad 和 \quad T_{max}=w(c+d) \tag{6}$$

$$s=c\sinh\frac{x}{c} \quad 和 \quad \frac{l}{2}=c\sinh\frac{a}{2c} \tag{7}$$

$$y^2=c^2+s^2 \quad 和 \quad (c+d)^2=c^2+\frac{l^2}{4} \tag{8}$$

下面问题的类型包含可以求解悬索每单位长度的力 w:

(a) 已知跨距和下垂高度,即 a 和 d;

(b) 已知跨距和全长,即 a 和 l;

(c) 已知下垂高度和全长,即 d 和 l;

在情况(a)中,解方程(2)得到 c.然后由方程(3)求出 T_{max},由方程(4)或(5)确定 l.

在情况(b)中,解方程(4)得到 c,然后由方程(5)求出 d,由方程(3)得 T_{max}.

在情况(c)中,解方程(5)得 c.然后 T_{max}从方程(3)获得,为了求 a,可以解方程(2)或(4).

例　　题

7.1 图 7-4(a)所示,简单桁架受二载荷.试求支反力和每根构件中的力.

解 ☞ 图 7-4(b)是桁架整体的受力图,从此图中可以求解 R_A 和 R_E.由于二载荷是铅直的,因此,销 A 处反力只有铅直分量如图.

$$\sum M_A=0=R_E\times 40-4000\times 30-2000\times 10, \quad R_E=3500\ \text{lb} \tag{1}$$

$$\sum M_E=0=-R_A\times 40+2000\times 30+4000\times 10, \quad R_A=2500\ \text{lb} \tag{2}$$

当然,二已知力铅直方向与已解出的二反力求和等于零,校核结果正确.

图 7-4(c)是销 A 的受力图.2500 lb 反力向上.只有构件 AB 中的力铅直向下的分量与 R_A 平衡.因此,AB 构件中力向下作用在销上,即为 AB 杆受压.又因为 AB 杆中力为左下,必有一指向右方向的力与之平衡.因此 AC 杆中力如图示为向右拉销,即销子向左拉构件 AC,则 AC 杆中为拉力.

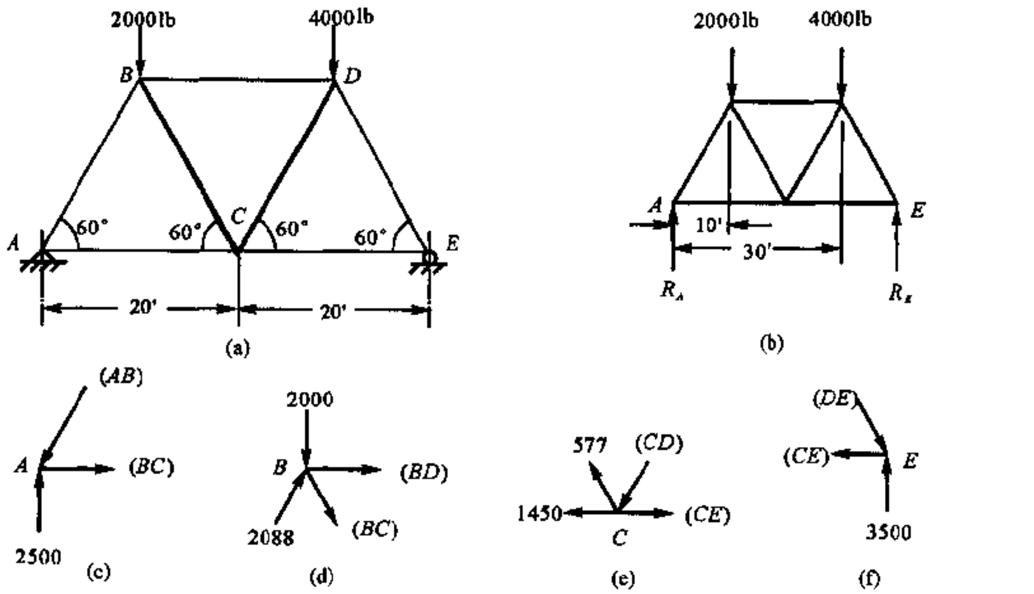


图 7-4

写出图 7-4(c)中汇交力系的平衡方程

$$\sum F_h = 0 = +(AC) - (AB)\cos 60° \tag{3}$$

$$\sum F_v = 0 = +2500 - (AB)\sin 60° \tag{4}$$

解出,$(AB) = \dfrac{+2500}{0.866} = +2890$ lb,$(AC) = (AB)\cos 60° = +1450$ lb,正符号表明所选择方向是正确的.即 $(AB) = 2890$ lb 压力,$(AC) = 1450$ lb 压力.

画销子 B 的受力图,如图 7-4(d).也可以选择销子 C,但作用在销子 C 上有 3 个未知力,即(BC)(CD)和(CE).在图 7-4(d)中,构件 AB 受压力,必须如图示在销子上画压力.2000 lb 的载荷直接向下作用在销子上,(BD)和(BC)中力是未知的.不用花时间确定此方向,可以假设其受拉,如果计算结果是正的则表示所设拉力正确,如果为负号则为压力,建方程为

$$\sum F_h = 0 = (BD) + 2890\cos 60° + (BC)\cos 60° \tag{5}$$

$$\sum F_v = 0 = 2890\sin 60° - 2000 - (BC)\sin 60° \tag{6}$$

解方程(6),得 $(BC) = 577$ lb 拉力,代入方程(5),得 $(BD) = -1730$ lb,因为符号为负,则此构件受压.

画销子 C 的受力图,如图 7-4(e)所示.(AC)和(BC)中力用二已知值表示.由于(BC)有铅直向上分量,则(CD)必须如图示为受压.如果不如此,而假设其受拉,则计算结果将为负,表明受压.列方程为

$$\sum F_h = 0 = (CE) - 1450 - 577\cos 60° - (CD)\cos 60° \tag{7}$$

$$\sum F_v = 0 = +577\sin 60° - (CD)\sin 60° \tag{8}$$

解出 $(CD) = 577$ lb 压力和 $(CE) = 2020$ lb 拉力.

最后可以画 D 点或 E 点的受力图,求出最后一个力(DE).图 7-4(f)所示的销子 E 的受力图.注:力(CE)用未知量符号表示,是为了校核在研究销 C 时 CE 值正确与否.列方程为

$$\sum F_v = 0 = 3500 - (DE)\sin 60° \tag{9}$$

$$\sum F_h = 0 = (DE)\cos 60° - (DE) \tag{10}$$

解出,$(DE) = 4030$ lb 压力和 $(CE) = 2020$ lb 拉力.

7.2 试求如图 7-5 所示的桁架中 FH,HG,IG 和 IK 中的力.每个载荷为 2 kN.所有三角为全等三角形,边长为 4 m.

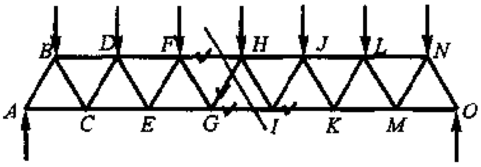


图 7-5

解 ☞ 第一步，找出要截开的构件，但截出的构件中的未知力不能多于 3 个．首先通过构件 FH，HG 和 GI 截开桁架，可以选左边也可部分选右边部分为研究对象．一般选择含外力少的部分——取左边部分．画受力图如图 7-6 所示．并将构件中力均设为拉力，若计算结果为负，则表明受压．箭头指向背离隔离体意指构件拉物体也即构件受拉．

整体桁架是结构对称的且载荷也是对称的，因此左边支反力为 7 kN．

任取 3 个平衡方程．力系对 G 点之矩求和方程中只含未知量(FH)，关于点 H(图形外)之矩求和方程含一个未知量(GI)，因为构件 FH 和 HG 交于 H 点．最后，力系沿铅直方向求和方程，解出力(HG)．即方程为

$$\sum M_G = 0 = -(FH)\times 2\tan 60^\circ - 7\times 12 + 2\times 10 + 2\times 6 + 2\times 2$$

$$(FH) = -139 \text{ kN 压力} \tag{1}$$

$$\sum M_H = 0 = +(GI)\times 2\tan 30^\circ - 7\times 14 + 2\times 12 + 2\times 8 + 2\times 4$$

$$(GI) = 14.4 \text{ kN 拉力} \tag{2}$$

$$\sum F_v = 0 = +7 - 2 - 2 + (HG)\sin 60^\circ$$

$$(HG) = -1.15 \text{ kN 压力} \tag{3}$$

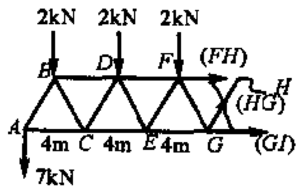


图 7-6

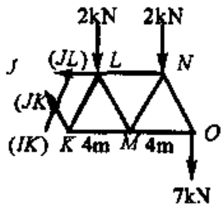


图 7-7

校核所得结果，采用力沿水平方向求和方程，并将已求出的解代入确定是否为零：

$$\sum F_h = -13.9 + 14.4 - 1.15\cos 60^\circ = 0 \tag{4}$$

为了求构件 IK 中力，截出部分如图 7-7 所示．建立力对 J 点之矩求和方程，即

$$\sum M_J = 0 = -(IK)\times 2\tan 60^\circ - 2\times 14 - 2\times 8 + 7\times 10$$

$$(IK) = 13.3 \text{ kN 拉力} \tag{5}$$

7.3 在图 7-8 所示的销连接桁架中，构件 DC，DF 和 EF 中最大允许力(拉或压)是 40 kips (40 000 lb)，试求最大允许载荷 P．

解 ☞ 使用截面法，画隔离体图如图 7-8(b)所示．

力对 A 点之矩求和的方程中，只有一个力 DF，则有 $DF=0$．

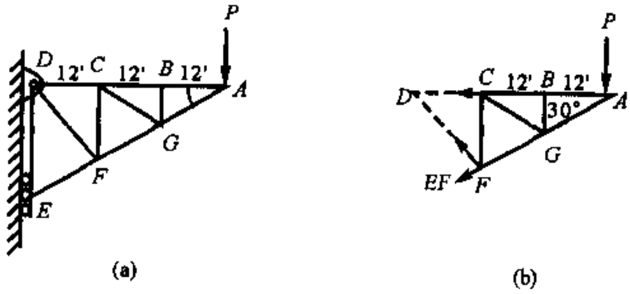


图 7-8

再用力对 D 点之矩求和方程，求出 EF. 注：DC 和 DF 交于 D 点，其力矩为零，将 EF 沿其作用线移至 A 点，则只有它的铅直分量对 D 点的力矩不为零. 即

$$\sum M_D = 0 = -36P - (EF\sin30^\circ)36 \quad 得 \quad EF = -2P$$

力对 F 点之矩求和，可得 DC，即，(注意：$CF = 24\tan30^\circ = 13.84$ ft)

$$\sum M_F = 0 = DC \times 13.84 - 24P \quad 得 \quad DC = 1.73P$$

为求最大 P 值，令 $EF = 40\ 000 = 2P$. 则有

$$P = 20\ 000 \text{ lb}$$

7.4 试求如图 7-9 所示桁架中构件 BD, CD 和 CE 所受的力.

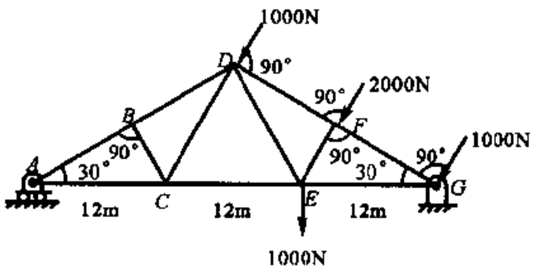


图 7-9

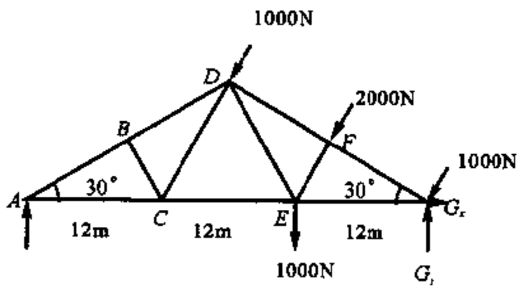


图 7-10

利用截面法求解问题. 如图 7-10 所示，将桁架看做隔离体，首先确定 A 点的垂直反力和 G 点销的反力.

解 距离 $FG = 12\cos30^\circ = 10.4$ m, $DG = \dfrac{18}{\cos30^\circ} = 20.8$ m. 为了求力 A，将力系对 G 点之矩求和，即 $\sum M_G = +1000 \times 12 + 2000 \times 10.4 + 1000 \times 20.8 - 36A$，解出 $A = 1490$ N.

为了确定 G_x，将力系沿水平方向求和为零，即 $\sum F_h = 0 = G_x - 4000\sin30^\circ$，得 $G_x = 2000$ N. 将力系沿铅直方向求和为零，解出 $G_y = 2970$ N.

为了求构件中的力，选择截面如图 7-11 所示. 左边只有一个已知力 A 与 3 个未知力，所以研究左边部分.

让力系对 C 点之矩求和为零，以确定 (BD)，对 D 点之矩求和为零确定 (CE). 为求得 (CD)，将力系沿铅直方向求和为零. 建方程如下：

$$\sum M_C = -(BD) \times 6 - 1490 \times 12 \tag{1}$$

$$\sum M_D = -1490 \times 18 + (CE) \times 10.4 \tag{2}$$

$$\sum F_v = +1490 + (BD)\cos60^\circ + (CD)\cos\theta \tag{3}$$

注意：$\tan\theta = \dfrac{6}{10.4}$；$\cos\theta = 0.866$.

从方程(1)，得 $(BD) = -2980$ N，即为压力. 从方程(2)，得 $(CE) = +2580$ N，即如所设为拉力.

将 (BD) 代入方程(3)，得 $(CD) = 0$.

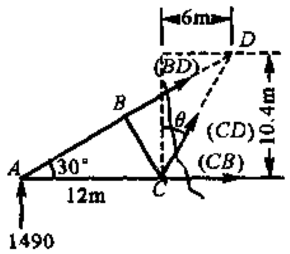


图 7-11

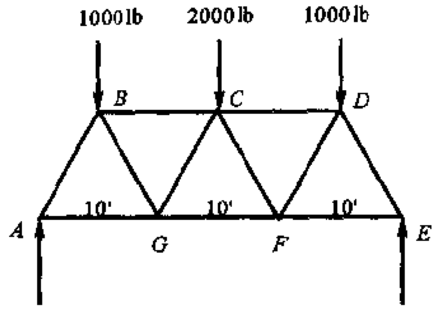


图 7-12

7.5 求图 7-12 所示桁架中,每根构件中的力.三角形是等边的.

解 由于对称性,桁架上的支反力在 A 和 E 两处各为 2000 lb.分别画销子 A,B 和 G 的受力图如图 7-13,14 和 15 所示.在图中,所有未知力均画成拉力.当各力计算的结果为正时,即为受拉;为负时,即为受压.由图 7-13,得

$$\sum F_y = AB\sin60^\circ + 2000 = 0, \qquad AB = -2309 \text{ lb 压力}$$

$$\sum F_x = AG + AB\cos60^\circ = 0, \qquad AG = +1155 \text{ lb 压力}$$

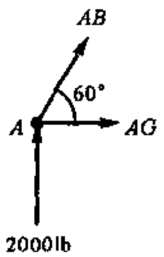


图 7-13

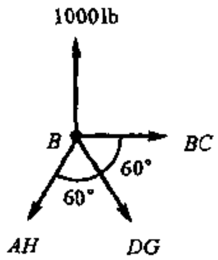


图 7-14

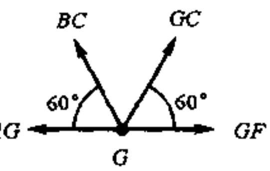


图 7-15

由图 7-14,得

$$\sum F_y = -AB\cos30^\circ - 1000 - BG\cos30^\circ = 0, \quad BG = +1155 \text{ lb 压力}$$

$$\sum F_x = -AB\sin30^\circ + BG\sin30^\circ + BC = 0, \quad BC = -1732 \text{ lb 压力}$$

由图 7-15,得

$$\sum F_y = BG\sin60^\circ + GC\sin60^\circ = 0, \qquad GC = -1155 \text{ lb 压力}$$

$$\sum F_x = -AG - BG\cos60^\circ + GC\cos60^\circ + GF = 0, \quad GF = +2309 \text{ lb 压力}$$

由于结构及载荷的对称性,得

$$DE = AB = -2309 \text{ lb 压力}$$
$$FE = AG = +1155 \text{ lb 压力}$$
$$DF = BG = +1155 \text{ lb 压力}$$
$$CD = BC = -1732 \text{ lb 压力}$$
$$CF = CG = -1155 \text{ lb 压力}$$

7.6 求图 7-16 所示桁架中的构件 BC 和 CD 的力.所有三角形是等边的.

解 在 7.2 节中已经指出,在这种情形中,研究桁架的一部分(图 7-17)是十分方便的.因为,在一般情况下,以桁架的一部分为研究对象,得到一平面任意力系,其未知量最多不应超过三个.在本题中,为求出构件 BD 和 CD 中的力,不研究销子 A、B 和 C,而是选择图 7-17 所示部分为研究对象,当 C 处反力求出之后,便可直接求出 BD 和 CD 构件中的力.

研究图 7-16 的整个桁架,画受力图,并且写出力对 G 点之矩求和为零的方程,即为

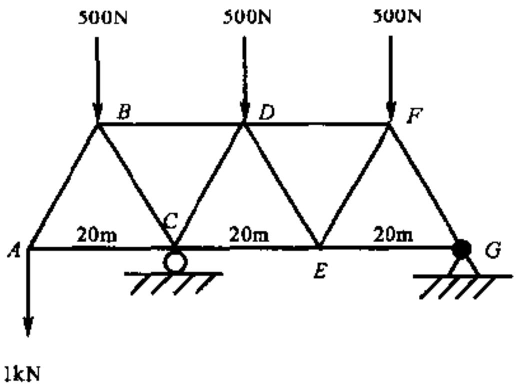


图 7-16

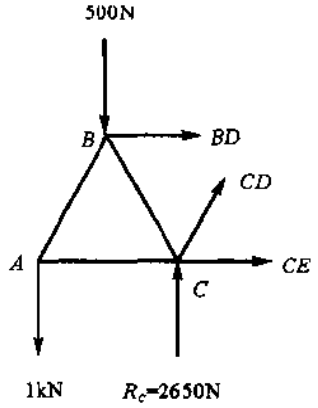


图 7-17

$$\sum M_G = -40R_C + (60)(1000) +)50)(500) + (30)(500) + (10)(500) = 0$$

$$R_C = 2625 \text{ N}$$

研究图 7-17,写出平衡方程为

$$\sum M_C = (20)(1000) + (10)(500) - (20\sin 60^\circ)(BD) = 0$$

$BD = 1440$ N 拉力

$$\sum F_y = 2625 - 1000 - 500 + CD\sin 60^\circ = 0$$

$CD = -1300$ N 压力

这就是"截面法"只求需要确定的力,而不像"节点法"那样需要求出中间的值.

7.7 浮桥的(各条)悬索受水平载荷 800 lb/ft.如果跨距为 600 ft,下垂高度为 40 ft,试求悬索端部与中点的张力,并求悬索全长是多少? 在此例中,悬索为抛物线.

解 ☞ 悬索端部张力相等,即

$$T = \frac{1}{2}wa\sqrt{1+\frac{a^2}{16d^2}} = \frac{1}{2}\times 800\times 600\sqrt{1+\frac{(600)^2}{16(40)^2}} = 932\ 000 \text{ lb}$$

$$H = \frac{wa^2}{8d} = \frac{800\times(600)^2}{8\times 40} = 900\ 000 \text{ lb}$$

$$l = a\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{d}{a}\right)^4 + \frac{256}{7}\left(\frac{d}{a}\right)^6 - \cdots\right]$$

通常,用收敛级数的前二或三项,即可充分保证所要求的精度.证明如下:

$$\frac{d}{a} = \frac{40}{600} = 0.0667 \quad \left(\frac{d}{a}\right)^2 = 0.0045 \quad \left(\frac{d}{a}\right)^4 = 0.00002$$

用前二项

$$l = 600\left[1+\frac{8}{3}(0.0045)\right] = 607 \text{ ft}$$

用前三项

$$l = 600\left[1+\frac{8}{3}(0.0045) - \frac{32}{5}(0.00002)\right] = 607 \text{ ft}$$

如果使用前四项,其值略有增加,但忽略掉了.

7.8 不使用公式,求解题 7.7 中所需求的张力.

解 ☞ 悬索右半的隔离体图(见图 7-18)画出最低点水平张力 H,支承点最大张力 T 和载荷 800 (300) = 240 000 lb.因为只有 3 个力作用在悬索上,因此必定汇交如图示.将力系水平与铅直方向分别求和为

$$\sum F_h = 0 = T_{max}\cos\theta - H \tag{1}$$

$$\sum F_v = 0 = T_{max}\sin\theta - 240\ 000 \tag{2}$$

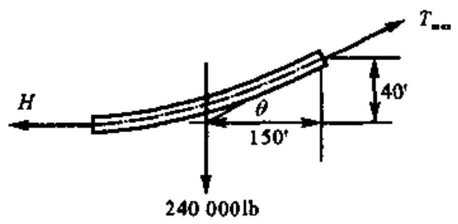


图 7-18

方程(1)为 $T_{max}\cos\theta = H$，方程(2)为 $T_{max}\sin\theta = 240\ 000$，将(2)除(1)，得 $\tan\theta = \dfrac{240\ 000}{H}$. 且 $\tan\theta = \dfrac{40}{150}$，则有 $\dfrac{40}{150} = \dfrac{240\ 000}{H}$，解出 $H = 900\ 000$ lb.

将方程(1)与(2)分别平方后再相加，得

$$T_{max}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (240\ 000)^2 + H^2$$

$$T_{max}^2 = (240\ 000)^2 + (900\ 000)^2 \quad 得\ T_{max} = 932\ 000\ \text{lb}$$

7.9 悬置在支撑点不在同一高度上的悬索，其质量为 3 kg/m，如图 7-19 所示. 试求最大张力.

解 ☞ 悬索中最低点 P 以右的一部分的隔离体图如图 7-20 所示，其位置是未知. 让 H 表示悬索点 P 的张力，T 表示 P' 点的张力，P 点之右到 P' 点，距离为 x. 重力在悬索上沿距离 x 为 $(3\times9.8)x$ 作用点在距 P 点 $\dfrac{x}{2}$. 将力系在水平与铅直方向求和为

$$\sum F_x = 0 = T\cos\theta - H \quad 得\ T\cos\theta = H \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 = T\sin\theta - (3\times9.8)x \quad 得\ T\sin\theta = (3\times9.8)x \tag{2}$$

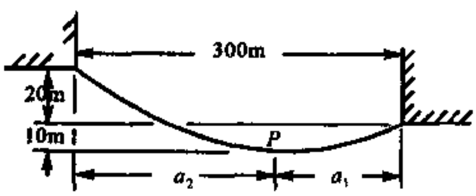


图 7-19

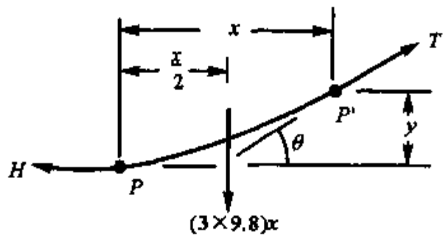


图 7-20

将(2)除(1)，得 $\tan\theta = (3\times9.8)x/H$. 由隔离体图可知，$\tan\theta = \dfrac{y}{(x/2)} = \dfrac{2y}{x}$，即为 $\dfrac{(3\times9.8)x}{H} = \dfrac{2y}{x}$，或 $Hy = \dfrac{(3\times9.8)x^2}{2}$. 由 $x = a_1$，$y = 10$ m，则 $10H = \dfrac{(3\times9.8)a_1^2}{2} = 14.7a_1^2$. 同样，对于 P 点以左的部分，得 $30H = 14.7a_2^2$. 有

$$a_1 + a_2 = 300, \quad \sqrt{\frac{10H}{14.7}} + \sqrt{\frac{30H}{14.7}} = 300, \quad H = 17.71\ \text{kN}$$

得到

$$a_1 = \sqrt{\frac{10H}{14.7}} = 110\ \text{m}, \qquad a_2 = \sqrt{\frac{30H}{14.7}} = 190\ \text{m}$$

将方程(1)与(2)求平方和，得 $T^2 = 864x^2 + H^2$. 最大张力出现在左支座，即 $x = -190$ m，$T_{max}^2 = 864(-190)^2 + (17\ 720)^2$ 或 $T_{max} = 18.58$ kN.

7.10 电视线悬置在同一高度支承点上，相距 20 m，受水平载荷为 2000 N/m. 最大可能张力是 140 kN，试求所需电视线的长度 l 及下垂高度 d.

解 ☞

$$T = \frac{1}{2}wa\sqrt{1+\frac{a^2}{16d^2}} \quad \text{或} \quad 140\ 000 = \frac{1}{2}\times 2000\times 20\sqrt{1+\frac{(20)^2}{16d^2}}$$

解出

$$d = 0.72\ \text{m}$$

由

$$l = a\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^2-\frac{32}{5}\left(\frac{d}{a}\right)^4+\frac{256}{7}\left(\frac{d}{a}\right)^6-\cdots\right]$$

$\frac{d}{a}=\frac{0.72}{20}=0.036$，仅用前二项得 $l=20.07$ m.

7.11 绳重 10 oz/ft，绕过无摩擦的滑轮如图 7-21 所示. 载荷 P 是 500 lb. 二滑轮中心之间的距离是 80 ft. 试求下垂高度. 设曲线为抛物线型并略去滑轮直径.

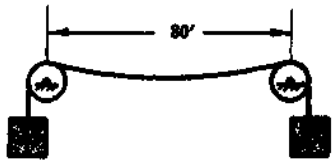


图 7-21

解 ☞ 滑轮处绳中张力是 P，即为 500 lb，则

$$500 = \frac{1}{2}\times\frac{10}{16}\times 80\sqrt{1+\frac{(80)^2}{16d^2}}, \qquad \text{得 } d = 1\ \text{ft}$$

7.12 绳重 0.518 lb/ft，悬吊在具有同一高度且相距为 500 ft 的塔尖上. 如果下垂高度为 50 ft，绳中最大张力及其最小长度应是多少？此例为悬链曲线.

解 ☞ 根据 7.3 节中介绍的问题类型，由于 a 和 d 已知，这属于情况(a)的例子，由 7.3 节方程(5)

$$c+d = c\cosh\frac{a}{2c} \quad \text{得} \quad c+50 = c\cosh\frac{500}{2c}$$

图解法也许比数值代入法更容易. 绘制 $c+50$ 关于 c 直线与 $c\cos\frac{500}{2c}$ 关于 c 的曲线. 则二曲线之交点即为所求 c 的值. 其值由如下的表格所示. 选择附加点 150 和 250，确保曲线不遇到 c 的最小值.

对应 c 点绘制曲线，且交点约在 $c=650$，见图 7-22.

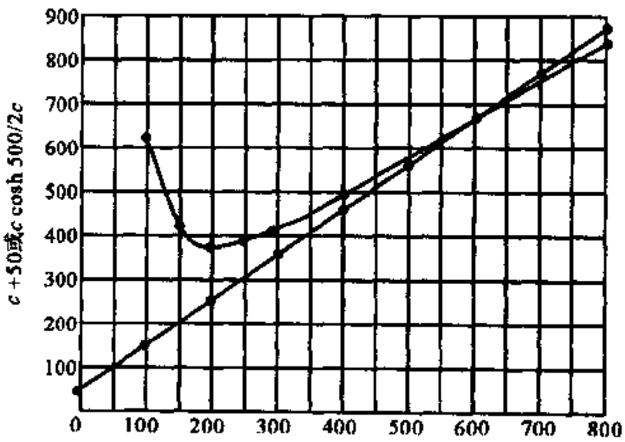


图 7-22

为了更精确，将曲线通过的图解部分放大. 不过，试将 $c=650$ 代入方程，以权衡精度，即有

$$c+50 = 650+50 = 700$$

但是

$$650\cosh\frac{500}{2\times 650} = 698.8$$

再试将 $c=640$ 代入，得 $640+50$ 得 690：

$$640\cosh\frac{500}{2\times 640} = 689.5$$

校核 $c=635$，表明 635 是十分精确.

由 7.3 节方程(6)，$T_{max} = w(c+d) = 0.518(635+50) = 355$ lb

由 7.3 节方程(8)，$(c+d)^2 = c^2 + \frac{1}{4}l^2$，　$(635+50)^2 = (635)^2 + \frac{1}{4}l^2$，　$l = 514$ ft

注：附录 C 中计算机求解表明，这种方法可靠.

c	$c+50$	$\frac{500}{2c}$	$\cosh\frac{500}{2c}$	$c\cosh\frac{500}{2c}$
0	50	∞	∞	–
100	150	2.5	6.1323	613.2
200	250	1.25	1.8884	377.7
300	350	0.833	1.3678	410.3
400	450	0.625	1.2018	480.7
500	550	0.500	1.1276	563.8
600	650	0.417	1.0882	652.9
700	750	0.357	1.0644	745.1
800	850	0.313	1.0494	839.5
150	200	1.667	2.7427	411.4
250	300	1.000	1.5431	385.8

7.13　绳质量为 0.6 kg/m，长度为 240 m，两端支撑且下垂高度为 24 m. 试求最大张力及最大跨度.

解　这是 7.3 节中情形(c)的例子，是悬链曲线.

由方程(8)，$(c+d)^2 = c^2 + \frac{1}{4}l^2$，　$(c+24)^2 = c^2 + \frac{1}{4}(240)^2$，　$c = 288$

由方程(6)，$T_{max} = w(c+d) = 0.6\times 9.8(288+24) = 1835$ N

由方程(7)，$\frac{1}{2}L = c\sinh\frac{a}{2c}$，　$\frac{1}{2}(240) = 288\sinh\frac{a}{576}$，　$a = 234$ N

补充习题

7.14　桁架受有 3 个载荷，如图 7-23 所示. 试用节点法求构件 AB，BD，CD 和 EF 中力.

答案：$AB = 25.0$ kN 压，$BD = 15.0$ kN 压，$CD = 125$ kN 压，$EF = 225$ kN 拉.

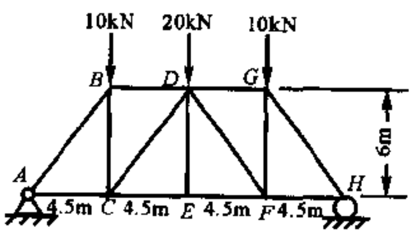


图 7-23

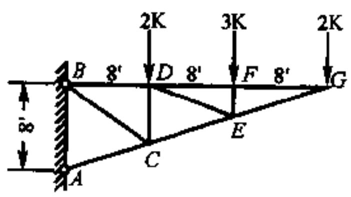


图 7-24

7.15　试求图 7-24 所示悬臂桁架中所有构件的力. 载荷用 kips. 使用节点法，从销子 G 开始解.

答案：$BD = 10\ 500$ lb 拉，$BC = 4\ 200$ lb 拉，$AC = 14\ 800$ lb 压，$DF = 6\ 000$ lb 拉，

$DE = 4\ 730$ lb 拉，$CE = 11\ 100$ lb 压，$FG = 6\ 000$ lb 拉，$EG = 6\ 330$ lb 拉，

$CD = 3\ 490$ lb 压，$EF = 3\ 000$ lb 压.

7.16　在图 7-25 所示桁架中，试用节点法求构件 AC 和 BD 中力.

答案：$AC = 35.3$ kN 压，$BD = 47.9$ kN 拉.

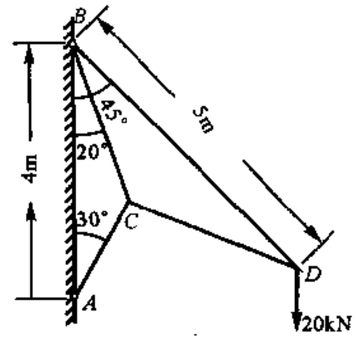


图 7-25

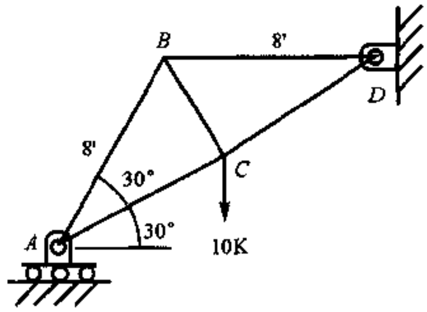


图 7-26

7.17　试求图 7-26 所示桁架中所有构件中的力.

答案：$AB = BD = 8.66$ K 压，$AC = 5$ K 拉，$CD = 10$ K 拉，$CB = 8.66$ K 拉.

7.18　桁架受有载荷如图 7-27 所示. 试用节点法求所有构件中的力.

答案：$AB = 10.04$ K 拉，$AC = 9.87$ K 压，$CD = 8.87$ K 压，$BD = 3.72$ K 拉，

$BE = 6.33$ K 拉，$DF = 8.30$ K 压，$FG = 9.30$ K 压，$EG = 8.06$ K 拉.

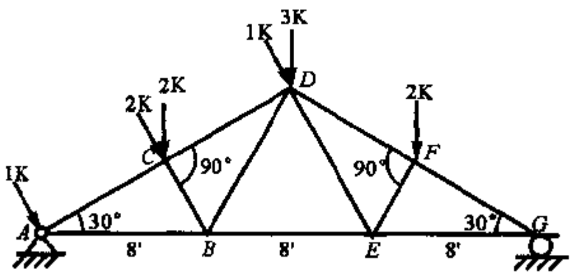


图 7-27

7.19　求图 7-28 中 AB，AC，EG 和 FG 中的力.

答案：$AB = 1.73$ kN 拉，$AC = 0.866$ kN 压，$EG = 2.89$ kN 压，$FG = 5.77$ kN 拉.

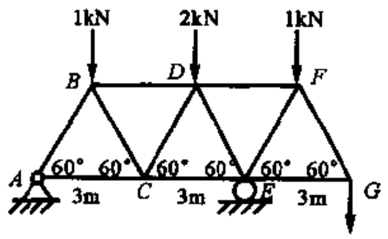


图 7-28

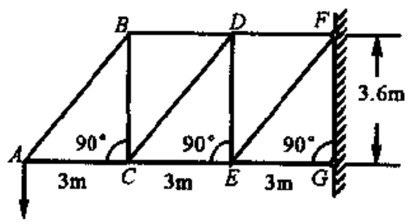


图 7-29

7.20　用节点法求悬臂桁架中 AB 和 CD 中的力. 见图 7-29.

答案：$AB = 7.81$ kN 拉，$CD = 7.81$ kN 拉.

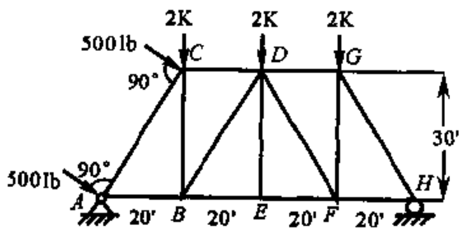


图 7-30

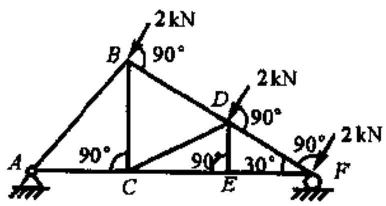


图 7-31

7.21　用节点法求桁架中 AC 和 AB 中的力. 见图 7-30.

答案: $AC = 4.3$ K 拉, $AB = 2.8$ K 拉.

7.22　试求图 7-31 中构件 AB 和 CD 中的力.

答案: $AB = 3.06$ kN 压, $CD = 2.31$ kN 压.

用截面法求解题 7.23 至 7.26 中的在图上标有对号的构件中的力.

7.23　图 7-32. 答案: $DF = 3.46$ kN 压, $DE = 0$, $CE = 3.46$ kN 拉.

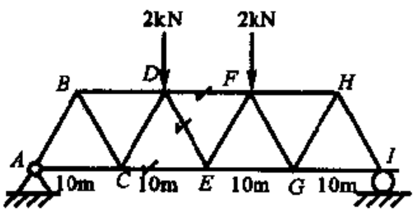


图 7-32

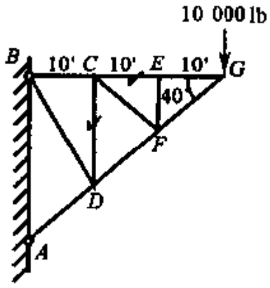


图 7-33

7.24　图 7-33. 答案: $CE = 11.9$ K拉, $CD = 0$.

7.25　图 7-34. 答案: $DF = 833$ N 压, $DE = 322$ N拉.

7.26　图 7-35. 答案: $BD = 5000$ lb 压, $EF = 0$.

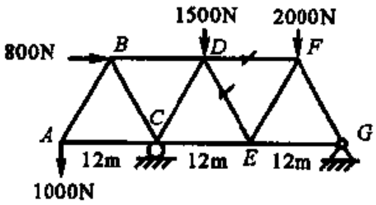


图 7-34

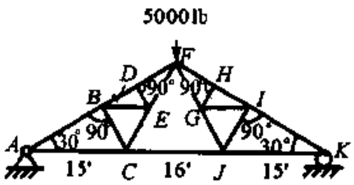


图 7-35

7.27　图 7-36 中的桁架, 试求构件 CE 和 DF 中的力, 力的单位为 Kips. 所有三角形为等边. 使用截面法.

答案: $CE = 4.04$ K 拉, $DF = 4.04$ K 压.

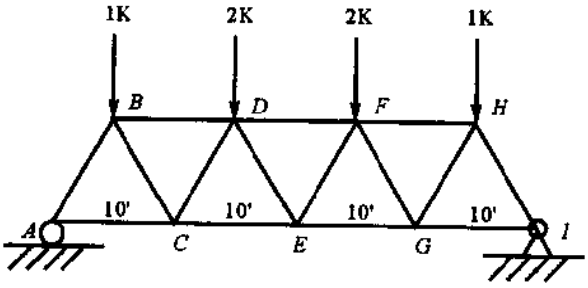


图 7-36

7.28　用截面法求解题 7.15 中构件 DF 和 CE 中的力.

7.29　用节点法求解题 7.25.

7.30　试求图 7-37 中所有构件中的力.

答案: $AB = 4.00$ kN 压, $AD = 2.00$ kN 压, $BD = 4.00$ kN 拉, $BC = 3.46$ kN 压, $CE = 3.46$ kN 压, $CD = 4.00$ kN 压, $DE = 2.00$ kN 拉.

7.31　汽车作用在跨度 CD 上, 如图 7-38 所示. 汽车载重为 4000 lb, 并等重地分布作用在 4 个轮子上. 因为有

两个同样的桁架组成的支撑轨道，所以，载荷作用在 C 点和 D 点各为 1000 lb. 桁架中所有构件的力是多少？

答案：$AB = 3.0$ K 拉，$AF = 0.47$ K 拉，$AG = 1.67$ K 拉，$GF = 3.72$ K 压，$BF = 0.5$ K 压，$BC = 2.0$ K 拉，$BE = 1.12$ K 拉，$FE = 3.35$ K 压，$CE = 1.0$ K 压，$CD = 2.0$ K 拉，$ED = 2.24$ K 压.

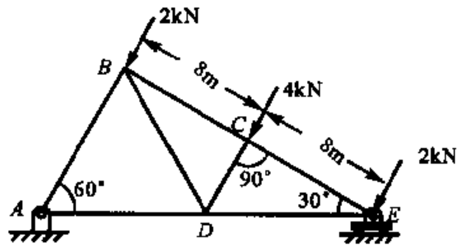


图 7-37

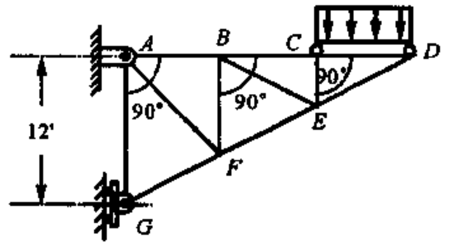


图 7-38

7.32 图 7-39 中，水平载荷 1800 kN，作用在桁架上，桁架 A 点为销子支承，E 点为圆棍支承，试求 AB 与 CE 中的力.

答案：$CE = 4070$ N 拉，$AB = 1300$ N 压.

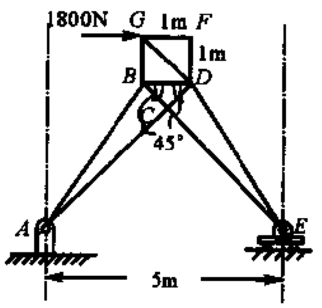


图 7-39

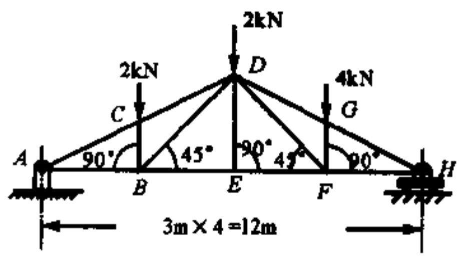


图 7-40

7.33 桁架受有 3 个载荷如图 7-40 所示. 试求所有构件中的力.

答案：$AC = 7.83$ kN 压，$AB = 7.00$ kN 拉，$BC = 2.00$ kN 压，$CD = 7.83$ kN 压，$BD = 2.83$ kN 拉，$DE = 0$，$DG = 10.1$ kN 压，$DF = 5.67$ kN 拉，$BE = 5.00$ kN 拉，$EF = 5.00$ kN 拉，$FG = 4.00$ kN 压，$FH = 9.00$ kN 拉，$GH = 10.1$ kN 压.

7.34 桁架如图 7-41 所示，A 处为销支承，E 处为圆棍轮支承，当作用在 D 点的水平载荷为 3000 lb 时，试求构件 CE 和 DE 中的力.

答案：$CE = 943$ lb 拉，$DE = 2150$ lb 压.

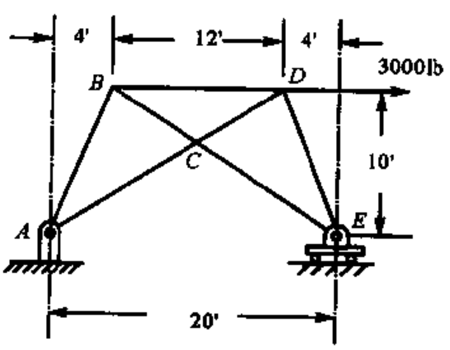


图 7-41

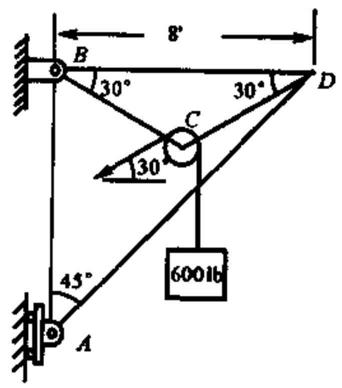


图 7-42

7.35 桁架如图 7-42 所示,试求构件 BC,AD 和 CD 中力.假设滑轮无重无摩擦,直径为 2 ft.载荷 600 lb 被与水平面夹角为 30°的绳子拉住.

答案:BC = 600 lb 拉力,CD = 1200 lb 拉力,AD = 850 lb 压力

7.36 桁架 A 处销支承,D 处滚轮支承,并与铅直线夹角为 40°,如图 7-43 所示.构件 AC 和 CD 的最大设计载荷是 2000 N(明显受拉).M 的最大值是多少?

答案:180 kg.

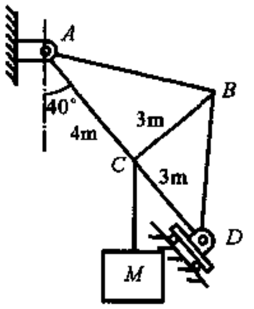


图 7-43

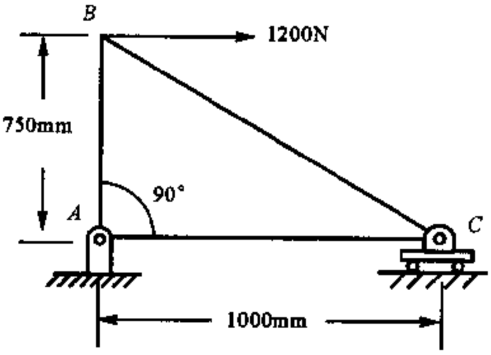


图 7-44

7.37 图 7-44 中的桁架,A 处销支承,C 处滚轮支承.试求由水平载荷 1200 N 引起的每根构件中的力.

答案:AC = 1200 N 拉,AB = 900 N 拉,BC = 1500 N 压.

7.38 桁架 A 处销支承,D 处滚轮支承,如图 7-45 所示.试求由 500 N 载荷引起的每根构件中的力.

答案:AB = BD = 417 N 压,AC = CD = 333 N 拉,BC = 500 N 拉.

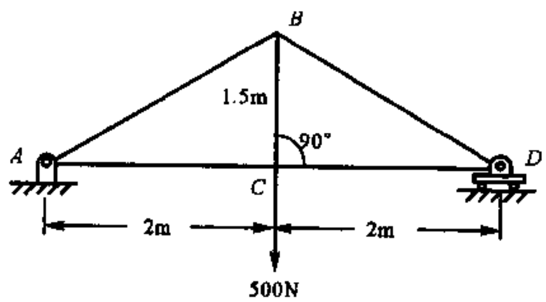


图 7-45

7.39 悬索两端悬挂在同一高度,并相距 200 m.载荷是水平方向 100 N/m.下垂高度是 12 m.试求悬索的全长及支点处张力.

答案:l = 202 m,T = 42.9 kN.

7.40 绳全长 100 ft,两端悬挂在同一高度且相距 99.8 ft,使用 7.3 节"抛物线"中方程(3),计算下垂高度.略去$\frac{d}{a}$的乘方以上的项.

答案:d = 2.73 ft.

7.41 在题 7.40 中,设绳中载荷为水平方向 0.01 lb/ft,支点处张力是多少?

答案:T = 4.59 lb.

7.42 悬索的最大允许张力是 3000 lb.在载荷为水平方向 100 lb/ft 作用下,下垂高度不大于 10 ft.求跨距是多少及悬索全长为多少?

答案:a = 41.6 ft,l = 47.4 ft.

7.43 悬索的最大允许张力是 1000 lb,在载荷为水平方向 1 lb/ft 作用下,下垂高度不大于 4 ft.跨距是多少?

答案:a = 178 ft.

7.44 悬索的最大允许张力是 90 000 lb,受载为水平方向 200 lb/ft,当水平支点相距为 300 ft 时,最小的下垂高度是多少?

答案：$d = 26.6$ ft.

7.45 用题7.40中的数据，计算绳中的最大张力和它的下垂高度. 设沿绳长重为0.01 lb/ft.

答案：$T = 4.4$ lb, $d = 2.9$ ft.

7.46 绳的质量为0.73 kg/m，铺设在相距48 m的水平支点上. 如果下垂12 m，试求绳的全长和最大张力.

答案：$l = 54.9$ m, $T = 268$ N.

7.47 输电线230 m，质量为0.97 kg/m，悬挂在等高且相距229 m的两塔尖上. 试求最大张力及下垂高度d.

答案：$T = 6840$ N, $d = 9$ m.

7.48 输电线悬索重5 lb/ft，全长1000 ft，吊在等高且相距为800 ft的两个塔上. 试问下垂d与最大张力是多少？

答案：$d = 266$ ft, $T_{max} = 3020$ lb.

7.49 绳子50 ft长，重为0.1 lb/ft，当二支点距离为多远时，绳中张力最大值是10 lb？使用7.3节"悬链曲线"中的方程(3)和(5).

7.50 绳重0.5 lb/ft，系在相距160 ft的水平支点上. 如果下垂40 ft，试求绳的全长及最大张力.

答案：$l = 184$ ft, $T = 63$ lb.

7.51 抛物线悬索受载水平方向200 lb/ft，支点距离100 ft，二支点高度差为20 ft，从最低支点测下垂高度d是8 ft. 试求二支点处悬索的张力.

答案：$T_L = 20$ K, $T_R = 16.7$ K.

7.52 输电线重4 lb/ft，两端吊在相距2000 ft的塔尖上，且二塔尖高度差为200 ft，输电线倾斜伸开但在最低塔处为水平. 试求二塔处绳之张力.

答案：$T_{max} = 40.8$ K, $H = 40.0$ K.

7.53 在冰雪期间，沿电话线上形成了冰柱，线两端吊在相距80 ft的柱子上，线纯重为0.3 lb/ft. 冰柱形成直径多大时，使下垂高度不超过5 ft及最大允许张力是600 lb？设冰形成的实心圆柱具有的密度为56 lb/ft^3.

答案：直径 = 10.8 in.

7.54 绳重1.5 lb/ft系在墙上，另一端跨过无摩擦的鼓轮，且鼓轮与墙相距40 ft，具有相同高度. 绳的下垂d是2 ft. 跨过鼓轮的吊挂绳多长，才能防止其在鼓轮上滑动？

答案：$h = 102$ ft.

7.55 绳吊在等高且相距800 ft的两塔尖上. 绳重为5 lb/ft且最大下垂量是270 ft. 问绳的长度是多少？

答案：1010 ft.

第 8 章 梁所受的力

8.1 梁

梁是长度远大于截面尺寸的构件.承受的载荷通常垂直于梁的轴线,即这些载荷与梁长成直角.载荷分布在梁上非常小的距离上时,称为集中力,分布在一定的距离上时,称分布载荷.

设计中通常只涉及梁的抵抗剪切和弯曲的能力.因此本章不研究外载荷不与梁垂直的情况,这些将使梁具有轴向力.

8.2 梁的类型

(a) 简支梁:两端支承.见图 8-1(a).

(b) 悬臂梁:一端插入墙中,另一端自由.见图 8-1(b).

(c)外伸梁:至少有一个支承不在端点.见图 8-1(c).

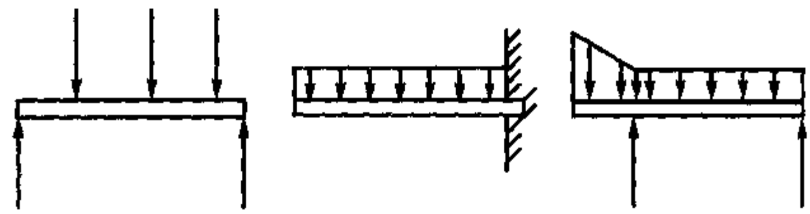


图 8-1

8.3 剪力和弯矩

假想地用截面 C-D 将梁分成左、右即 A,B 两部分,揭示梁 C-D 截面上的剪力和弯矩(见图 8-2).A 部分的隔离体图表示了作用在A 上的全部外力及B 施加在A 上的力,使 A 部分处于平衡状态.

B 部分施加在A 部分的力是(a)铅直力 V 和(b)弯矩 M.

C-D 截面剪力即是铅直力 V,是由力系在铅直方向求和方程求得.

C-D 截面的弯矩M 是由力系对截面上任意点之矩求和方程中得到.在本问题中,截面上任意点即为横截面形心.

在梁中,规定内力符号的通用原则是:作用在左部分 A 上的剪力铅直向下为正(如果取右部分 B,则截面剪力向上为正);弯矩 M 逆时针转向为正(右部分 B 截面弯矩 M 顺时针为正).如图 8-3 所示.

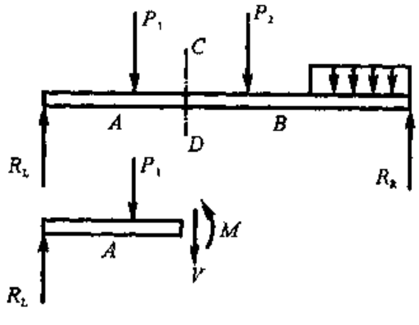


图 8-2

梁中左部分所有铅直向上的外力,引起该截面上的剪力 V 是正剪力(如果右部分铅直外力的合力指向下,即引起正剪力).

截面弯矩 M 等于梁左部分所有外力对截面中心之矩求和.左边部分向上的力引起截面正弯矩.如果在右部分,也是向上的力引起正弯矩(与剪力符号约定相反).

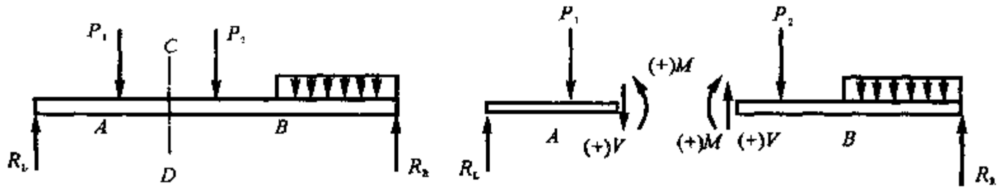


图 8-3

自然地，剪力和弯矩将随截面位置不同而发生变化.题 8.1 和 8.2 表明这些原理.

8.4　剪力图和弯矩图

剪力图和弯矩图表示了梁各截面上弯矩 M 和剪力 Q 沿轴线的变化情况.对于简单问题，可以根据左边部分(或右边)外力的代数和及外力对截面形心之矩的和直接绘制 V 和 M 图形.

8.5　剪力图和斜率

沿梁任意部分剪力图的斜率等于其相应位置的载荷集度.

证明：图 8-4 表示了梁的 $\mathrm{d}x$ 部分.在这段上受有每单位长度的载荷约 w.左截面的剪力 V 和弯矩 M 设为正.设右截面的剪力和弯矩增到 $V+\mathrm{d}V$ 和 $M+\mathrm{d}M$.则有，

$$\sum F_v = 0 = + V - w\mathrm{d}x - (V + \mathrm{d}V)$$

由此得 $\mathrm{d}V = -w\mathrm{d}x$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -w$.

负号表示分布载荷铅垂向下.

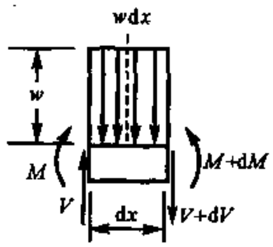


图 8-4

8.6　剪力的改变量

受有分布载荷的梁二截面之间的剪力改变量等于二截面之间的载荷图的面积负值.

证明：从上面的证明中，使用 $\mathrm{d}V = -w\mathrm{d}x$ 并且从 x_1 到 x_2 积分，即

$$\int_{V_1}^{V_2}\mathrm{d}V = \int_{x_1}^{x}(-w)\mathrm{d}x \quad 或 \quad V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2}(+w)\mathrm{d}x$$

$\int_{x_1}^{x_2}(+w)\mathrm{d}x$ 即为二截面之间载荷图的面积.

8.7　弯矩图的斜率

沿梁任意截面弯矩的斜率等于该截面的剪力之值.

证明：根据图 8-4，求对右端截面力矩之和等于零的方程，得

$$-M - V\mathrm{d}x + w\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}x}{2} + M + \mathrm{d}M = 0$$

略去上式微分的平方项，得 $\mathrm{d}M = V\mathrm{d}x$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V$.这也说明弯矩的极值，一般出现在剪力为零的截面上.

8.8　弯矩的改变量

梁的二截面之间弯矩的改变量等于二截面之间剪力图的面积.

证明：从上面的证明中，使用 $dM = Vdx$ 并且从 x_1 到 x_2 进行积分，得

$$\int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} Vdx \quad \text{或} \quad M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} Vdx$$

$\int_{x_1}^{x_2} Vdx$ 即为二截面之间剪力图的面积.

参见题 8.3 至 8.5.

例　　题

8.1　在如图 8-5 所示的简支梁上，试求距左端 2 m 的 $C-D$ 截面上剪力 V 和弯矩 M.

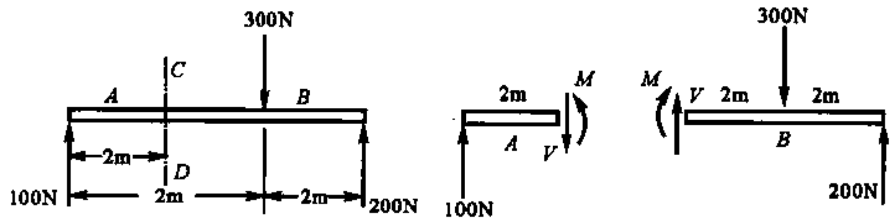


图 8-5

解　☞ 反力 100 N 和 200 N 如图所示. 梁的左、右两部分隔离体图如图 8-5 所示. 研究左部分 A，则剪力是左部分各力之和向上为正，即

$$V = 100 \text{ N}$$

如果研究右部分 B，剪力为右部分各力之和(向下为正)，即

$$V = +100 \text{ N}$$

截面弯矩 M 等于左部分所有铅直力对截面之矩求和，向上的力引起截面上正弯矩，见图 8-5，得

$$M = +100(2) = +200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

如果研究右边部分，向上之力产生正弯矩，如图 8-5 中右部分梁的隔离体图，得

$$M = -(300)2 + 200(4) = +200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

8.2　画出题 8.1 的剪力和弯矩图. 需使用图 8-6 所示的两部分的隔离体图.

解　☞ 由 A_1 的隔离体图示，在 $0 < x < 4$ m 范围内，$V = +100$ N，$M = +100x$ N·m. 由 A_2 的隔离体图示，在 4 m $< x <$ 6 m 范围内，$V = -200$ N，$M = +100x - 300(x-4) = -200x + 1200$ N·m. 如果

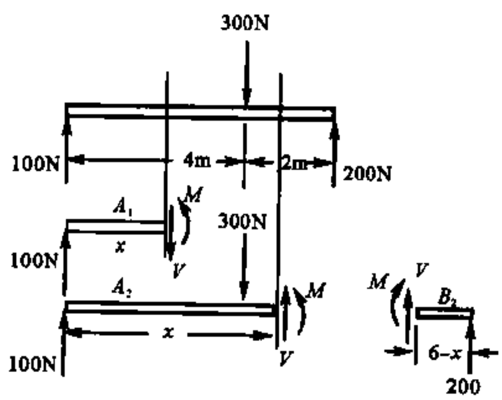


图 8-6

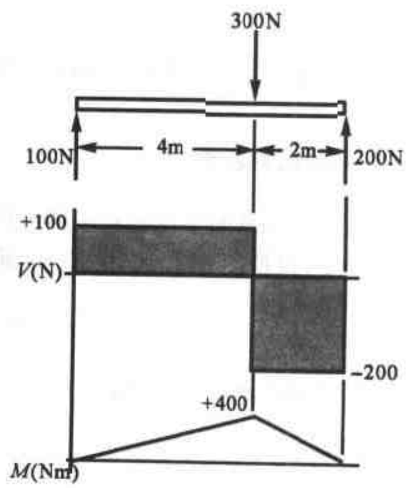


图 8-7

由 B_2 的隔离体图，则 $M=200(6-x)=-200x+1200$ N·m(x 距离为从左端点开始). M 的值在 $x=4$ m 时，$M=+400$ N·m.

由以上数据结果，可给出剪力图和弯矩图(见图 8-7).

8.3　试求图 8-8 所示梁的剪力与弯矩方程．画剪力图和弯矩图．

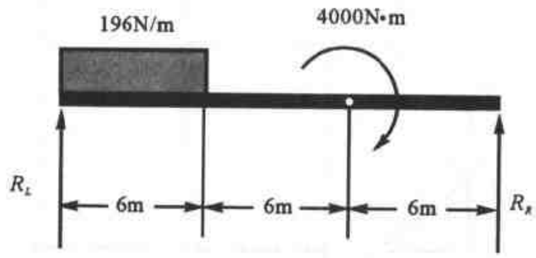


图 8-8

解　首先由所有外力对左端点之矩求和为零确定反力 R_R，20 kg/m 的质量等效为 $(20\times9.8)(6)$ 或 1176 N 作用在其中点集中力.(只限于求支反力.)得

$$\sum M_{R_L}=18R_R-4000-(3)1176=0,\qquad R_R=418\ \text{N}$$

$$\sum M_{R_R}=-18R_L-4000+(15)1176=0,\qquad R_L=758\ \text{N}$$

在区间 $0<x<6$ m，隔离体图如图 8-9 所示.

作用在隔离体图上所有铅直力求和，得

$$\sum F_v=758-196x-V=0$$

$$V=758-196x\ \text{N}$$

$$\sum M_O=-758x+196x(x/2)+M=0$$

$$M=758x-98x^2\ \text{N}\cdot\text{m}$$

可见，剪力 V 是左部分力之和，截面弯矩 M 是左部分所有铅直力之矩与力偶之和.

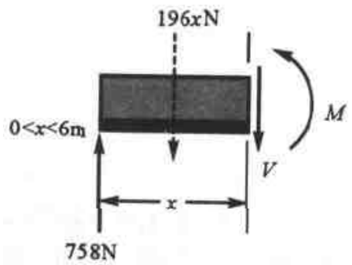


图 8-9

由图 8-10(a)和(b)所示的梁的隔离体图，得到如下方程，即由图 8-10(a)，得

$$V=-418\ \text{N},\quad M=-418x+3528\ \text{N}\cdot\text{m}$$

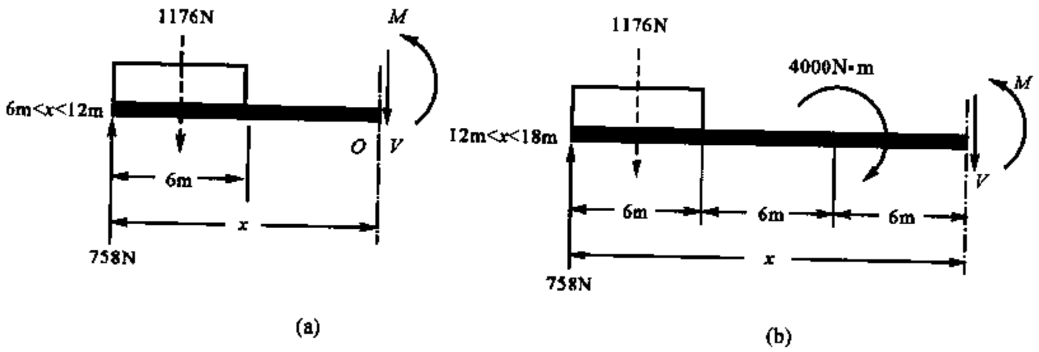


图 8-10

由图 8-10(b)，得

$$V=-418\ \text{N}$$

$$M=-418x+7528\ \text{N}\cdot\text{m}$$

剪力和弯矩图如图 8-11 所示．为了确定最大弯矩值及其位置，利用弯矩图的斜率等于该点的剪力之值(见 8.7 节)．即是弯矩的最大值在斜率(或剪力)为零点．得

$$758-196a=0\qquad a=3.87\ \text{m}$$

最大弯矩等于从 0 至 a m 剪力曲线下的面积，即

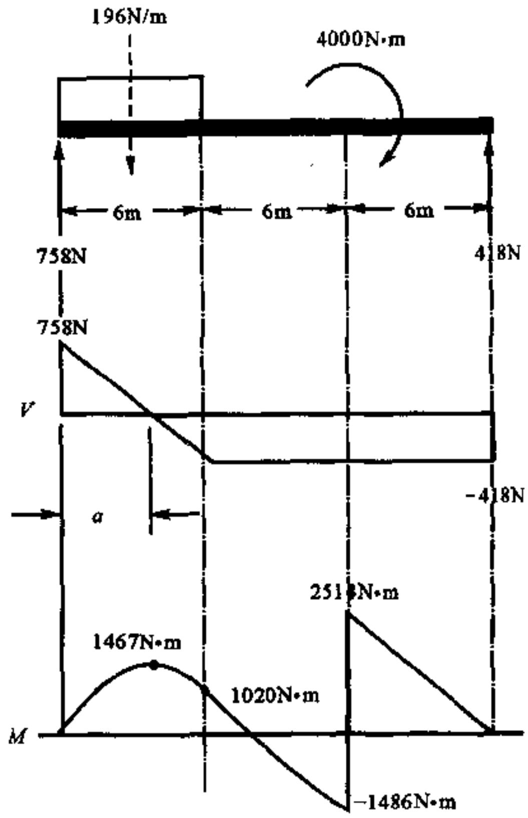


图 8-11

$$M_{max} = 758(3.87)/2 = 1467\ \text{N}\cdot\text{m}$$

还应注意,在弯矩图的右端点,从剪力曲线得到的计算值不为零,这是支点的缘故.

8.4 在图 8-12 所示的简支梁上承受三角形分布载荷和均布载荷.试求剪力方程和弯矩方程.

解 为了求支反力 R_1 和 R_2,设三角形载荷的合力为$\frac{1}{2}(120)(9)=540$ lb 作用在距端点$\frac{2}{3}$的地方(距左端点 6 ft).设均布载荷的合力是[120(10)=1200 lb]作用在中点,距 R_2 有 5 ft.将所有对于左端点之矩求和,得到

$$-\frac{1}{2}(120)(9)(6)-(120)(10)(9+5)+19R_2=0$$

解出 $R_2=1055$ lb.

将力对于右端点之矩求和,得到

$$+\frac{1}{2}(120)(9)(19-6)+(120)(10)(5)-19R_1=0$$

得 $R_1=685$ lb.

注意:校核 $R_1+R_2=1740$ lb,等于二载荷$\left[\frac{1}{2}(120)(9)+(120)(10)\right]$之和.

在梁的左部分隔离体图中,画上区间 $0<x<6$ ft 的三角形分布的载荷,如图 8-13 所示.由三角形的比例关系,得到 x 处载荷的集度为$\left(\frac{x}{9}\right)(120)$ lb/ft.此段载荷合力为$\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{9}\right)(120)$作用在左部分的$\frac{x}{3}$处.因此

$$V=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{9}\right)(120)+685=-\frac{60}{9}x^2+685\ \text{lb}$$

$$M=-\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{9}\right)(120)\frac{x}{3}+685x=-\frac{20}{9}x^3+685x\ \text{lb-ft}$$

为了求区间 9 ft$<x<$19 ft 的剪力和弯矩,画出该部分的隔离体图如图 8-14 所示.三角形分布载荷等于$\frac{1}{2}(9)(120)=540$ lb 作用在距左端 6 ft 处或者是左部分的$(x-6)$处.均布载荷为 $120(x-9)$

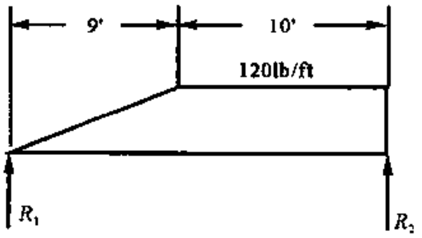


图 8-12

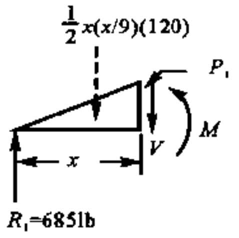


图 8-13

lb,作用在距左端 $9+\left(\frac{x-9}{2}\right)=\frac{x}{2}+4.5$ ft 处,或者左部分的 $\frac{x}{2}-4.5$ ft.得到

$$V=685-540-120(x-9)=-120x+1225\text{ lb}$$

$$M=685x-540(x-6)-120(x-9)\left(\frac{x}{2}-4.5\right)$$

$$=-60x^2+1225x-1620\text{ lb-ft}$$

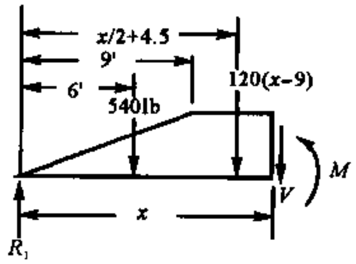


图 8-14

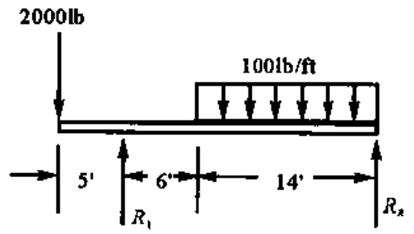


图 8-15

读者可以通过将所有力关于右端之矩求和为零,校核最后这一个方程.

8.5 画图 8-15 所示梁的剪力图和弯矩图.

解 研究整体的隔离体图,将所有力对 R_l 之矩求和,得

$$+2000(5)-1400(13)+20R_R=0 \text{ 得 } R_R=410\text{ lb}$$

再对 R_R 之矩求和,得

$$+2000(25)-20R_l+1400(7)=0 \text{ 得 } R_l=2990\text{ lb}$$

画剪力图(见图 8-16),使得任意截面上的剪力是梁上左部分承受外力的和,且向上的力提供正剪力.

在距梁的左端非常小的距离 ε 处,剪力 $V=2000$ lb,并保持此值到左支座反力出现的截面.在支反力之左的 ε 距离的左截面上,剪力 $V=-2000$ lb;但在支反力 ε 距离之右截面上,剪力 $V=+990$ lb,并保持此值直到出现分布载荷.这时,由载荷集度 100 lb/ft(向下)提供的剪力为负值.当达到 9.9 ft $\left(\frac{990}{100}\right)$ 时,剪力值为零.在距右端 ε 处之左截面上剪力是 -410 lb,即为支反力,得到剪力图.

再画弯矩图(见图 8-16),首先确定左端点弯矩(从左端取距离 ε 之右),此弯矩值是 -2000ε lb-ft 或者为零.从 $x=0$ 到 $x=5$ ft,剪力是负的(常量),因此,弯矩图的斜率负常量.左支反力之左的弯矩等于梁的左端点弯矩(零)加上左支反力之左的剪力图的

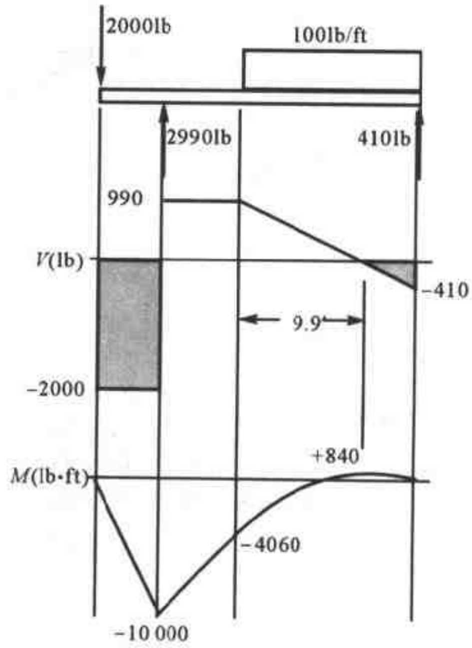


图 8-16

面积，[$-5(2000)=-10\,000$ lb-ft].

从 $x=5$ ft 到 $x=11$ ft 剪力是正常量，因此，弯矩图中斜率为正，而弯矩的改变量，在 $x=5$ ft 到 $x=11$ ft 应是剪力图的面积，即 $+6(990)=+5940$. 因此，弯矩的变化从 $-10\,000$ 到 $(-10\,000+5940)=4060$ lb-ft.

剪力在下段 9.9 ft 的梁上为正值，当到达 9.9 ft 截面时，弯矩为最大值($V=0$). 从 $x=11$ ft 到 $x=20.9$ ft，弯矩的增量是三角形剪力图的面积，即 $\frac{1}{2}(990)(9.9)=4900$ lb-ft.

在 $x=20.9$ 截面上，$M=(-4060+4900)=+840$ lb-ft. 在区间 $11<x<20.9$ ft，剪力为正值，但为递减趋势，弯矩图具有正的递减斜率，使弯矩值为最大值为 840 lb-ft.

完成弯矩图，但应注意，最后一段的剪力面积是负的，但剪力的值是逐渐增大的. 这里，弯矩曲线有负斜率，且弯矩最大值是最后此段剪力图面积，即 $\frac{1}{2}(4.1)(410)=840$ lb-ft，并随之逐渐减少，使右端弯矩为零.

补 充 习 题

8.6 悬臂梁受到三角形分布载荷和均匀分布载荷，如图 8-17 所示. 写出剪力和弯矩方程.

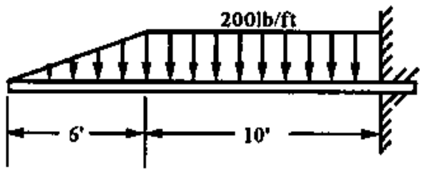


图 8-17

答案：$0<x<6$ ft, $V=-\frac{50}{3}x^2$ lb, $M=-\frac{50}{9}x^3$ lb-ft.
$6\text{ ft}<x<12$ ft, $V=+600-200x$ lb, $M=-1200+600x-100x^2$ lb-ft.

8.7 如图 8-18 至 8-24，写出梁的剪力和弯矩方程. 并判断剪力和弯矩图正误. 所有 x 距离从梁的最左端量起.

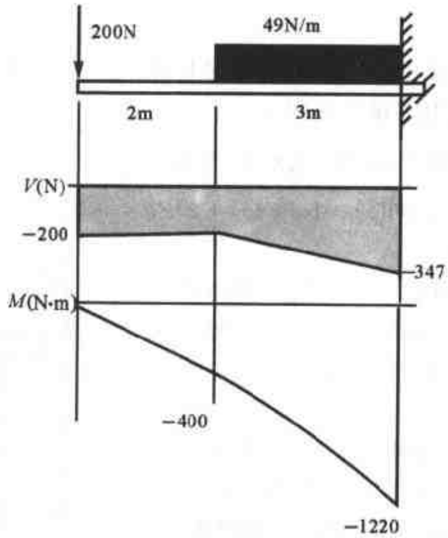


图 8-18

答案：$0<x<2$ m $\begin{cases} V=-200\text{N} \\ M=-200x\text{N·m} \end{cases}$

$2m<x<5\text{m}\begin{cases} V=-102-49x\text{N} \\ M=-98-102x \\ \quad -24.5x^2\text{N·m} \end{cases}$

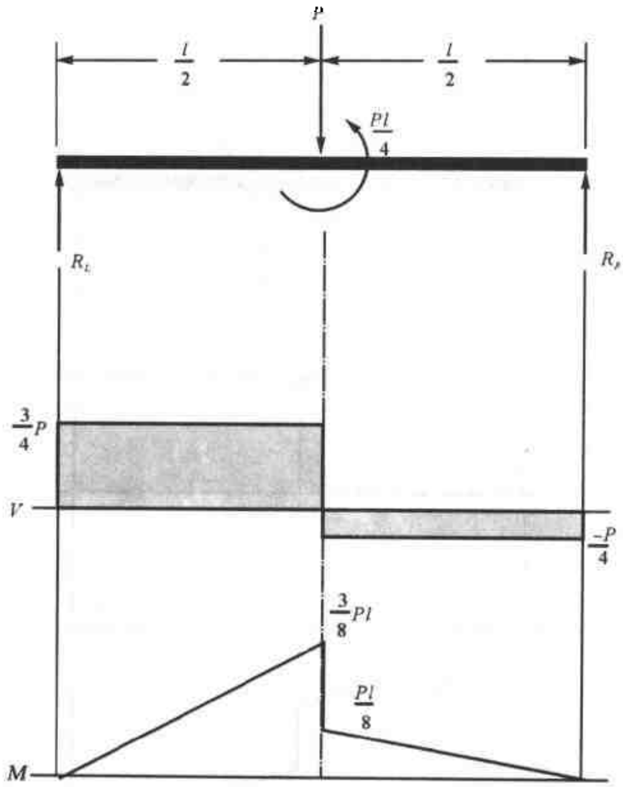


图 8-19

答案：$0<x<\frac{1}{2}\begin{cases}V=\frac{3}{4}P\\M=\frac{3}{4}Px\end{cases}$

$\frac{1}{2}<x<L\begin{cases}V=-P/4\\M=-P/4(x-l)\end{cases}$

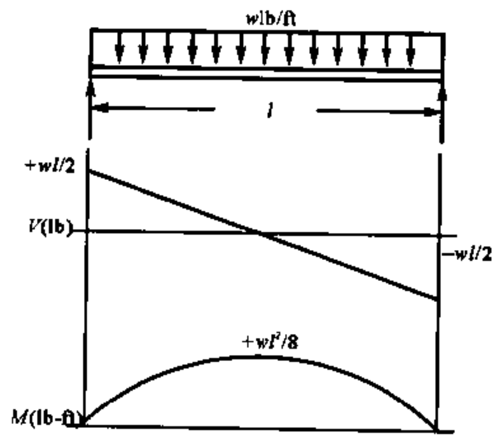


图 8-20

答案：$0<x<L\begin{cases}V=+wl/2-wx \text{ lb}\\M=+wlx/2-wx^2/2 \text{ lb-ft}\end{cases}$

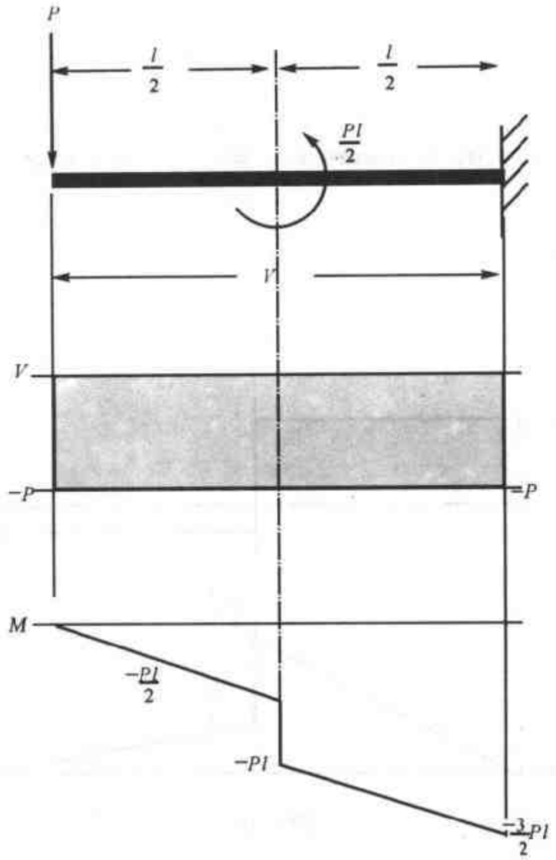


图 8-21

答案：$0<x<\frac{1}{2}\begin{cases}V=-P\\M=-Px\end{cases}$

$\frac{1}{2}<x<l\begin{cases}V=-P\\M=-P(x+l/2)\end{cases}$

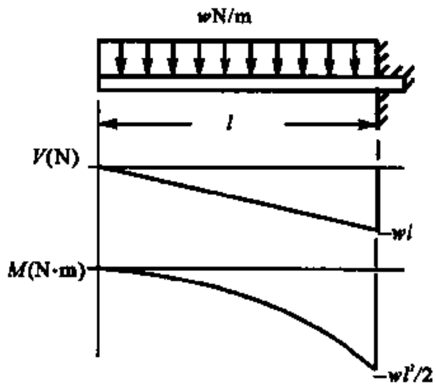


图 8-22

答案：$0<x<l\begin{cases}V=-wx\ \mathrm{N}\\M=-wx^2/2\ \mathrm{N\cdot m}\end{cases}$

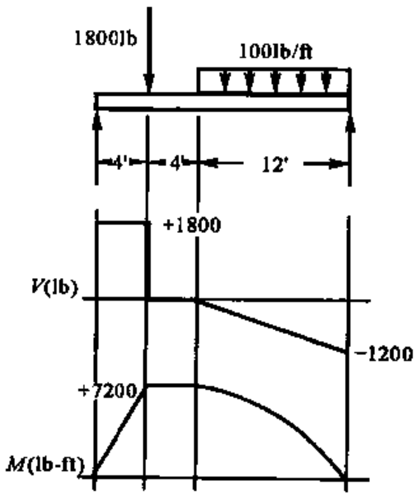


图 8-23

答案：$0<x<4\ \text{ft}\begin{cases}V=+1800\ \text{lb}\\M=+1800x\ \text{lb-ft}\end{cases}$

$4\ \text{ft}<x<8\ \text{ft}\begin{cases}V=0\\M=7200\ \text{lb-ft}\end{cases}$

$8\text{ft}<x<20\text{ft}\begin{cases}V=+800-100x\ \text{lb}\\M=+4000+800x-50x^2\ \text{lb-ft}\end{cases}$

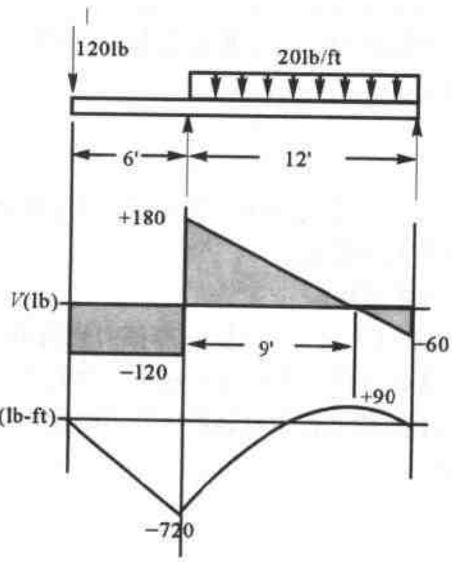


图 8-24

答案：$0<x<6\ \text{ft}\begin{cases}V=-120\ \text{lb}\\M=-120x\ \text{lb-ft}\end{cases}$

$6\ \text{ft}<x<18\ \text{ft}\begin{cases}V=+300-20x\ \text{lb}\\M=-2160+300x-10^2\ \text{lb-ft}\end{cases}$

第9章 摩 擦

9.1 基本概念

1. 两个物体间的静摩擦力是与两物体相对滑动趋势方向相反的切线力.

2. 最大静摩擦力 F'是物体即将运动时静摩擦力的最大值.

3. 动摩擦力是在两物体开始运动后沿它们切线方向的力.它小于静摩擦力.

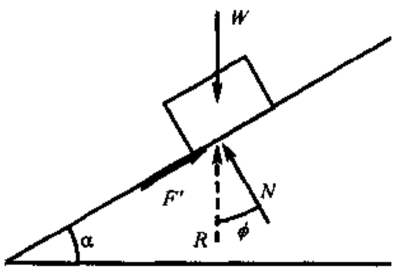


图 9-1

4. 摩擦角是在运动即将发生时,一物体对另一物体全约束反力方向与它们之间公切线的法线的夹角.

5. 静摩擦系数是最大静摩擦力 F'与正压力 N 的比:

$$\mu = \frac{F'}{N}$$

6. 动摩擦系数是动摩擦力与正压力的比值.

7. 角 α 是斜面上静止的物体受重力与斜面的支承力作用,即将运动时斜面倾斜的角度.这种即将运动的状态如图 9-1 所示.

图中,F'与 N 的合力 R 与物体所受重力 $w = Mg$ 大小相等,方向相反.虽然有运动趋势,但物体仍保持平衡,由几何关系,$\alpha = \phi$.因此,摩擦系数 μ 可由运动即将发生时斜面倾斜角度决定.$\mu = \tan\phi$,也即是 $\mu = \tan\alpha$.

9.2 摩擦规则

(a) 摩擦系数与正压力的大小无关,但最大静摩擦力或动摩擦力与正压力成比例.

(b) 摩擦系数与接触面积大小无关.

(c) 动摩擦系数小于静摩擦系数.

(d) 在低速下,摩擦力与速度无关.在高速下,摩擦力会减小.

(e) 静摩擦力的大小总是等于使物体保持平衡所需要的力.在解决含有静摩擦力的问题时,应该把静摩擦力当成未知量,除非题中明确物体处于临界状态,此时可以根据上面(5)条用公式 $F' = \mu N$ 计算静摩擦力.

9.3 千斤顶

千斤顶是利用摩擦力的一个装置.在如图 9-2 所示的螺纹斜面中,有两个重要情况:(a)力 P 之矩可以升起重物和(b)力 P 之矩可以使重物下降.

两种情况下的转动力矩都对螺纹的纵轴(图中垂线)取矩

在情况 a 的转动力矩必须克服摩擦力而升起重物 W,情况 b 中重物 W 帮助克服摩擦力.为升起重物 W,螺纹必须在俯视情况下逆时针转动.

以 β 为螺纹倾斜角度,即 $\tan\beta$ 等于螺距除平均周长(螺距为螺丝转动一周所移动的距离),以 ϕ 为摩擦角,下面是两种情况下的公式,其中 r 为螺纹的平均半径,即

(a) $M = Wr\tan(\phi + \beta)$

(b) $M = Wr\tan(\phi - \beta)$

以上公式也适用于螺纹匀速转动的情况.当然,此时 ϕ 为动摩擦角.也适用于为支承重物而在顶上加一个垫片的千斤顶.为精确起见,每个公式右侧加上一项,这一项表示克服垫片与

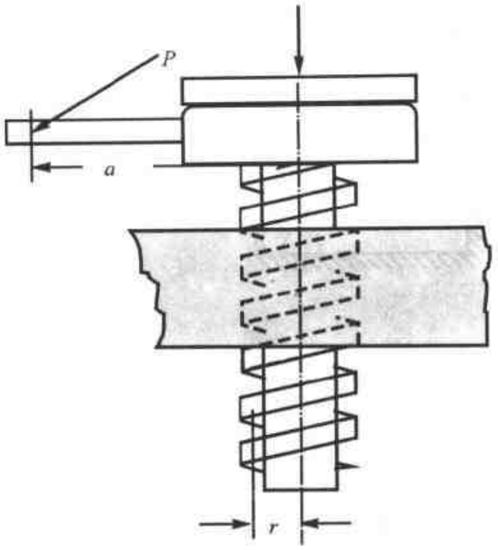


图 9-2

螺旋间的摩擦力所需的力矩，等于 $W\mu r_c$，称之为摩擦力矩. 其中 W 是载荷，μ 是垫片与螺旋之间的摩擦系数，r_c 是垫片到螺旋间支承表面的平均半径.

9.4 摩擦带和制动带

摩擦带和制动带也是利用摩擦的例子. 当摩擦带与制动带围绕滑轮时，滑轮两边带中的张力不等. 当滑动出现时，应用下面公式：

$$T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}$$

T_1 是较大张力；T_2 是较小张力；μ 为摩擦系数；α 为包角弧度；$e = 2.718$(自然对数的基).

9.5 滚动摩阻

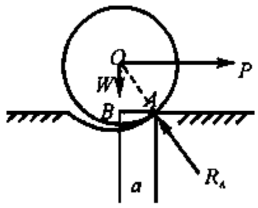


图 9-3

滚动摩阻是由于在滚动载荷作用下，支承表面的变形引起的，见图 9-3 所示. 车轮重 W，半径为 r，水平力 P 将其在 A 点拉出洼地，自然，这是车轮滚动的连续过程.

车轮上所有力关于 A 点之矩求和为零，得下面方程：

$$\sum M_A = 0 = W \times a - P \times (OB)$$

因为洼地很小，则距离(OB)用 r 表示，则

$$P \times r = W \times a$$

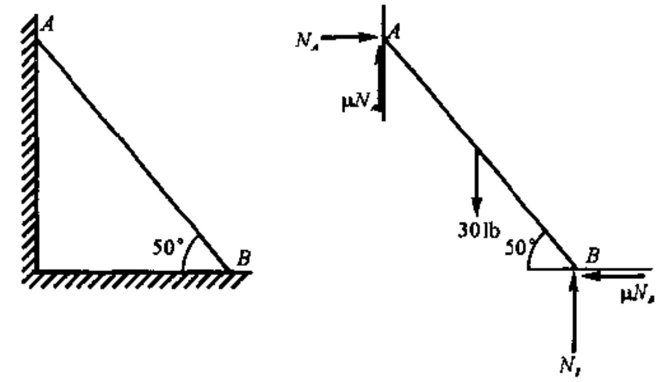
地面反力 R_A 的水平分量等于P，并称之为滚动摩阻. 距离 a 称为滚动摩擦系数，单位是英寸或毫米. 滚动摩擦系数与各种材料的对应值已列出表格.

例　题

9.1 一个 12 ft 长的梯子重 30 lb，它静止于水平地面上，并斜靠在垂直的墙上，如图 9-4(a)，使之平衡的最小摩擦系数是多少？

解 在隔离体图 9-4(b)中，画出了重力 30 lb，A，B 点有支持力和静摩擦力 μN_A 和 μN_B，平衡方程为

$$\sum F_x = 0 = N_A - \mu N_B \tag{1}$$



(a)　　(b)

图 9-4

$$\sum F_y = 0 = N_B + \mu N_A - 30 \tag{2}$$

$$\sum M_A = 0 = -30(6\cos 50^\circ) + N_B(12\cos 50^\circ) - \mu N_B(12\sin 50^\circ) \tag{3}$$

将由(1)得来的 N_B 的值代入(2)式，可得 $N_B = \dfrac{30}{1+\mu^2}$. 用 N_B 的值，由(3)式可得

$$-30(6\cos 50^\circ) + \frac{30}{1+\mu^2}(12\cos 50^\circ) - \frac{30}{1+\mu^2}(12\sin 50^\circ) = 0$$

解得 $\mu = 0.36$.

9.2 均质梯子长 l，斜靠在墙上，试求维持平衡的最小 θ 角值. 所有接触面的摩擦系数均是 μ.

解 ☞ 画梯子的隔离体图，假设马上要开始滑动. 有 3 个未知量 N_1，N_2 和 θ（见图 9-5）. 列出 3 个平衡方程为

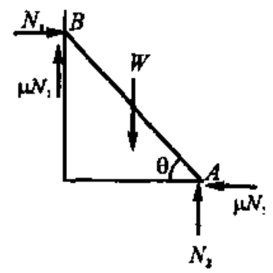


图 9-5

$$\sum F_h = 0 = N_1 - \mu N_2 \tag{1}$$

$$\sum F_v = 0 = N_2 - W + \mu N_1 \tag{2}$$

$$\sum M_B = 0 = W\frac{1}{2}l\cos\theta + N_2 l\cos\theta - \mu N_2 l\sin\theta \tag{3}$$

将 $N_1 = \mu N_2$ 代入(2)式得

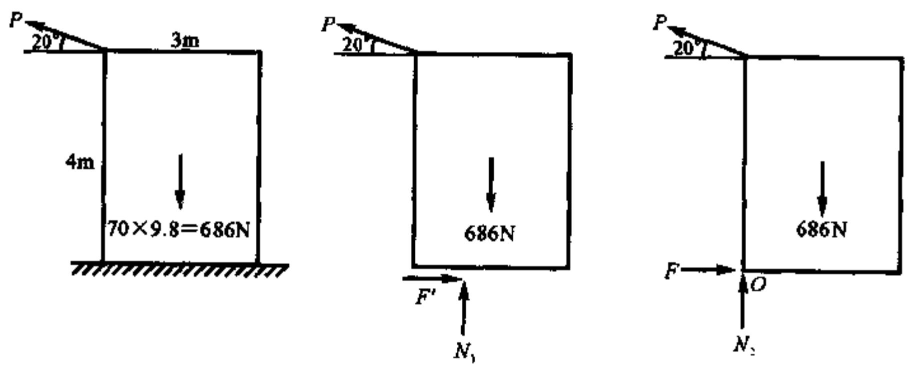
$$N_2 = W/(1+\mu^2)$$

将 N_2 的值代入(3)式得

$$\theta = \arctan[(1-\mu^2)/2\mu]$$

当 θ 小于此值时将发生滑动.

9.3 确定使图 9-6(a)中的 70 kg 的物块发生运动的 P 值. 滑块与地面之间的静摩擦系数为 1/4.



(a)　　(b)　　(c)

图 9-6

解 ☞ 假设 P 是逐渐地作用上去的，则有两种形式的运动可能发生. 物块可能会向左滑动或绕 O 点发生倾斜.

首先，确定 P 值时得物块向左滑动. 此种情况下的受力情况如图 9-6(b)所示，列方程为

$$\sum F_v = 0 = P\sin 20° - 686 + N_1 \tag{1}$$

$$\sum F_h = 0 = P\cos 20° + F' \tag{2}$$

因为 $F' = \mu N_1 = \frac{1}{4}N$，代入(2)式，则该式化为

$$P\sin 20° + N_1 = 686 \tag{3}$$

$$-P\cos 20° + \frac{1}{4}N_1 = 0 \tag{4}$$

或者

$$P\sin 20° + N_1 = 686 \tag{5}$$

$$4P\cos 20° - N_1 = 0 \tag{6}$$

将方程(5)和(6)联立得 $P = 167$ N.

参见图 9-6(c)，假设物块将围绕 O 点翻倒，确定满足此种情况的 P 值. 但是，在这里不需求出摩擦力的大小.

如图 9-6(c)所示，力 F 必须标出，因为物块被假设处于即将倾倒状态. 所以法向反力作用在 O 点，平衡方程如下：

$$\sum F_O = 0 = P\cos 20° \times 4 - 686 \times \frac{3}{2} \tag{7}$$

$$\sum F_h = 0 = -P\cos 20° + F \tag{8}$$

$$\sum F_v = 0 = P\sin 20° + N_2 - 686 \tag{9}$$

平衡方程(7)可直接解出 $P = 274$ N. 分析到这里，因为产生滑动时的力 $P = 167$ N，而产生滚动时 $P = 274$ N，因而显而易见，随着力 P 的不断从 0 到大的增加，物块将先产生滑动.

9.4 如图 9-7(a)所示，物块重 $W = 200$ lb，受到水平向左的力 300 lb，问物块是否静止？静摩擦系数为 0.3.

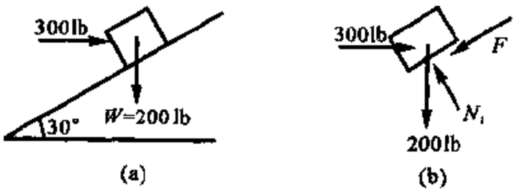


图 9-7

解 ☞ 题中静摩擦力不一定恰好等于最大静摩擦力，所以先假设 300 lb 的力足够使物块不从斜面上滑下来，并且足够大使物块有向上滑动的可能，为了检验这一假设，设摩擦力 F 沿斜面向下如图 9-7(b)所示.

将各力分别分解到平行于斜面和垂直与斜面的方向上，并列出平衡方程：

$$\sum F_{\parallel} = 0 = -F - 200\sin 30° + 300\cos 30°$$

$$\sum F_{\perp} = 0 = N_1 + 200\cos 30° - 300\sin 30°$$

解出 $F = 160$ lb, $N_1 = 323$ lb.

这说明使该物块处于静止状态所需的摩擦力 $F = 160$ lb，然而物块可获得的最大值 $F' = 0.3\ N_1 = 0.3 \times 323 = 97$ lb，这也就是说该物块不会静止，而是沿斜面向上滑动，那么该物块开始滑动后的运动状态将是怎样，将在以后的章节中研究.

9.5 如图 9-8(a)所示，试求需要多大的水平力 P 作用于楔块B 和C 上才能够使作用有 20 吨力的 A 升起？设楔块和地面之间的摩擦系数为 $\mu = \frac{1}{4}$，楔块与 A 之间的摩擦系数 $\mu =$

0.2,并且载荷均匀.

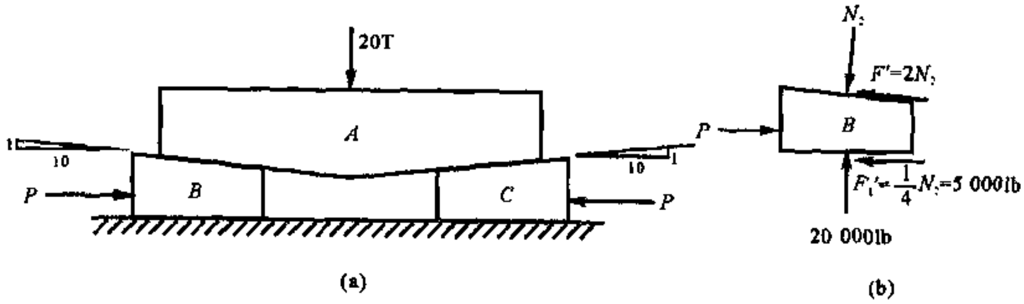


图 9-8

解 ☞ 考虑整体隔离体图,很显然在地面与楔块之间的法向约束反力为 10 吨或 20 000 lb.

分析楔块 B 受力如图 9-8(b),力 20 000 lb 垂直向上,地面与楔块间的摩擦力与运动方向相反.当物体发生移动时,它所受的摩擦力为$\frac{1}{4}\times 20\ 000\ \text{lb}=5\ 000\ \text{lb}$. A 作用于 B 上的力垂直与它们的接触面,而 F' 是与移动方向相反的极值摩擦力,将物体 B 从整体中分离,画它的隔离体图,则可列出平衡方程式

$$\sum F_h = 0 = P - 5\ 000 - N_2\frac{1}{\sqrt{101}} - 0.2N_2\frac{10}{\sqrt{101}} \tag{1}$$

$$\sum F_v = 0 = 20\ 000 - N_2\frac{10}{\sqrt{101}} + 0.2N_2\frac{1}{\sqrt{101}} \tag{2}$$

由方程(2)可得 $N_2=20\ 500$ lb,代入方程(1)则可得 $P=11\ 100$ lb.

9.6 物块 B 放置在物体 A 上,且其被水平细绳 BC 连结在墙上,如图 9-9(a)所示.问当 P 多大时能使 A 发生移动? A 和 B 间的系数为 1/4, A 与地面的摩擦系数为 1/3, A 的质量为 14 kg, B 的质量为 9 kg.

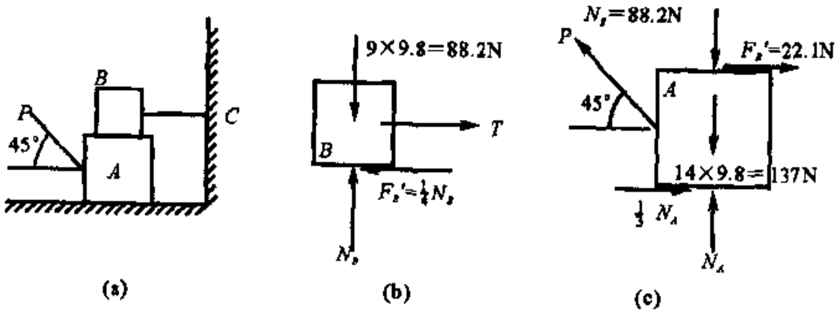


图 9-9

解 ☞ 当 A 有向左移动的趋势时,由于摩擦作用 B 也有运动趋势.B 的隔离体图画上 F'_B 指向左,见图 9-9(b).由 B 所受垂直方向的力的总和,得 $N_B=88.2$ N,因此 $F'_B=22.1$ N.

要 B 不移动,则绳的张力 $T=22.1$ N.

将 A 从整体分离,画出受力图如图 9-9(c),摩擦力 F'_B 方向向右,与其运动方向相反,则可得平衡方程式为,

$$\sum F_h = 0 = -P\cos45^\circ + \frac{\mu_A}{3} + 22.1 \tag{1}$$

$$\sum F_v = 0 = P\sin45^\circ + N_A - 137 - 88.2 \tag{2}$$

因为 $\sin 45^\circ=\cos45^\circ$,把两个方程相加得 $N_A=152$ N,将 N_A 代入(2)式得 $P=104$ N.

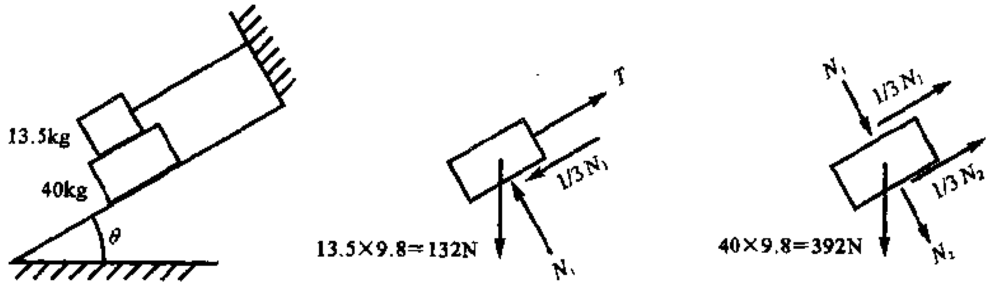
9.7 为使 40 kg 的物块自由滑落，θ 角应为多大？(所有接触面间摩擦系数均为 $\mu=1/3$，如图 9-10(a)所示.

解 ☞ 将两物块分离出来，并做出它们的受力图(b)(c)，并利用由在水平方向和铅直方向各力的求和等于零的方程，由 13.5 kg 质量的隔离体图得，$N_1=132\cos\theta$，由对 40 kg 的物块的受力分析得：

$$\sum F_{\parallel}=0=-392\sin\theta+\frac{1}{3}N_1+\frac{1}{3}N_2 \quad (1)$$

$$\sum F_{\perp}=0=N_1-392\cos\theta-N_1 \quad (2)$$

将 $N_1=132\cos\theta$ 代入(1)(2)，再消去 N_2，可得 $\theta=29.1°$.



(a) (b) (c)

图 9-10

9.8 一个重 350 lb 的物块放在倾斜角为 30°的斜面上，如图 9-11 所示，物块与斜面间静摩擦角为 15°，当外力 P 多大时物块才能不下滑？

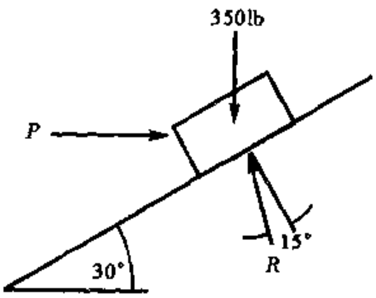


图 9-11

解 ☞ 因为 P 的一个微小减小就能导致物块下滑，所以可用摩擦力的极限值. 全约束反力 R 的作用线与法线方向夹角 15°.

应该注意，使用静摩擦角时，物体处于临界状态.

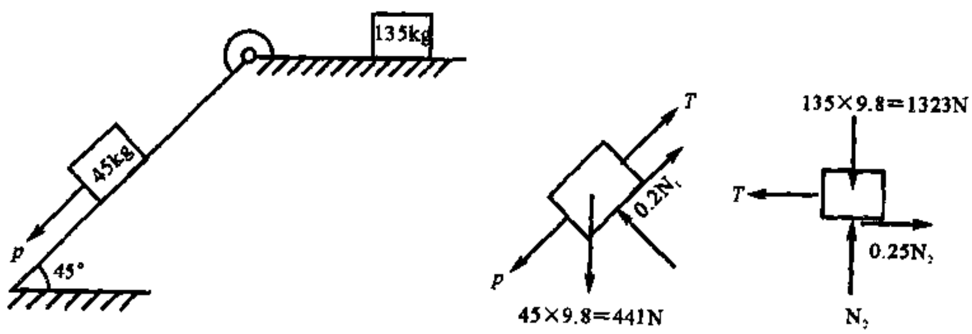
由该物块所有力在水平和铅直方向求和为零，得到平衡方程为，

$$\sum F_{\parallel}=0=P\cos30°-350\sin30°+R\sin15° \quad (1)$$

$$\sum F_{\perp}=0=R\cos15°-350\cos30°-P\sin30° \quad (2)$$

由方程(1)乘以 cos15°减去方程(2)乘以 sin15°，得到 $P=93.4$ lb.

9.9 如图 9-12(a)所示. 试求与平面平行的力 P 多大，才能使得系统开始运动. 设摩擦系数为 0.25，假设滑轮无摩擦.



(a) (b) (c)

图 9-12

解　☞ 对两物块作如图(b)(c)的受力分析，绳的拉力以 T 表示.

由图(c)可得 $N_2 = 1323$ N，所以 $T = 0.25\ N_2 = 331$ N. 由图(b)知，$N_1 = 441\cos45° = 312$ N，即 $F'_1 = 78$ N. 将各力在斜面方向上投影，得 $\sum P = 0 = P + 441\times0.707 - 331 - 78$，即 $P = 97.2$ N.

9.10　见图 9-13(a)，试求力 P 多大，才能使系统运动？设摩擦系数为 0.20.

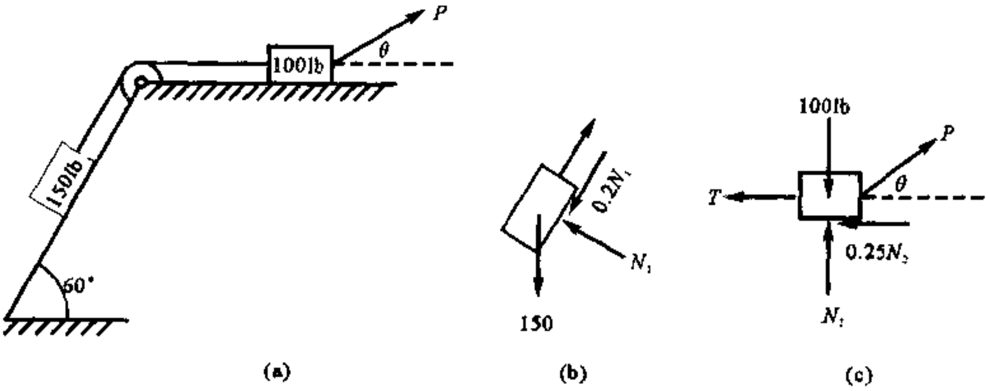


图 9-13

解　☞ 画两重物的隔离体图，注意 P 与水平方向的夹角未知，通过观察，得 $N_1 = 150\cos60° = 75$ lb；$T = 0.20N_1 - 150\cos30° = 145$ lb. 列出重 100 lb 的物体的平衡方程为

$$\sum X = \sum F_h = 0 = P\cos\theta - 0.20N_2 - 145 \tag{1}$$

$$\sum Y = \sum F_O = 0 = P\sin\theta + N_2 - 100 \tag{2}$$

联立这两个方程，消去 N_2 得

$$P = \frac{16.5}{\cos\theta + 0.20\sin\theta}$$

当$(\cos\theta + 0.20\sin\theta)$达到最大值时，$P$ 的值最小. 把分母对 θ 求导，使之为 0，此时的 θ 值即可使 P 为最小值.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta + 0.20\theta) = -\sin\theta + 0.20\cos\theta = 0 \quad 即\ \theta = \arctan0.20 = 11°20'$$

所以，P 的最小值为

$$P = \frac{16.5}{\cos11°20' + 0.20\sin11°20'} = 162\ \text{lb}$$

9.11　看图 9-14，180 N 的力能否使 100 kg 的圆柱体滑动？接触面的摩擦系数为 0.25.

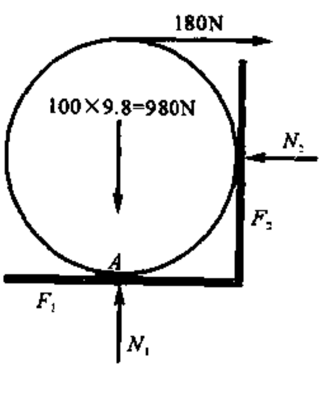


图 9-14

解　☞ 因为不知道圆柱体是否滑动，所以我们不能认为 $F_1 = \mu N_1$ 和 $F_2 = \mu N_2$. 故把 N_1, N_2, F_1, F_2 都作为未知数，平衡方程为

$$\sum X = 0 = F_1 - N_2 + 180 \tag{1}$$

$$\sum Y = 0 = N_1 + F_2 - 980 \tag{2}$$

$$\sum M_A(F) = 0 = -180\times2r + F_2\times r + N_2\times r \tag{3}$$

根据 F_2 解 N_1、N_2 和 F_1，有 $N_1 = 980 - F_2$，$N_2 = 360 - F_2$，$F_1 = 180 - F_2$.

我们假设 F_2 达到它的最大值，即 $F_2 = 0.25\ N_2$，并且结合(1)(2)(3)式可解得 $N_2 = 288N$，$N_1 = 908$ N，$F_1 = 108$ N.

表明，F_2 取得最大值时，$F_1 = 108$ N，才能保持系统平衡. 由 F_1 的最大值等于 $0.25\ N_1 = 227$ N，可知圆柱体没有转动.

9.12　见图 9-15(a)，可以使钳子能够夹住质量为 m 的物体的最小摩擦系数是多少？

解 ☞ 由钳子和物体 m 的受力图可以得出 $P=mg$.

由钳子中销的受力图9-15(b),得

$$\sum F_y = 0 = P - 2T \times \frac{9}{15} \quad 得\ T = \frac{5mg}{6}$$

分析质量块 m 的受力图9-15(c),得

$$\sum F_y = 0 = 2\mu N - mg \quad 得 \quad \mu N = \frac{mg}{2}$$

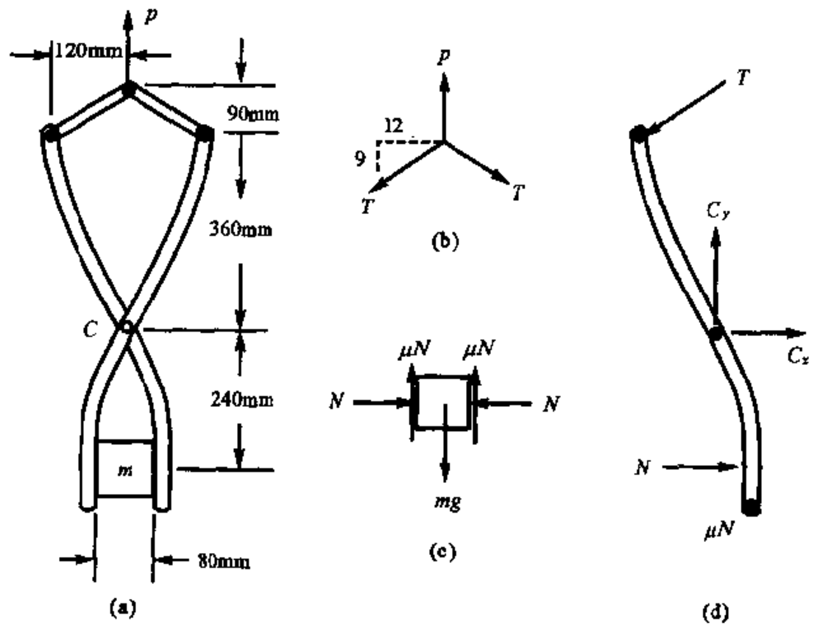


图9-15

将一个钳臂单独分离出来分析,如图9-15(d),这里

$$\sum M_C = 0 = -T \times \frac{12}{15} \times 360 - T \times \frac{9}{15} \times 120 + N \times 240 - \mu N \times 40$$

将已求量代入:

$$-\frac{5mg}{6} \times \frac{12}{5} \times 360 - \frac{5mg}{6} \times \frac{9}{15} \times 120 + N \times 240 - \frac{mg}{2} \times 40 = 0$$

所以

$$N = \frac{(240+60+20)mg}{2400} = \frac{4mg}{3}$$

最后

$$\mu = \frac{\mu N}{N} = \frac{\frac{mg}{2}}{\frac{4mg}{3}} = 0.38$$

9.13 见图9-16,铜块 A 与铝块 B 之间摩擦系数是0.3, B 块与地面间的摩擦系数是0.2. A 块质量是3 kg, B 块质量是2 kg.试问 P 力多大可使物块 A 发生运动?

解 ☞ 本题具有复合类型滑动问题的特征,即运动的临界状态不只一种.分析本题可归纳为4步.

1. 假设可能的滑动方式.

2. 在所有可能产生滑动的表面,计算阻止滑动所必需的摩擦力.

3. 检查是否有足够大的摩擦力,阻止各接触面滑动.(检查各表面的摩擦力是否达到最大摩擦力值)

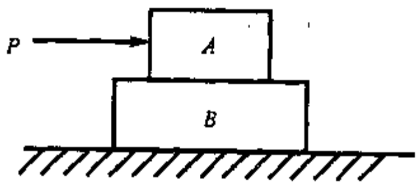


图9-16

4．如果摩擦力没有达到极值，则问题已解；若已达到极值，则重新选用可能的滑动方式求解.

在本题中，假设 A 在 B 上即将滑动，而 B 与地面不动.画隔离体图如图 9-17 所示，因为假设 B 与地面之间没有滑动则 $F'_B \neq 0.2\ N_B$.列平衡方程为

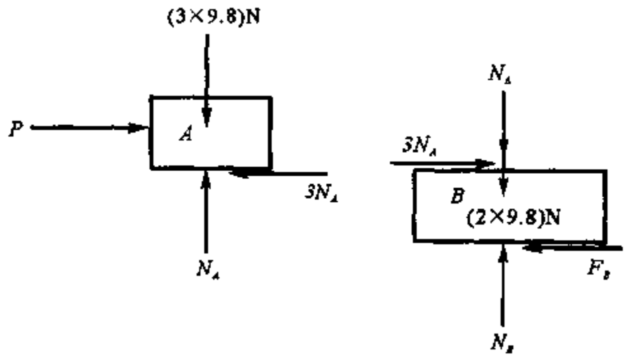


图 9-17

对于 A，

$$\sum F_v = N_A - 29.4 = 0$$

$$\sum F_h = P - 0.3N_B = 0$$

对于 B，

$$\sum F_v = N_B - N_A - 19.6 = 0$$

$$\sum F_h = 0.3N_A - F_B = 0$$

解出，$F_B = 8.82$ N，$N_B = 49$ N. B 与地间摩擦力的最大值为 $F'_B = 0.2\ N_B = 9.8$ N.而维持以上的平衡状态只需 $F_B = 8.82$ N，没有达到最大摩擦力，即物块 B 没有运动，假设成立.如果 $F_B > F'_B$，说明 B 物块出现滑动，则前面假设不成立.在这种情况下，应重新用 $F'_B = 0.2\ N_B$ 和 $F'_A \neq 0.3\ N_A$ 求解.

由平衡方程求出 P，即 $P = 8.82$ N.

9.14 如图 9-18，有两个圆柱体，每个重 W，半径为 r，放在宽为 $3r$ 的盒子里，盒子的内壁为光滑的.圆柱 A 与盒子底之间的摩擦系数为 0.12，两圆柱间的摩擦系数为 0.3，求可使圆柱 B 即将运动的力偶 M 的大小.

解 ☞ 对即将运动的 B 有两种可能的方式：

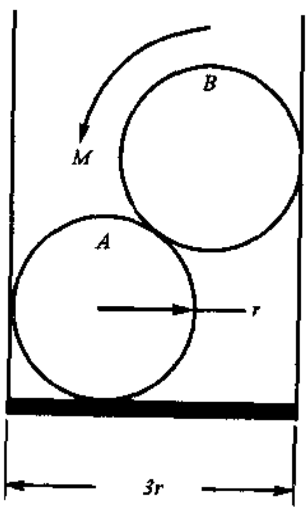


图 9-18

(a) B 逆时针旋转，A 不动

(b) B 逆时针旋转，由于摩擦 A 顺时针旋转

先假设(a)成立，在这种情况下，受力分析如图 9-19，$F_2 = 0.3\ N_2$，但 $F_3 \neq 0.12\ N_3$.

平衡方程式为

对于 A

$$\sum F_v = N_3 - N_2\sin60° - 0.3N_2\cos60° - W = 0$$

$$\sum F_h = N_4 + F_3 - N_2\cos60° + 0.3N_2\sin60° = 0$$

$$\sum M_O = F_3 r - 0.3N_2 r = 0$$

对 B

$$\sum F_v = N_2\sin60° + 0.3N_2\cos60° - W = 0$$

$$\sum F_h = -N_1 + N_2\cos60° - 0.3N_2\sin60° = 0$$

$$\sum M_{O'} = M - 0.3N_2 r = 0$$

解出

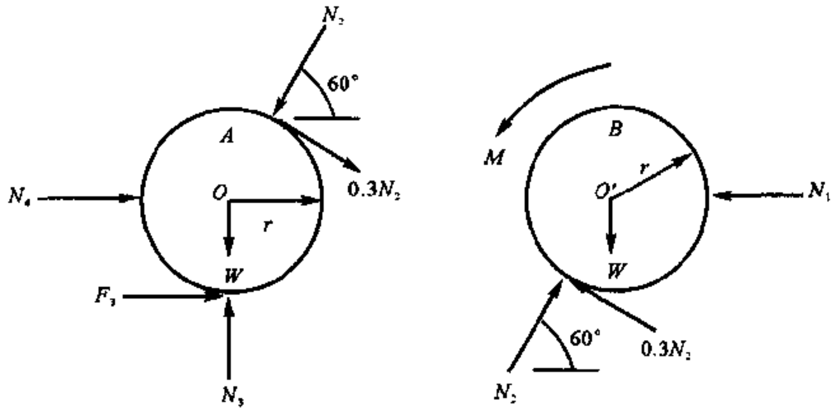


图 9-19

$$F_3 = 0.295W, \quad N_3 = 2W$$

因为 $F'_3 = \mu_3 N_3 = 0.24W$，而且 $F_3 > F'_3$，在圆柱 A 和地面间有滑动出现。所以假设不成立。即(b)情况为圆柱体 B 的可能的运动。

受力分析如图 9-20，平衡方程如下：

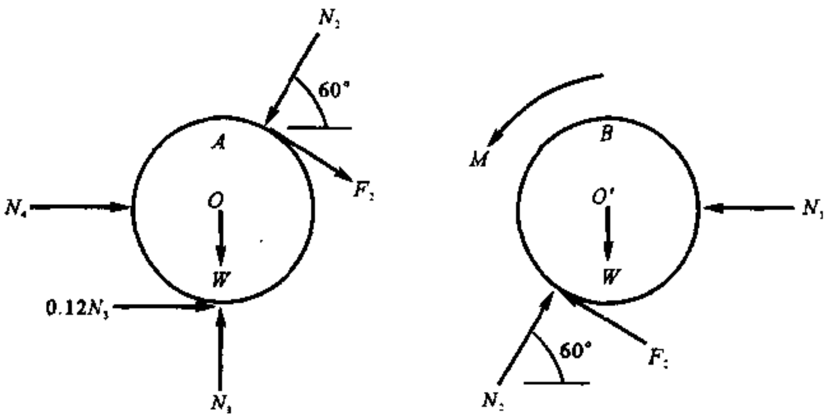


图 9-20

对于 A

$$\sum F_v = N_3 - N_2\cos60° - N_2\sin60° - W = 0$$

$$\sum F_h = N_4 + 0.12N_3 + F_2\sin60° - N_2\cos60° = 0$$

$$\sum M_O = 0.12N_3 r - F_2 r = 0$$

对于 B

$$\sum F_v = N_2\sin60° + F_2\cos60° - W = 0$$

$$\sum F_h = -N_1 + N_2\cos60° - F_2\sin60° = 0$$

$$\sum M_{O'} = M - F_2 r = 0$$

解得

$$F_2 = 0.24W, \quad M = 0.24Wr$$

为确定假设(b)正确与否，计算 $N_2 = 1.02W$，$F'_2 = 0.306W$。

由于 $F'_2 > F_2$，所以两圆柱之间没有运动趋势。

除了以上所研究的两种情况外，还有一种可能性为圆柱 B 将滚过圆柱 A，要使其不会发生，N_1 必须是正值，由图 9-20 可知，圆柱 B 水平方向的平衡方程为

$$\sum F_h = -N_1 + N_2\cos60° - F_2\sin60° = 0, \quad N_1 = 0.302W$$

这表示圆柱体 B 不会离开墙壁。

综上可知，$M=0.24Wr$ 时有运动趋势.

9.15 一方螺纹螺栓的平均直径为 2 in，螺距为 1/4 in，摩擦系数 $\mu=0.15$，为了举起 4000 lb 的重物需在与螺旋纵向轴的垂直方向的 2 英尺处加多大的力？为使重物下降需多大的力？

解 ☞ 为了举起重物，应用 9.3 节的公式(a)：$M=W_r\tan(\phi+\beta)$.

转动力矩 M 等于力和力臂的乘积，$\tan\phi=0.15$ 或 $\phi=8.5°$

$$\beta=\arctan\frac{\text{螺距}}{\text{圆周长}}=\arctan\frac{0.25}{\pi 2}=\arctan 0.0397=2.27°$$

$M=P\times 24=4000\times 1\ \tan(8.53°+2.27°)$，因此，$P=31.8$ lb(能举起重物)，为使重物下降所需的力，应用公式 $M=W_r\tan(\phi-\beta)$.

$M=P\times 24=4000\times 1\ \tan(8.53°-2.27°)$，因此，$P=18.3$ lb(能降低重物).

9.16 一千斤顶每英寸有 4 条螺纹. 螺纹的平均半径为 2.338 in. 帽底的轴承的平均直径为 3.25 in，各面间摩擦系数均为 0.26. 需加多大的力矩才能举起 1500 lb 的重物？

解 ☞ 如同理论中指出的那样，施加外力矩，以克服帽与螺旋摩擦.

$M=W_r\tan(\phi+\beta)+\mu Wr_c$，$r_C$ 为在帽与螺旋之间轴承的平均半径值

$$\phi=\arctan 0.06=3.43°,\ \beta=\arctan 0.25/(2\pi\times 2.338)=1.00°$$

$$M=1500\times 2.338\tan(3.43°+1.00°)+0.06\times 1500\times(3.25/2)=418\text{lb-in}$$

9.17 两个直径都为 750 mm 的滑轮，由一条皮带连结，并且皮带都绕过半个滑轮. 皮带拉紧一端张力为 200 N. 设摩擦系数为 0.25，问当皮带将滑动时松弛一端的张力为多大？

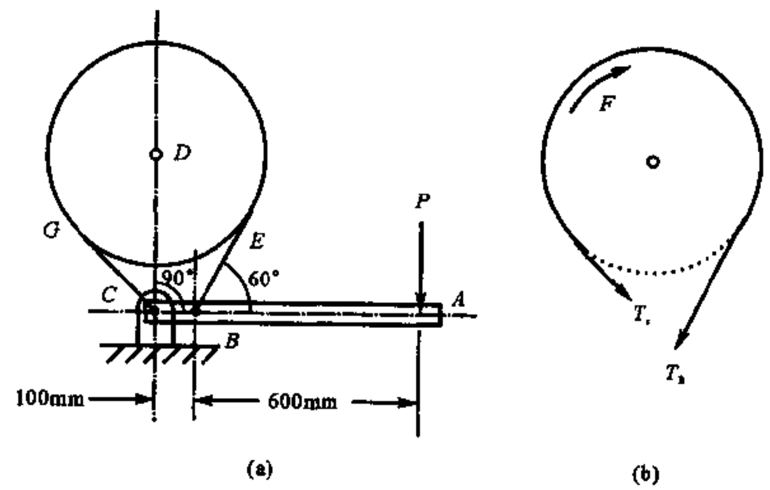


图 9-21

解 ☞ 每个滑轮被围绕角度为 180°或 π(rad)，应用方程 $T_1=T_2e^{\mu\beta}$，我们得到：

$$200=T_2\times e^{\pi(0.25)}\quad \text{或}\quad T_2=91.2\ \text{N}$$

9.18 如图 9-21(a)，一直径为 635 mm 的鼓轮被一闸带环绕，被作用在水平杆 AC 上的垂直力 $P=178$ N 拉紧. 设在轮与带间摩擦系数为 1/3，忽略其他摩擦. 问当鼓轮将产生顺时针旋转时瞬时制动的力矩为多大？

解 ☞ 在分析鼓轮顺时针转动中，发现作用在鼓轮上的摩擦力 F 起反向作用，即，转向为逆时针，大小相同的摩擦力作用在皮带上，但方向相反，研究皮带隔离体图，张力 T_C 必须大于 T_B，这样它可以保证 T_B 和 F 的平衡.

由水平杆上各力对 C 点之矩求和为零，得到，

$$\sum M_C=0=T_B\sin 60°\times 100-178\times 760\quad \text{即}\quad T_B=1560\ \text{N}$$

在应用张力公式前必须先找到包绕角度，图 9-22 描述了三角关系问题. 先计算出 θ 的数值.

在图 9-22(a)中，

$$CD = \frac{DF}{\sin 30^\circ} = \frac{DE - EF}{\sin 30^\circ} = \frac{317.5 - HE\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$
$$= \frac{317.5 - 100\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 462\text{mm}$$

由图 9-22(b)

$$\theta = \arcsin\frac{GD}{CD} = \arcsin\frac{317.5}{462} = 43.4^\circ$$

由图 9-22(c),绳在圆柱上绕过的圆心角为

$$180^\circ + 30^\circ + 43.4^\circ = 253.4^\circ = 4.4227\ \text{rad}$$

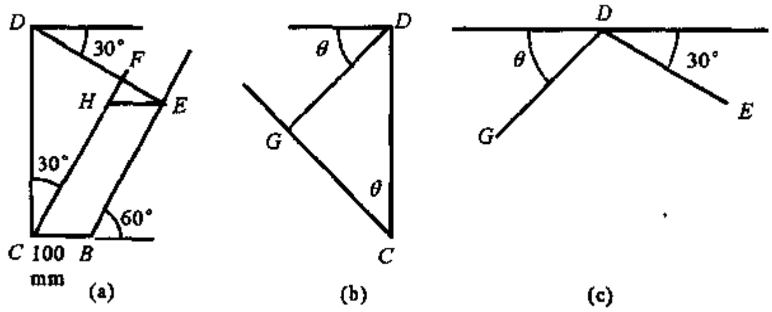


图 9-22

$T_C > T_B$,即 $T_C = T_B e^{\alpha\mu} = 6814$ N

因此,制动力矩是$(T_C - T_B) \times 317.5 = (6814 - 1560) \times 317.5 = 1670$ N·m.

9.19 一绳在水平柱上缠绕4圈,在拉力 $F = 10$ lb 下可吊起 1000 lb 的重物,求柱子绳间的摩擦系数.

解 ☞ 由公式 $T_1 = T_2 e^{\alpha\mu}$,其中 $T_1 = 1000$ lb, $T_2 = 10$ lb. 并且 $e^{\alpha\mu} = 100$

而 $\alpha = 4 \times 2\pi$ rad. 由指数表可查得, $e^{4.605} = 100$.

所以 $\alpha\mu = 8\pi\mu = 4.605$, 即 $\mu = 0.18$.

9.20 一绳在水平柱上缠绕两圈,设绳与柱之间摩擦系数 $\mu = 0.20$,求吊起 900 kg 重物需在绳上施加的力.

解 ☞ 由方程 $T_1 = T_2 e^{\alpha\mu}$,其中 $T_1 > mg = 900 \times 9.8$ N. 且拉力 $T_2 = 8820/e^{\alpha\mu}$, $\alpha = 2 \times 2\pi$ rad 和 $\mu = 0.20$. 解得 $T_2 = 714$ N.

9.21 直径为 760 mm 的钢轮在水平钢轨上滚动,钢轮载重 500 N,滚动摩擦系数为 0.305 mm,要使钢轮沿钢轨滚动需施加多大的力 P?

解 ☞

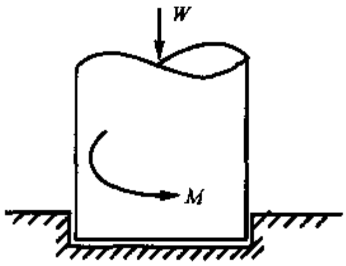
$$P = \frac{Wa}{r} = \frac{500 \times 0.305}{380} = 0.4\ \text{N}$$

9.22 直径为 D 的圆柱静止在如图 9-23(a)所示的支撑物上,圆柱受到 W lb 的压力,假设摩擦系数为 μ,求使该物体开始旋转力矩 M.

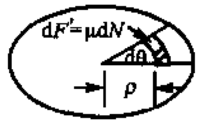
解 ☞ 摩擦阻力 dF 作用在微分面积 $dA = \rho d\rho d\theta$,如图 9-23(b)所示,对圆柱体中心轴的摩擦力矩为 $\rho dF'$. 但是这个微分上的法向力等于此微分面积乘以单位载荷,而此单位载荷是总重量除以总面积,因此,我们可以得到

$$dF' = \mu dN = \mu - \frac{W}{\frac{1}{4}\pi D^2}\rho d\rho d\theta$$

$$M = \int_0^{D/2}\int_0^{2\pi} \rho\, \frac{4\mu W}{\pi D^2}\rho d\rho d\theta$$
$$= \int_0^{D/2} \frac{4\mu W}{\pi D^2}\rho^2 d(2\pi) = \frac{8\mu W}{D^2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{D/2} = \frac{\mu WD}{3}$$



(a)



(b)

图 9-23

补充习题

9.23 一个夹紧机构在如图 9-24 所示的 3 块物体上施加了 100 N 的法向力，施加多大的力 P 可使此系统发生移动？物块间的摩擦系数为 0.30.

答案：$P = 60$ N.

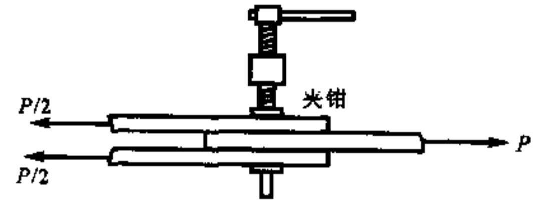


图 9-24

9.24 一均质梯子，长 18 ft，重 120 lb，静靠在光滑墙上. 梯子与地面的夹角是 70°，其间摩擦系数是 1/4. 重 180 lb 的人，登上梯子何处时，梯子发生滑动？

答案：14.6 ft.

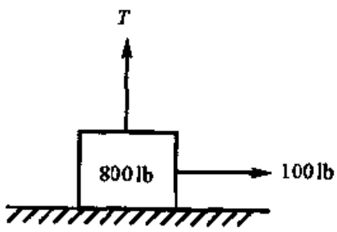


图 9-25

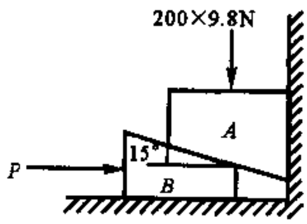


图 9-26

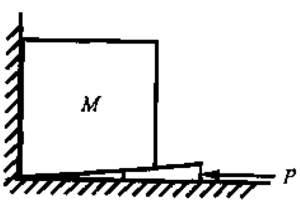


图 9-27

9.25 一人用 100 lb 的水平力拉重物，该重物重 800 lb，静止放在水平地面上，与地面之间的摩擦系数是 0.20. 铅直绳子系在重物的顶部如图 9-25 所示. 试问此绳中拉力多大时，人正好能拉动重物向右运动？

答案：$T = 300$ lb.

9.26 见图 9-26，重 200×9.8 N 的物块 A 静置于楔体 B 上，如果所有接触表面的摩擦系数都是 0.2，试求多大的水平力才能维持此状态？

答案：1510 N.

9.27 楔角为 5°的物块,受如图 9-27 所示的水平力 P,试求当力 P 多大时,500 kg 质量的物块 M 处于升起的临界状态?所有接触表面摩擦系数均为 0.25.

答案:$P = 3190$ N.

9.28 在图 9-28 中,楔角为 5°的小楔子劈在木块中,楔子与木块间的摩擦系数是 0.2;如果劈力为 200 lb,试求劈开木块的楔子上的法向支持力是多少?

答案:$N = 410$ lb.

9.29 见图 9-29,物块 A 质量 45 kg,静置在质量为 90 kg 的物块 B 上,并系水平绳子在墙之 C 点.如果 A 与 B 间的摩擦系数是 1/4,B 与表面间的摩擦系数是 1/3,试问水平力 P 多大,才能使物块 B 运动?

答案:$P = 550$ N.

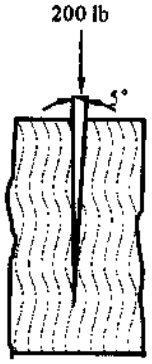


图 9-28

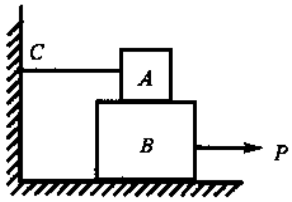


图 9-29

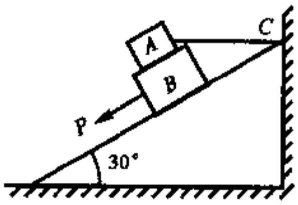


图 9-30

9.30 见图 9-30,物块 A 自重 60 lb 静置在重 80 lb 的物块 B 上.为阻止物块 A 运动,系一水平绳子在墙之 C 点.试问与水平面夹角 30°的斜平面平行的力 P 多大,才能使物块 B 沿斜面运动?设所有接触面的摩擦系数为 $\mu = 1/3$.

答案:$P = 40.3$ lb.

9.31 如图 9-31 立方体 A 质量为 8 kg,边长为 100 mm,$\theta = 15°$,当摩擦系数为$\frac{1}{4}$时,随着拉力 P 的逐渐增大,立方体滑动还是倾倒?

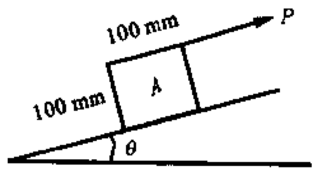


图 9-31

9.32 如图 9-32,物块 A 的质量为 23 kg,物块 B 的质量为 36 kg,A 与 B 之间的摩擦系数为 0.60,B 与平面间的摩擦系数为 0.20,绳子和鼓轮间的摩擦系数为 0.30,求使系统处于临界运动状态的最大质量 M.

答案:$M = 18.9$.

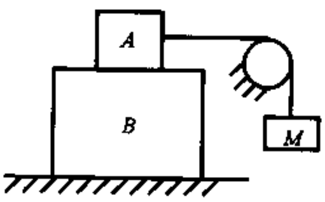


图 9-32

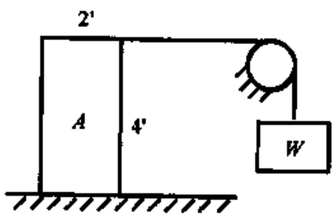


图 9-33

9.33 如图 9-33,均质物体 A 重 120 lb,A 与平面间的摩擦系数为 0.30,绳子和鼓轮之间的摩擦系数为 $2/\pi$.W 多重时,A 开始滑动?

答案:$W = 81.5$ N.

9.34 吊着重 50 lb 的物体 E 的绳子绕过滑轮,并固定在 A 端的一机构上,如图 9-34 所示.C 重 60 lb,要使平衡,外层绳子与滑轮的最小摩擦系数应为多少?

答案：$\mu=0.291$.

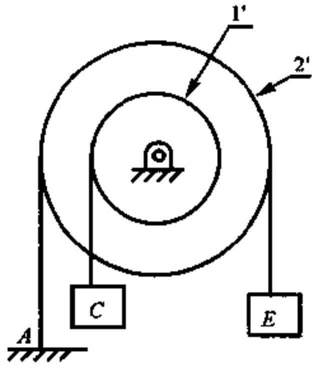


图 9-34

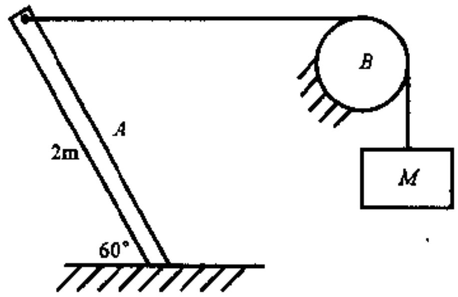


图 9-35

9.35 如图 9-35，均质杆 A，质量为 18 kg，长 2 m，与水平面成 60°角．质量为 7 kg 的物块 M 通过绳子与杆相连，与杆端相连的绳子为水平．绳与鼓轮 B 间的摩擦系数为 0.2，求平衡时杆与水平面间的最小摩擦系数．

答案：$\mu=0.284$.

9.36 如图 9-36，质量为 M 的物体与平面的静摩擦角为 ϕ，角度如图所示，求需用多大的力才能使物体拉上平面．

答案：$P=[9.8M\sin(\theta+\phi)]/[\cos(\beta-\phi)]$.

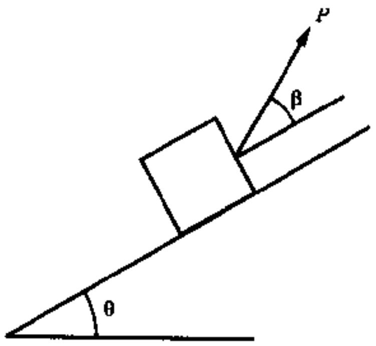


图 9-36

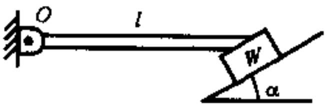


图 9-37

9.37 在 9.36 题中，给定 θ，证明 P 最小值为 $9.8M\sin(\theta+\phi)$.

9.38 长 l，重 w lb 的均匀直棒，如图 9-37 水平放置，架在一重 W 的块上，W 放置于一倾角为 α 的斜劈上．求物块与平面间的摩擦系数 μ．假定棒与物块间没有摩擦力．

答案：$\mu=(\sin2\alpha)/(w/W+2\cos^2\alpha)$.

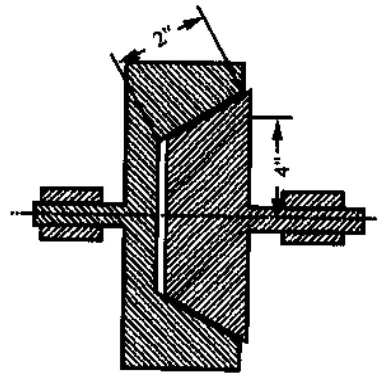


图 9-38

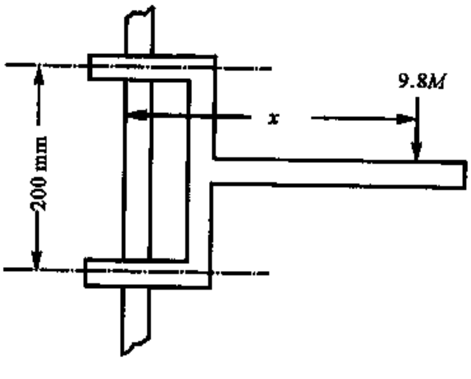


图 9-39

9.39 在图 9-38 中圆锥台嵌入配合面.假定配合部分被 10 psi 常压力压在一起.接触面面积等于 $2\times\pi\times8$,总压力为 10 倍的接触面的面积,如果 $\mu=0.35$,确定两面间摩擦力.

答案:$F=176$ lb.

9.40 如图 9-39 所示,一提升装置沿一截面为 75×75 mm^2 的垂直杆滑动,求 $9.8M$ 的力被作用在何处可使提升装置不受约束的滑下.假定 $\mu=0.25$.

答案:$x=438$ mm.

9.41 如图 9-40,360 kg 的均质物块,靠在竖直墙上,摩擦系数为 0.25.一个力 P 如图作用在左侧中点位置,求 P 在什么范围内可以不破坏平衡.

答案:$5260\text{ N}<p<7890\text{ N}$.

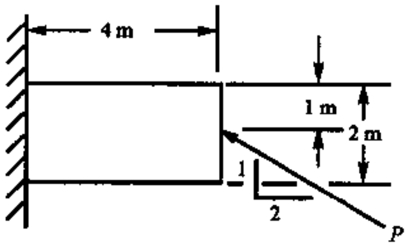


图 9-40

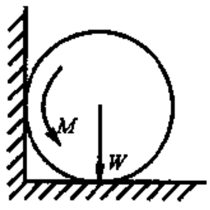


图 9-41

9.42 如图 9-41 所示,试求需要多大的力偶 M,能使重为 W,半径为 r 的圆轮刚好运动?所有接触表面摩擦系数均为 μ.

答案:$M=\mu Wr(1+\mu)/(1+\mu^2)$.

9.43 一个垂直的力 P 作用在水平杆 AB 上,使 20 kg 质量重物 M 保持静止,如图 9-42 所示.水平杆和直径为 30 mm 鼓轮的摩擦系数为 1/4,忽略鼓轮和水平杆的重力,确定多大的 P 能保持重物悬空静止.

答案:$P=327$ N.

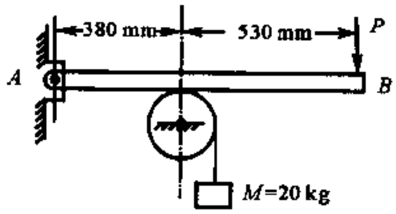


图 9-42

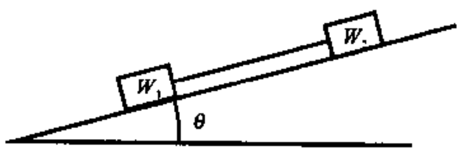


图 9-43

9.44 如图 9-43 所示,W_1 重 50 lb,W_2 重 30 lb,它们被平行于斜面的柔绳相连接,W_1 和斜面之间的摩擦系数为 1/4,W_2 与斜面的摩擦系数为 1/2,判断角 θ 为多大时,W_1 和 W_2 刚好发生滑动,柔绳的张力为多少?

答案:$\theta=190^\circ$,$T=4.4$ lb.

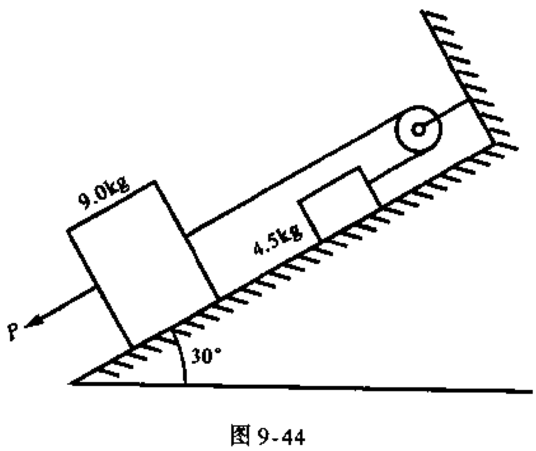


图 9-44

9.45 如图 9-44 所示，判断 P 多大时，系统刚好能运动. 两物块与斜面之间的摩擦系数为 0.25，力 P 和绳平行于斜面，滑轮摩擦忽略不计.

答案：$P = 6.6$ N.

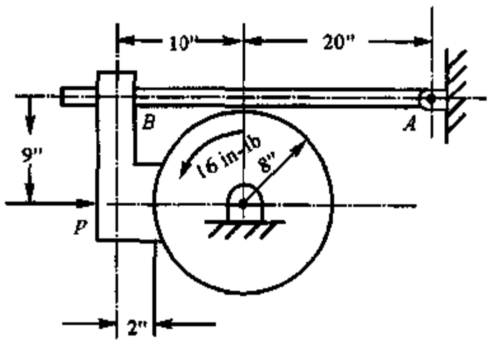


图 9-45

9.46 如图 9-45 所示，在鼓轮上作用 16 in-lb 的逆时针力矩，需要多大的水平力 P 才能阻止鼓轮运动? 闸与闸(B 为销连接)、闸与鼓轮间摩擦系数都是 0.40. 忽略闸总重量.

答案：$P = 3.43$ lb.

9.47 一质量 30 kg 的物体置于与水平方向成 45°的平面上. 摩擦系数为 1/3. 水平力 P 在什么范围内能阻止物体上下移动?

答案：147 N$<P<$588 N.

9.48 一物体刚好能静置于一与水平面成 θ 角的平面上，试确定能拉物体沿斜面向上运动最小的力 P.(提示：$\theta = \alpha$，设 θ 为稳定角，并假设 P 与平面成 β 角).

答案：$P = W\sin 2\theta$.

9.49 如图 9-46 所示，一匀质杆质量为 35 kg，需要多大的向右的力 P 才能使杆移动? 所有面摩擦为 0.30.

答案：$P = 246$ N.

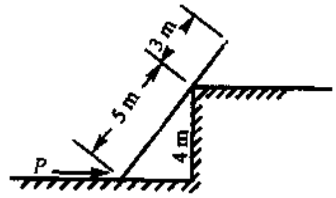


图 9-46

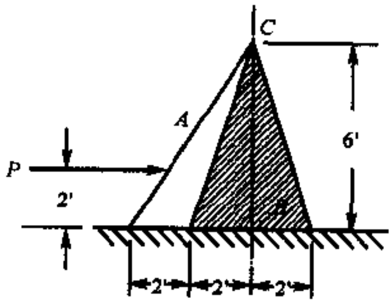


图 9-47

9.50 两等重量 W 的物块，可在水平面上滑行，物块与地面间摩擦系数为 μ. 长 l 的绳系于两物块之间，绳的中点处系一重量为 M 的重物，两物块间距离多远时能平衡?

答案：$x = \dfrac{l\mu(W + M/2)}{\sqrt{(M/2)^2 + \mu^2(W + M/2)^2}}$

9.51 一横截面为正 n 边形棱柱，放于水平面上. 一小虫在其中上向爬，虫与内表面间摩擦系数 μ. 证明小虫能达到的最高面(水平面计为 1)表达式为 $n/360 \times \arctan(\mu + 360/n)$.

9.52 如图 9-47 所示，无质量杆 A 与 600 lb 均质棱柱 B 在 C 点销连接. 一水平力作用于与水平面相距 2 ft 处. 如地面与杆、棱柱间摩擦系数为 0.4，需多大力 P 能使其发生运动? 分析棱柱滑动和翻倒.

答案：$P = 209$ lb.

9.53 如图 9-48 所示，均匀细平板，重 0.25 lb/in，支持面摩擦系数已知. 问：应施加多大的力偶 M 可以使圆盘有逆时针运动的趋势. 圆盘半径 6 in.

答案：9.72 lb-in.

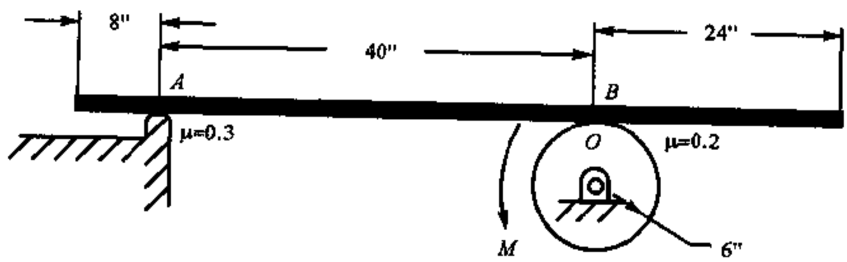


图 9-48

9.54 若在题9.53中，力偶 M 沿顺时针方向圆盘摩擦系数为0.1，则 M 为多大？
答案：7.56 lb·in.

9.55 若9.53题结果已知，问在水平方向上施加多大的力使平板有向右运动的趋势？
答案：3.24 lb.

9.56 如图9-49中，杆重12 lb，长6 ft，静止于支点和半径6 in的圆盘上，杆左端距支点1 in，轮重4 lb，摩擦系数如图，试求使圆轮开始运动的力 P 的大小？
答案：0.96 lb.

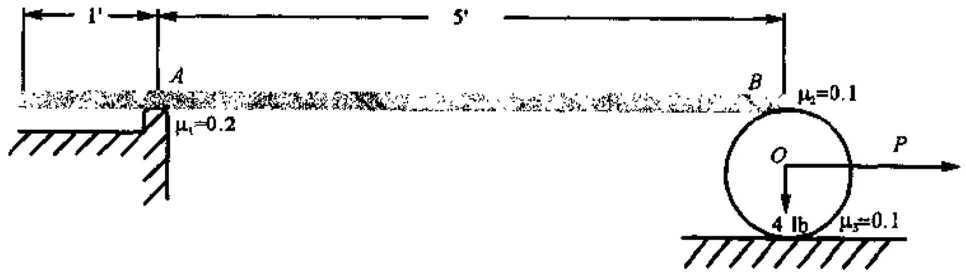


图9-49

9.57 用 $\mu_1=\mu_2=0.15$，求解题9.56.
答案：1.44 lb.

9.58 如图9-50中，方块 A 重15 N，轮 B 重20 N，A 和 B 被无重量的系绳相连，A 的摩擦系数0.25，B 的摩擦系数0.15，轮的直径1 m，求力偶 M 的值为多大使 B 开始运动？
答案：1.5 N·m.

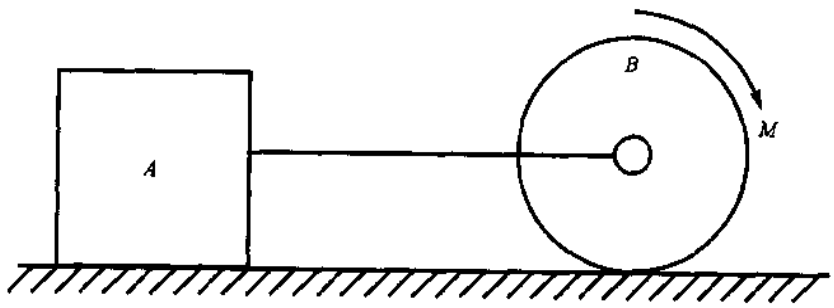


图9-50

9.59 在题9.58中，B 轮下多大的摩擦系数可使 A 物块开始运动？力矩 M 是多少，可使系统运动？
答案：$\mu_B=0.19$，$M=1.87$ N·m.

9.60 千斤顶具有每英寸3螺纹，平均螺纹半径等于0.648 in，水平杆长18 in，用于顶起降下2400 lb的重物．如果摩擦系数是0.10，多大的力作用在与杆垂直方向上可使重物(a)顶起，(b)降下？
答案：(a)15.9 lb，(b)1.55 lb.

9.61 在题9.60中，若垫片与螺旋间支承面平均半径是1.4 in，试问 P 多大力可顶起重物？垫片与螺旋间摩擦系数为0.07.
答案：28.9 lb.

9.62 手柄式压榨机每英寸有5个螺纹，平均直径是1.2 in．如果摩擦系数是0.08，若在长20 in的水平手柄法向作用力为20 lb，试求施加的压榨力是多大？
答案：5000 lb.

9.63 压榨机中的螺旋每英寸有6个螺纹．平均直径是1.38 in，摩擦系数是0.14．如果力偶的力是40 lb，力臂是20 in，试求施加的压榨力多大？见图9-51.
答案：6500 lb.

9.64 见图9-52．作用在钳子手柄的垂直力多大，才能产生夹紧物块 A 所需的20 lb力？可视螺旋是方螺纹，每英寸10螺纹，螺旋的平均直径是0.438 in．摩擦系数是0.20.

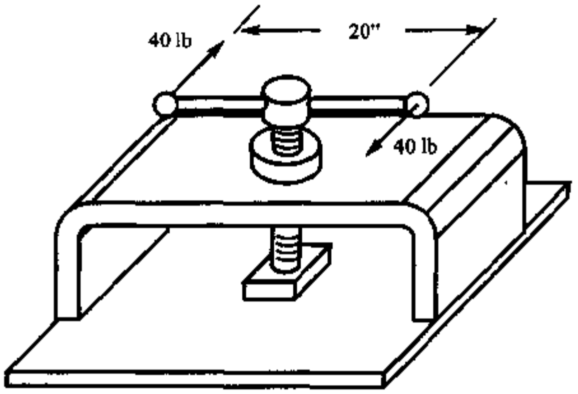


图 9-51

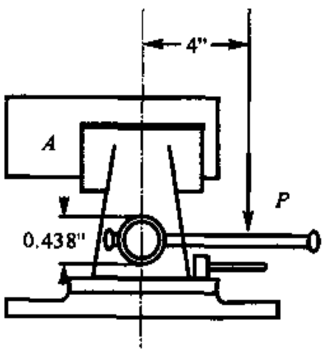


图 9-52

答案：$P=0.3$ lb.

9.65 一个方螺纹千斤顶，螺距为 0.4 in，平均直径 3 in. 垫片与螺旋间支承面的平均直径是 3.5 in，所有表面摩擦系数是 0.10，需要多大的力作用在 36 in 长的杠杆上的端点才能举起 4000 lb 重量？

答案：$P=43.3$ lb.

9.66 (a)单螺纹千斤顶每英寸 2.5 条螺纹，平均直径是 3 in，当 200 lb 的力作用在长 30 in 的杆上时，试求顶起的载荷重量. $\mu=0.05$. (b)如果垫片与螺旋间支承面的平均直径是 3.5 in，且此表面摩擦系数是 0.12，试求当加力 200 lb 时，顶起的载荷重量是多少？

答案：(a) $W=43\ 100$ lb，(b) $W=17\ 200$ lb.

9.67 方螺纹千斤顶的螺距 0.3 in，螺纹平均直径是 2 in. 垫片内直径为 2 in，外直径为 3 in. 如果所有接触面的摩擦系数为 0.15，试求多大的力可使 5000 lb 的重物运动(a)是向上，(b)向下？使用杆长为 3 ft.

答案：(a)53.7 lb 向上，(b)40.1 lb 向下.

9.68 方螺纹千斤顶每英寸 2 螺纹，平均直径是 2.4 in，摩擦系数 0.08，如果 30 lb 的最大力作用在长 18 in 的水平臂上，试求顶起的物体重为多少？

答案：$W=3060$ lb.

9.69 见图 9-53 中，A 重 500 lb，B 重 100 lb，千斤顶的垂直臂距其中心线 20 in，试求施加在臂上的力多大才

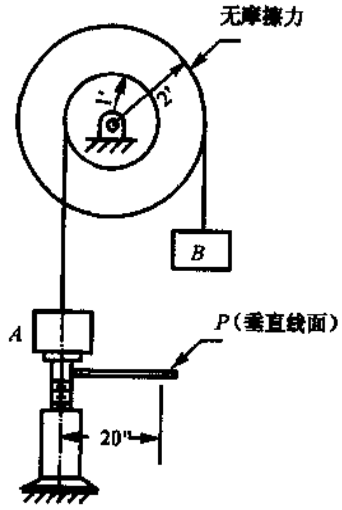


图 9-53

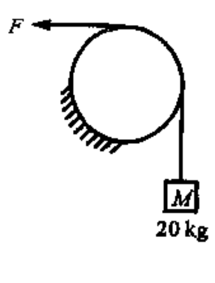


图 9-54

能顶起 A？千斤顶螺距 0.32 in，平均直径是 2.00 in. 螺旋与千斤顶间摩擦系数是 0.15.

答案：$P = 3.04$ lb.

9.70 50 kg 物体用绳吊在一鼓轮上，绳绕轮 3 圈. 需多大力保持物体不落下？设 $\mu = 0.3$.

答案：$F = 1.7$ N.

9.71 上题中，需多大的力来举起物体？

答案：$F = 140$ kN.

9.72 如图 9-54 所示，一质量为 20 kg 的物体系在一根绳子上，绳子绕一固定轮 $\frac{1}{4}$ 圈. 摩擦系数为 0.25. 求：(a)需多大的力保持物体不下落，(b)需多大的力使物体开始上升.

答案：(a)132 N，(b)290 N.

9.73 一重 W 的物体系在一根绳子上，绳子的另一端绕一固定圆轮两周，需用 200 lb 的力作用在绳子上以保持物体静止，如果绳子绕圆轮 3 周，需用力为 150 lb，求物体的重 W？

答案：$W = 356$ lb.

9.74 一工人通过绕水平圆柱 1.25 周的绳子降下一 400 lb 汽锅，并把汽锅放到一坑中，如果绳子与圆柱摩擦系数为 0.35，求工人需施加多大的力？

答案：$F = 25.6$ lb.

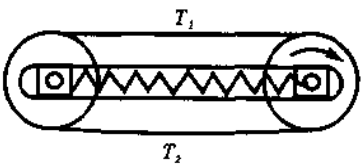


图 9-55

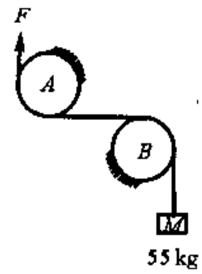


图 9-56

9.75 一绳子绕一轴线水平的固定圆柱体 3 周，需用 30 N 的力以提起 100 kg 的物体，求绳子与水平柱的摩擦系数是多少？

答案：$\mu = 0.185$.

9.76 如图 9-55 所示，两滑轮被一弹簧分开，弹簧因形变而产生的弹性力为 s，两滑轮的直径均为 d，皮带与滑轮间的摩擦系数为 μ，求能传递的最大旋转力矩？

答案：旋转力矩 $= \frac{1}{2} sd(e^{\mu\pi} - 1)/(e^{\mu\pi} + 1)$.

9.77 如图 9-56 所示，一质量为 55 kg 的物体用一绳提起，绳子绕圆轮 B 0.25 周，绕圆轮 A 1.25 周，假定圆轮 B 光滑，绳与圆轮 A 间摩擦系数为 0.25，求拉力 F 的值是多少？

答案：$F = 75.7$ N.

9.78 在题 9.77 中，假设绳与圆轮 B 间摩擦系数不是 0，而是 1/4，求拉力 F 值？（提示：使用 B 的隔离体图，确定 A 与 B 之间绳中张力.）

答案：$F = 44.8$ N

9.79 一质量为 200 kg 的物体被一绳子提起，绳子绕过水平的固定圆柱，作用在绳子上的力为 220 N，如果圆

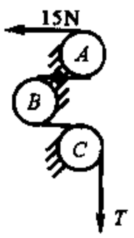


图 9-57

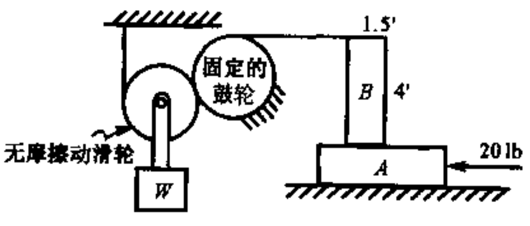


图 9-58

柱与绳子间摩擦系数为 1/4,求绳子须绕圆柱多少周?

答案:1.39 周.

9.80 如图 9-57 所示,已知,绳子与鼓轮间的摩擦系数为 $1/\pi$,鼓轮 A 处绳索受拉力 $15N$,试求使系统平衡的 T 的范围.

答案:$1.23\ \mathrm{N} < T < 183\ \mathrm{N}$.

9.81 如图 9-58 所示,A 物重 100 lb,B 物重 300 lb,A 物与水平面间的摩擦系数为 0.20,A,B 间摩擦系数为 0.20,绳子与鼓轮间摩擦系数为 0.25.试求能引起 B 发生运动的 W 的最小值.

答案:$W = 167$ lb.

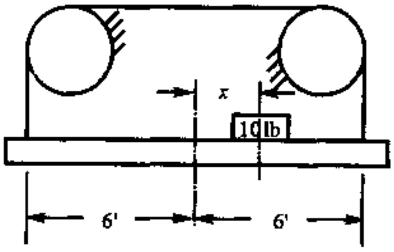


图 9-59

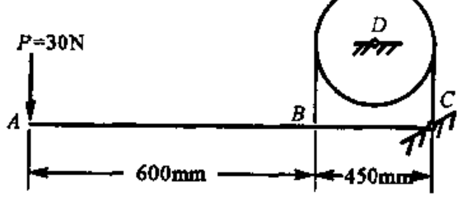


图 9-60

9.82 如图 9-59 所示,一可忽略重量的平台由绳子固定两端而处于水平位置,绳子绕过两定滑轮.如果绳与滑轮间摩擦系数均为 0.20,试求,在不破坏系统平衡的情况下,可以把一个 10 lb 的重物放在距平台中心的多远距离?

答案:$x = 1.82$ ft.

9.83 某火车重 1200 吨,轮子直径为 3 ft,滚动摩擦系数为 0.009,试求需多大的水平力,才能使火车移动.

答案:$P = 1200$ lb.

9.84 如图 9-60 所示,鼓轮被固定于 B,C 处的刹车皮带环绕,B,C 处于同一水平面,鼓轮直径 450 mm,皮带与鼓轮间摩擦系数为 1/3,$P = 30$ N,求刹车时鼓轮能产生多大力矩.(a)轮子顺时针旋转,(b)轮子逆时针旋转.

答案:$M_a = 10.2\ \mathrm{N\cdot m}$, $M_b = 29.1\ \mathrm{N\cdot m}$.

9.85 如图 9-61 所示,需要加多大的外力 P 才能使制动力矩 M 作用的鼓轮转动.鼓轮与闸之间的摩擦系数为 μ,包角为 α.

答案:$P = (M/rc)/[(ae^{\mu\alpha} - b)/(e^{\mu\alpha} - 1)]$.

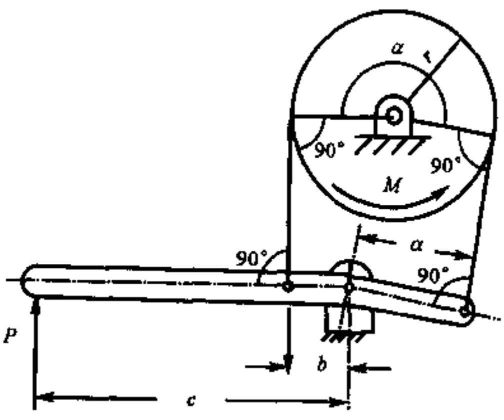


图 9-61

9.86 一质量 $M = 90$ kg 的物块 M,由绳挂在无摩擦支承的滑轮 A 下,如图 9-62.闸 B 与滑轮的摩擦系数为 0.25.P 至少为多大时,才能使滑轮静止.

答案:$P = 567$ N.

9.87 一重物 M,质量为 1400 kg,放在木制横梁上,这个梁置放在直径为 200 mm 的滚轴上,设滚轴与横梁间

的滚动摩擦系数为 0.89 mm;求用多大的水平力才能推动水平面上的重物.
答案:$P=122$ N.

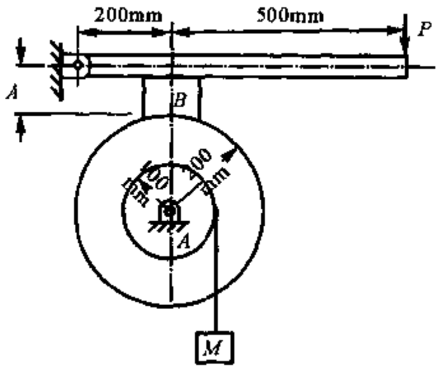


图 9-62

9.88 一直径为 500 mm 的轮子能承担 20 000 N 的重物.若加大小为 20 N 的水平力可使它沿水平面滚动,求滚动摩擦系数.
答案:$a=0.25$ mm.

9.89 一重为 3900 lb 的汽车,每个轮子的直径为 29 in,设车胎与路面间滚动摩擦系数为 0.02 in,求为了克服摩擦所需的力.
答案:$P=5.4$ lb.

9.90 在直径为 900 mm的鼓轮中心水平线上,作用一大小为 14 N的力,若滚动摩擦系数为 0.635 mm,求鼓轮的质量.
答案:$M=101$ kg.

9.91 如图 9-63 所示,项圈支撑 680 lb的重物,如果摩擦系数为 0.20,并且压力均匀,求使重物转动的力矩M的大小.
答案:$M=212$ lb-in.

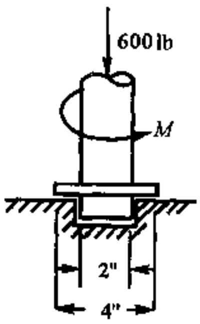


图 9-63

第 10 章　一次矩和中心

10.1　组合量的中心

位于点 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 的几个相似量 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_n$ 关于对选择点 O 的位置矢量是 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \cdots, \boldsymbol{r}_n$. 这些相似量集合的中心的位置矢量 $\boldsymbol{r}$, 由下式决定,

$$\boldsymbol{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \tag{1}$$

Δ_i 是第 i 个量(例如, 可以作为长度、面积、体积或质量元素); $\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个元素的位置矢量; $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$ 是 n 个元素之和; $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \Delta_i$ 是所有元素关于对选择点 O 的一次矩.

用 x, y 和 z 坐标表示, 中心的坐标为,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_1 \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_1 \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_1 \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \tag{2}$$

Δ_i 是第 i 个量的大小(元素); $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ 是中心的坐标, x_i, y_i, z_i 是 Δ_i 的 P_i 点的坐标.

10.2　连续量的中心

连续量中心的位置, 利用微积分中整体的无限小量元素表示(如, 全长中的 $\mathrm{d}L$, 全面积中的 $\mathrm{d}A$, 整体积中的 $\mathrm{d}V$ 或全部质量中的 $\mathrm{d}m$). 这样, 由质量 m 可写成,

$$\boldsymbol{r} = \frac{\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \tag{3}$$

用 x, y 和 z 坐标表示, 连续量的中心的坐标为,

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{Q_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{Q_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{Q_{xy}}{m} \tag{4}$$

Q_{xy}, Q_{yz}, Q_{xz} 是对 xy, yz, xz 平面的一次矩.

均质质量中心与体积中心重合.

下表列出了各种量 Δ 对坐标平面的一次矩 Q.

Δ	Q_{xy}	Q_{yz}	Q_{xz}	量纲
直线	$\int z\,\mathrm{d}L$	$\int x\,\mathrm{d}L$	$\int y\,\mathrm{d}L$	L^2
面积	$\int z\,\mathrm{d}A$	$\int x\,\mathrm{d}A$	$\int y\,\mathrm{d}A$	L^3
体积	$\int z\,\mathrm{d}V$	$\int x\,\mathrm{d}V$	$\int y\,\mathrm{d}V$	L^4
质量	$\int z\,\mathrm{d}m$	$\int x\,\mathrm{d}m$	$\int y\,\mathrm{d}m$	mL

Q_{xy}, Q_{yz}, Q_{xz}是对 xy, yz, xz 平面的一次矩，L 是长度；m 是质量；dL, dA, dV, dm 分别是直线、面积、体积、质量的微分元素(量).

注：在二维平面中，如，在 xy 平面，Q_{xz}成为 Q_x 并且 Q_{yz}成为 Q_y.

10.3 PAPPUS 与 GULDINUS 理论

第一理论表明，平面曲线在其平面内绕与之不相交轴旋转而产生的表面面积等于曲线的长度与曲线的中心 G 在旋转过程中移动的距离之乘积．如图 10-1 所示，曲线 AB 长 L 位于 xy 平面，使之关于 x 轴旋转一角度 θ 到达位置 $A'B'$．则长度 dL，移动的距离为 $y\theta$ 产生表面 $ds = y\theta dL$，即 $s = \int ds = \int y\theta dL = \theta\int y dL = \theta\bar{y}L$，这里 $\theta\bar{y}$ 是曲线中心 G 移动的距离，第一理论得证.

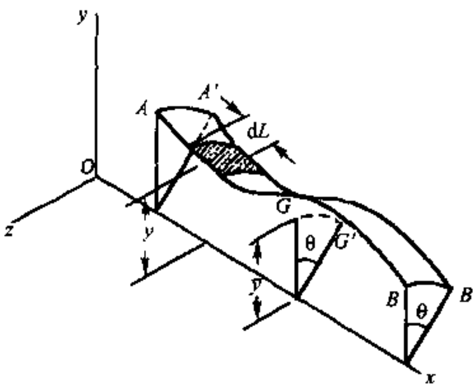


图 10-1

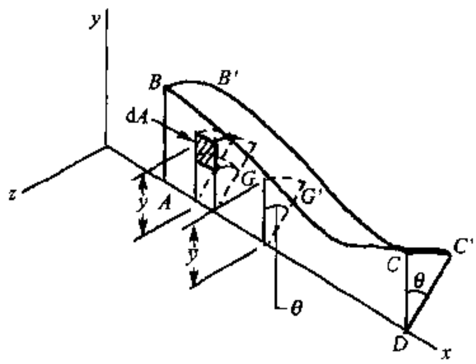


图 10-2

第二理论表明，平面面积在其平面内关于对不相交轴旋转而产生的立体体积等于该平面面积与面积中心在旋转过程中走过的距离之乘积．假定 $ABCD$ 的面积为 A，位于 xy 平面，使之关于 x 轴旋转一角度 θ 达到位置 $AB'C'D$ 如图 10-2 所示．面积 dA，移动的距离为 $y\theta$，产生体积为 $dV = y\theta da$．则 $V = \int dV = \int d\theta dA = \theta\int y dA = \theta\bar{y}A$．这里 $\theta\bar{y}$ 即为面积中心移动的距离，第二理论得证.

10.4 压力中心

当某一区域受到压力的作用，可将全部力集中到面积上的一点，而并不改变力的外部作用效果．这一点叫做压力中心．如果压力是均匀分布在面积上的，则压力中心与面积中心重合.

例　题

10.1 试求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与直线 $y = 0, x = b$ 包围的面积的 Q_x 和 Q_y.

解 ☞ 为了求解 Q_x，选择微分条与 x 轴平行，如图 10-3 所示条的高是 dy，宽为 $b - x$．则有

$$Q_x = \int y dA = \int_0^{2\sqrt{ab}} y(b - x)dy$$

y 的上限值是将 x 趋近于 b 而得到，$y = \pm\sqrt{4ab}$．选择正值

$$Q_x = \int_0^{2\sqrt{ab}} y\left(b - \frac{y^2}{4a}\right)dy = \frac{b(2\sqrt{ab})^2}{2} - \frac{(2\sqrt{ab})^4}{16a} = ab^2$$

为了确定 Q_y，选择微分元素平行于 y 轴，如图 10-4 所示．从 y 轴到 x 的距离，有

$$Q_y = \int x dA$$

dA 等于 y 乘以 dx，y 是从 x 轴到抛物线的距离，dx 是微元的宽，即 x 从 0 到 b 所包含的已知面积.

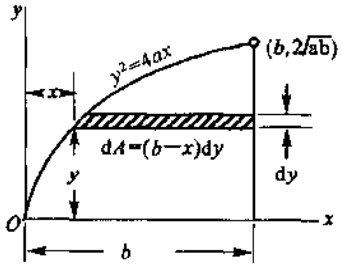


图 10-3

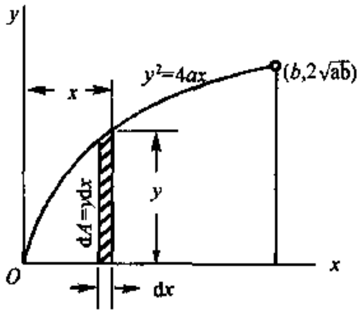


图 10-4

$$Q_y=\int_0^b xy\mathrm{d}x=\int_0^b x\sqrt{4ax}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{a}\int_0^b x^{3/2}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{2}{5}(2\sqrt{a})x^{5/2}\right]_0^b=\frac{4}{5}b^2\sqrt{ab}$$

10.2　在题 10.1 中，试用图 10-5 所示的微元求解 Q_x 和 Q_y.

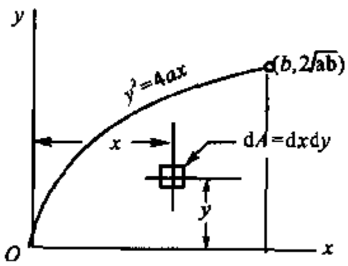


图 10-5

解　☞ 在本题中，考虑二重积分如下所示：

$$Q_x=\int y\mathrm{d}A=\int_0^b\int_0^{2\sqrt{ax}}y\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^b\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2\sqrt{ax}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^b 2ax\mathrm{d}x=ab^2$$

$$Q_y=\int x\mathrm{d}A=\int_0^b\int_0^{2\sqrt{ax}}\mathrm{d}yx\mathrm{d}x=\int_0^b[y]_0^{2\sqrt{ax}}x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^b 2\sqrt{ax}\,x\mathrm{d}x=\frac{4}{5}b^2\sqrt{ab}$$

变量 y 的上限用 x 表示，因为曲线在竖直方向求极限，是随高度而变化.

10.3　试求正圆锥体积关于对其基础的一次矩. 见图 10-6.

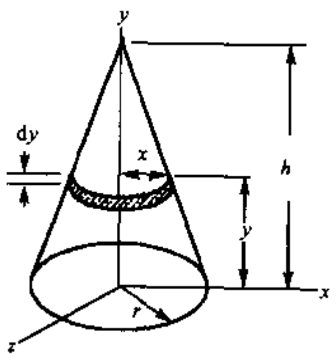


图 10-6

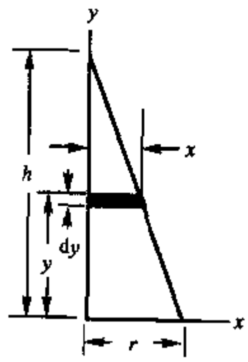


图 10-7

解　☞ 如图 10-6 所示，选择微分体积平行于基础，位于 xz 平面之上距离为 y，基础在 xz 平面中. 在 xy 平面的截面是直角三角形，如图 10-7 所示. 即 $\frac{x}{r}=\frac{h-y}{h}$，并且，

$$\mathrm{d}V=\pi x^2\mathrm{d}y=\frac{\pi r^2}{h^2}(h-y)^2\mathrm{d}y$$

为求 Q_{xz}，用

$$Q_{xz}=\int y\mathrm{d}V=\int_0^h y\pi\frac{r^2}{h^2}(h-y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h(h^2y-2hy^2+y^3)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left(h^2\frac{y^2}{2}-2h\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)_0^h=\frac{\pi r^2}{h^2}h^4\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}\pi r^2h^2$$

10.4 试求图 10-8 中圆弧的中心位置.

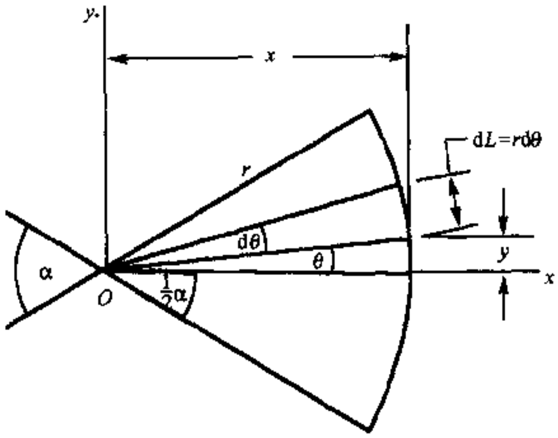


图 10-8

解 选 x 轴为对称轴.极坐标可使积分简单化.从图得,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{L} = \frac{\int x\mathrm{d}L}{\int \mathrm{d}L} = \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} xr\mathrm{d}\theta}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} r\mathrm{d}\theta} = \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} r\mathrm{d}\theta} = \frac{r^2\left[\sin\frac{1}{2}\alpha - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{r\left[\frac{\alpha}{2} - \left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{r\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

注意,α 对应圆弧的全角.

如果用同样的方法确定 $\bar{y}$,则积分结果为余弦项,当将极限值代入时消失,即,$\bar{y}=0$.当然,由于其中心位于对称轴上,则结果可直接得到.

如为半圆弧,即 α 等于 180°或 π rad.则

$$\bar{x} = \frac{2r\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{2r}{\pi}$$

10.5 试求图 10-9 所示挠曲线的中心位置.

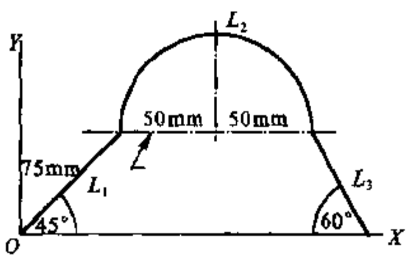


图 10-9

解 让

L_1 = 75 mm 段,并与 x 轴夹角 45°

L_2 = 半圆段

L_3 = 与 x 轴夹角 45°的一段

$$L_3 \text{的长} = \frac{75\sin 60^\circ}{\cos 45^\circ} = 61.2 \text{ mm}$$

下表中列出了每单元分量的中心

分量	长度	$\bar{x}$	$\bar{y}$
L_1	75	$(75/2)\cos 45^\circ = 26.5$	$(75/2)\sin 45^\circ = 26.5$
L_2	$\pi r = 157$	$75\cos 45^\circ + 50 = 103$	$75\sin 45^\circ + 2r/\pi = 84.9$
L_3	61.2	$75\cos 45^\circ + 100 + (61.2/2)\cos 60^\circ = 168.3$	$(61.2/2)\sin 60^\circ = 26.5$

$$\bar{x} = \frac{L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$= \frac{(75\times 26.5)+(157\times 103)+(61.2\times 168.3)}{75+157+61.2} = 97.1\ \text{mm}$$

$$\bar{y} = \frac{L_1\bar{y}_1 + L_2\bar{y}_2 + L_3\bar{y}_3}{L_1+L_2+L_3}$$

$$= \frac{(75\times 26.5)+(157\times 84.9)+(61.2\times 26.5)}{293.2} = 57.8\ \text{mm}$$

注：确定 $\bar{y}_2$ 中使用$\frac{2r}{\pi}$，是由题 10.4 中得来.

10.6　试求棍结构如图 10-10 所示的中心位置.设棍的直径与图中尺寸相比可以略去.

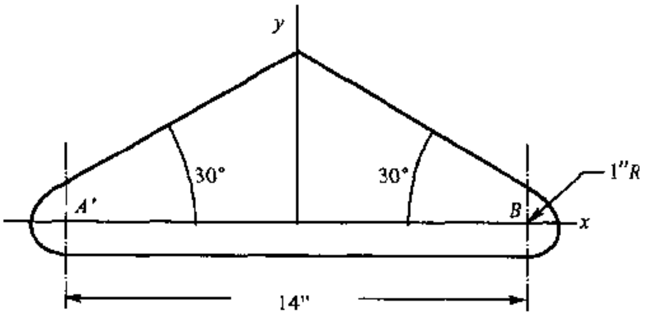


图 10-10

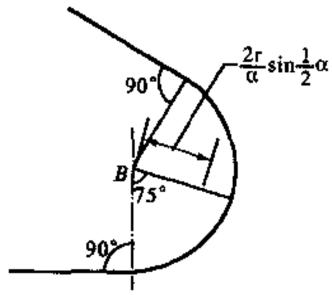


图 10-11

解 ☞ 放大的图 10-11 表明，应使用三角学确定弧的中心位置，其中心位于对称轴上.对称轴与铅直线夹角为 75°，并且圆弧中心距圆心的距离为$\left(\frac{2r}{\alpha}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$，其中 $\alpha=\frac{150\pi}{180}$rad(见题 10.4).

沿半径到中心的距离是$\left[\frac{2(1)}{2.62}\right]\sin 75° = 0.738$ in.因此圆弧的 $\bar{y}$ 等于 $-0.738\sin 45° = -0.191$ in.

每段弧长是 $r\alpha = 1(2.62) = 2.62$ in

图 10-12 指出了确定斜边长度的方法.即

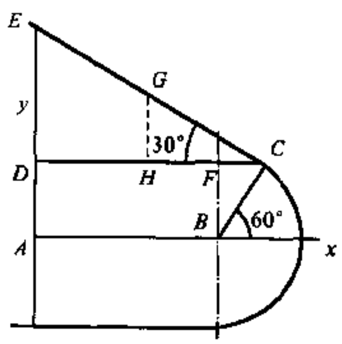


图 10-12

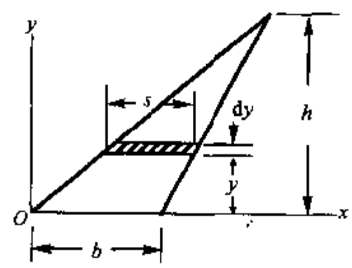


图 10-13

$DF = AB = 7$ in,　　$BF = BC\cos 30° = 1(0.866) = 0.866$ in

$FC = BC\sin 30° = 1(0.500) = 0.500$ in,　$DC = DF + FC = 7.5$ in

$$EC = \frac{DC}{\cos 30°} = \frac{7.5}{0.866} = 8.66\ \text{in}$$

EC 的中心在 G 点，位于 x 轴之上，距离为 $\bar{y}_{\text{slope}}$，即

$$\bar{y}_{\text{slope}} = GH + FB = \frac{1}{2}(8.66\sin 30°) + 0.866 = 3.03\ \text{in}$$

水平棍的中心在 x 轴下方.即 $y = -1$ in.

由于对称性,组合图形的 $\bar{x}=0$

为了确定组合图形的 $\bar{y}$,应用下面方程:

$$\bar{y}=\frac{2L_{arc}\bar{y}_{arc}+L_{hor}+2L_{slope}\bar{y}_{slope}}{2L_{arc}+L_{hor}+2L_{slope}}$$

$$=\frac{2(2.62)(-0.191)+14(-1)+2(8.66)(3.03)}{2(2.62)+14+2(8.66)}=1.02\text{ in}$$

10.7 试确定三角形中心的位置.

解 ☞ 选择如图10-13所示面积的微元,即 $dA=s\,dy$

由 $\frac{s}{b}=\frac{h-y}{h}$

$$\bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{\int y\mathrm{d}A}{A}=\frac{\int_0^h ys\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}bh}=\frac{\int_0^h y\left[\frac{b}{h}(h-y)\right]\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}bh}=\frac{h}{3}$$

再确定 $\bar{x}$.但通常其中心的位置是已知的,即在距底边为1/3的高度.分别在距离任意两边高度的1/3处画两条平行于此两边的平行线,则交点即为中心.

10.8 试求圆扇形的中心.半径为 r,对应角为 2α.x 轴为对称轴.求解时,使用(a)图10-14所示的微元;(b)图10-15所示的微元.

解 ☞ (a)使用图10-14中的微元,可以写出:

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{\int x\mathrm{d}A}{\int\mathrm{d}A}=\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^r\rho\cos\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^r\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}=\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)_0^r\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\left(\frac{r^3}{3}\right)[\sin\alpha-\sin(-\alpha)]}{\left(\frac{r^2}{2}\right)[\alpha-(-\alpha)]}=\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$$

对于半圆扇形,$2\alpha=\pi\text{rad}$,则有

$$\bar{x}=\frac{2r\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}}=\frac{4r}{3\pi}$$

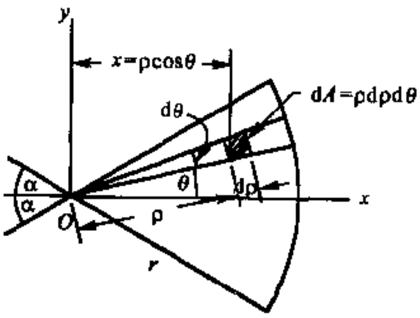


图 10-14

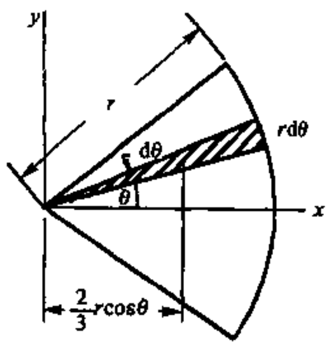


图 10-15

当然,由图形的对称性 $\bar{y}=0$.

(b)使用图10-15中的微元体,注意到三角形的中心是从顶点(原点)到底边的距离的2/3处.对于三角形 $\bar{x}=(2/3)r\cos\theta$,则,

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{1}{2}r\mathrm{d}\theta r\right)\left(\frac{2}{3}r\cos\theta\right)}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}r\mathrm{d}\theta r}=\frac{\frac{1}{3}r^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\frac{1}{2}r^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}\theta}=\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$$

10.9 试求由抛物线 $y^2=4ax$ 与 $x=0$,$y=b$ 所包围的面积的中心.

解 ☞ 选择微分元平行于 x 轴，如图 10-16 所示.

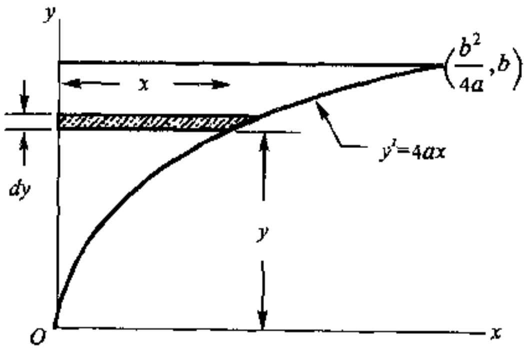


图 10-16

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{\int_0^b\left(\frac{1}{2}x\right)x\mathrm{d}y}{\int_0^b x\mathrm{d}y}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^b x^2\mathrm{d}y}{\int_0^b x\mathrm{d}y}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^b\left(\frac{y^4}{16a^2}\right)\mathrm{d}y}{\int_0^b\left(\frac{y^2}{4a}\right)\mathrm{d}y}=\frac{3b^2}{40a}$$

同样，有

$$\bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{\int_0^b yx\mathrm{d}y}{\frac{b^3}{12a}}=\frac{\int_0^{b^2}\left(\frac{y^3}{4a}\right)\mathrm{d}y}{\frac{b^3}{12a}}=\frac{\frac{b^4}{16a}}{\frac{b^3}{12a}}=\frac{3}{4}b$$

10.10 如图 10-17 所示，从半径为 r 的大圆中，挖去直径为 r 的小圆，试求剩余部分面积的中心.

解 ☞ 由于对称 $y=0$，即中心在 x 轴上.

A_L 是大圆面积，A_S 是小圆面积，对于组合面积，利用

$$x=\frac{A_Lx_L-A_Sx_S}{A_L-A_S}$$

$$=\frac{\pi r^2(0)-\left(\frac{\pi r^2}{4}\right)\left(-\frac{r}{2}\right)}{\pi r^2-\frac{\pi r^2}{4}}=\frac{1}{6}r$$

中心在 x 轴上的 y 轴的右边 $\frac{1}{6}r$ 距离.

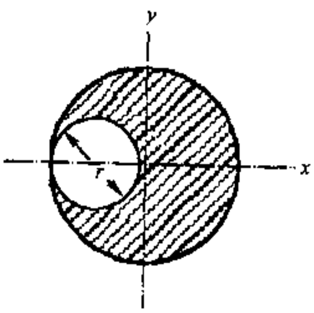


图 10-17

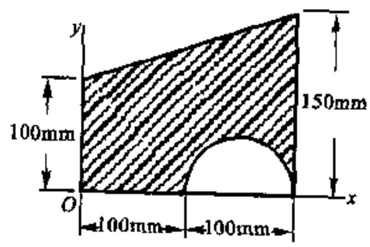


图 10-18

10.11 从梯形中挖去半圆面积，如图 10-18 所示. 试求剩余部分面积的中心.

解 ☞ 阴影面积是由(1)矩形面积加上(2)三角形面积减去(3)半圆面积所组成. 则

$$\bar{x}=\frac{A_1\bar{x}_1+A_2\bar{x}_2-A_3\bar{x}_3}{A_1+A_2+A_3}$$

$$=\frac{2\times10^4(100)+5\times10^3(133.3)-\pi(50)^2(150)/2}{2\times10^4+5\times10^3-\pi(50)^2/2}=98.6\text{ mm}$$

$$\bar{y}=\frac{A_1\bar{y}_1+A_2\bar{y}_2-A_3\bar{y}_3}{A_1+A_2+A_3}$$

$$=\frac{2\times10^4(50)+5\times10^3\left(100\times\dfrac{50}{3}\right)-\pi[(50)^2/2][(4\times50/3\pi)]}{21\ 070}=71.2\text{ mm}$$

10.12 如图10-19(a)中面积关于对 y 轴旋转,试求生成体积如图10-19(b)所示的中心.

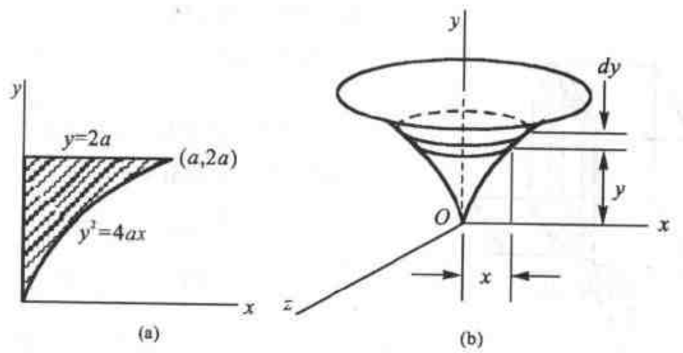


图10-19

解 ☞ 由图10-19(b)对称性, $\bar{x}=0$, $\bar{z}=0$. 选择微元体积平行于 xz 平面,且其很薄,则高为 dy,位于 xz 平面之上,距离为 y,半径是 x,则有

$$\bar{y}=\frac{Q_{xz}}{V}=\frac{\int_0^{2a}y(\pi x^2\mathrm{d}y)}{\int_0^{2a}\pi x^2\mathrm{d}y}=\frac{\pi\int_0^{2a}y\left(\dfrac{y^4}{16a^2}\right)\mathrm{d}y}{\pi\int_0^{2a}\left(\dfrac{y^4}{16a^2}\right)\mathrm{d}y}=\frac{\left.\dfrac{y^6}{6}\right|_0^{2a}}{\left.\dfrac{y^5}{5}\right|_0^{2a}}=\frac{5}{3}a$$

10.13 试确定任意圆锥体的中心位置 $\bar{x}$. 其基面与 yz 平面重合,高为 h,面积是 A.

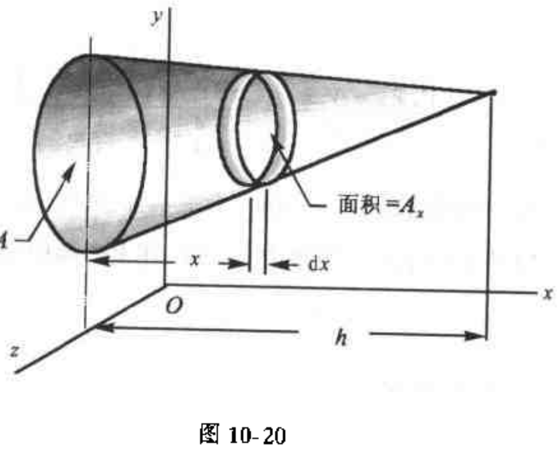


图10-20

解 ☞ 在图10-20中,距 yz 平面的 x 处,选择微元体积,该微元体随 x 变化,令面积为 A_x,厚度为 $\mathrm{d}x$.

由几何关系得

$$\frac{A_x}{A}=\frac{(h-x)^2}{h^2}$$

则

$$\bar{x}=\frac{Q_{yz}}{V}=\frac{\int_0^h xAx\,\mathrm{d}x}{\int_0^h Ax\,\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\int_0^h x\left(\frac{A}{h^2}\right)(h-x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^h\left(\frac{A}{h^2}\right)(h-x)^2\mathrm{d}x}=\frac{1}{4}h$$

即,任意圆锥体的中心距底面 1/4 的高度.

10.14 试求如图 10-21 所示的$\frac{1}{4}$正圆柱体积的中心位置.

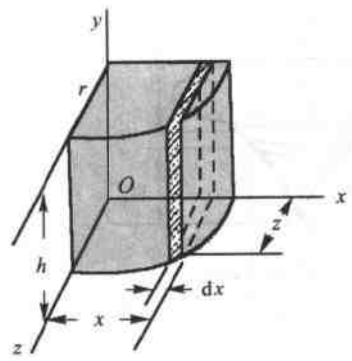


图 10-21

解 ☞ 只需求解 $\bar{x}$ 的值,因为 $\bar{z}=\bar{x}$,并且 $\bar{y}$ 是$\frac{h}{4}$.选择微元体 $\mathrm{d}V$ 平行于 yz 平面,则

$$\mathrm{d}V=zh\,\mathrm{d}x$$

因为从体积中切出的任何平行于 xz 的平面都是 1/4 圆,且 x 与 z 的关系是$x^2+z^2=r^2$.

$$\bar{x}=\frac{Q_{yz}}{V}=\frac{\int x\mathrm{d}V}{\int\mathrm{d}V}=\frac{\int_0^r xzh\,\mathrm{d}x}{\int_0^r zh\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^r hx(r^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x}{\int_0^r h(r^2-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{h\left[-\frac{1}{3}(r^2-x^2)^{3/2}\right]_0^r}{h\left[\left(\frac{x}{2}\right)(r^2-x^2)^{1/2}+\left(\frac{r^2}{2}\right)\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r}=\frac{4r}{3\pi}$$

计算结果与四分之一圆中心的值相同,这正是在预料之中的.因为体积与面积相比影响其中心位置的位移因素是高度 h,,而其共同的因素是如上所示的分子与分母.

10.15 在半径为 R 的大球中切去一个半径为r 的小球,且两球圆心之间的距离为 a.试求剩下部分体积中心.

解 ☞ 这是一个具有组合体积图形的例子,有

$$V_R=\frac{4}{3}\pi R^3,\qquad V_r=\frac{4}{3}\pi r^3$$

设 x,y,z 轴的坐标原点在大球中心上,并且两球中心连线在 x 轴正向.即有 $x_R=0$, $\bar{x}_r=a$.由公式

$$\bar{x}=\frac{V_R\bar{x}_R-V_r\bar{x}_r}{V_R-V_r}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3(0)-\frac{4}{3}\pi r^3(a)}{\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{-ar^3}{R^3-r^3}$$

表明,组合体的中心在两球中心的连线上,位于 yz 平面以左,距离为$\frac{ar^3}{(R^3-r^3)}$.

10.16 试求如图 10-22 所示的组合体积的中心位置.在上表面中心沿表面法向挖一个 40 mm 的孔.

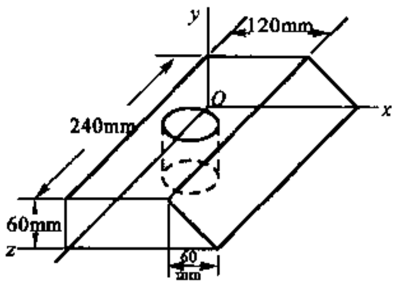


图 10-22

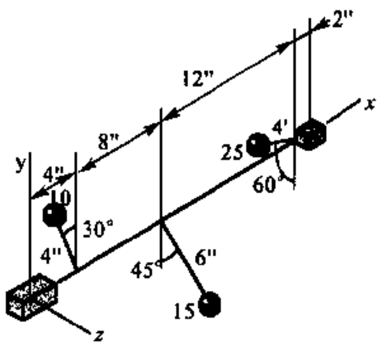


图 10-23

解 ☞ 由图形的对称性,得 $\bar{z}=120$ mm.

令平行6面体为1,三角形部分为2,圆柱体为3.公式中需要的数值可由下表中得到.

形状	V	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1	1728×10^3	60	30
2	432×10^3	140	20
3	75.4×10^3	60	30

$$\bar{x}=\frac{1728\times10^3(60)+432\times10^3(140)-75.4\times10^3(60)}{1728\times10^3+432\times10^3-75.4\times10^3}=76.6\ \text{mm}$$

$$\bar{y}=\frac{1728\times10^3(30)+432\times10^3(20)-75.4\times10^3(30)}{2084.6\times10^3}=27.9\text{mm}$$

10.17 3个球,体积分别是10,15和25 in^3,安装在如图10-23所示的轴上.试求3体积的中心位置.

解 ☞ 设 x 轴沿轴的方向,使用表格列出的数据.

V	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
10	+4	$+4\cos30°$	$-4\sin30°$
15	+12	$-6\cos45°$	$+6\sin45°$
25	+24	$-4\cos60°$	$-4\sin60°$

$$\bar{x}=\frac{(10\times4)+(15\times12)+(25\times24)}{10+25+25}=16.4\ \text{in}$$

$$\bar{y}=\frac{(10\times4\times0.866)+(15\times6\times0.707)-(25\times24\times0.500)}{50}=-1.58\ \text{in}$$

$$\bar{z}=\frac{(-10\times4\times0.500)+(15\times6\times0.707)-(25\times24\times0.866)}{50}=-0.86\ \text{in}$$

附带地说,如果题中数据10,15和25分别表示重量或质量,则使用同样的求解方法,可得其相应的质心与重心.

10.18 试求半球表面积相对于其底面的中心.

解 ☞ 选择面积的微分元 $\mathrm{d}s$ 如图10-24.微元面积的宽为 $\mathrm{d}L$,$\mathrm{d}L$ 为沿曲面的长度而非铅垂方向的长度.令 $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$,且

$$\overline{\mathrm{d}L^2}=\overline{\mathrm{d}x^2}+\overline{\mathrm{d}y^2}=\left(\frac{\overline{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\overline{\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}x^2}\right)\overline{\mathrm{d}x^2}\quad 即\quad \mathrm{d}L=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\bar{y}=\frac{Q_{xz}}{s}=-\frac{\int y\mathrm{d}s}{\int\mathrm{d}s}=\frac{\int y(2\pi x\mathrm{d}L)}{\int 2\pi x\mathrm{d}L}=\frac{\int_0^r 2\pi yx\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x}{\int_0^r 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x}$$

xy 平面中圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$.

有 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 微分,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x(r^2-x^2)^{-1/2}$.将其代入,得

$$\bar{y}=\frac{2\pi r\int_0^r x\mathrm{d}x}{2\pi r\int_0^r r(r^2-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}r$$

10.19 试求正圆锥的表面积相对于其底面积的中心.高为 h,见图10-25.

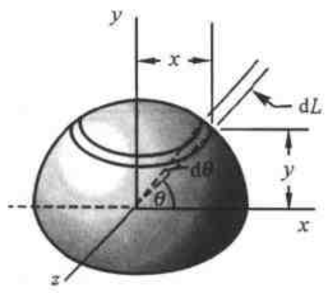


图 10-24

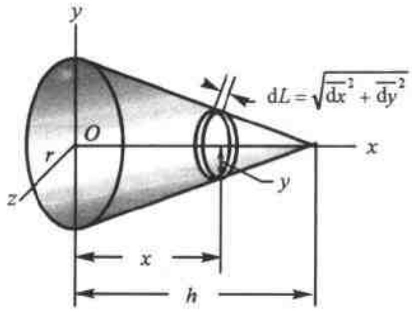


图 10-25

解 ☞ 在图 10-25 中，选 x 轴沿圆锥的高. 微元面积 $ds = 2\pi y dL$.

$$\bar{x} = \frac{Q_{yz}}{s} = \frac{\int x\mathrm{d}x}{\int \mathrm{d}x} = \frac{\int x 2\pi y \mathrm{d}L}{\int 2\pi y \mathrm{d}L}$$

如果 r 是底面积的半径，则由 xy 平面中三角形的相似性，得 $\frac{y}{r} = \frac{(h-x)}{h}$.
即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{r}{h},\ \mathrm{d}L = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\,\mathrm{d}x$$

将其代入并化简得

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h (hx - x^2)\mathrm{d}x}{\int_0^h (h-x)\mathrm{d}x} = \frac{h}{3}$$

10.20　均质椭圆体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，试求其右半部的质量中心.

解 ☞ 选择微元质量平行于 yz 平面，如图 10-26 所示. 令密度为 δ.

注意，$\mathrm{d}V = A\mathrm{d}x$，$A$ 是具有 $2y$ 和 $2z$ 长度的轴的椭圆的面积，即 $A = \pi yz$

$$\mathrm{d}m = \delta \mathrm{d}V = \delta\pi yz\mathrm{d}x$$

则

$$\bar{x} = \frac{Q_{yz}}{m} = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\delta\pi\int_0^a xyz\mathrm{d}x}{\delta\pi\int_0^a yz\mathrm{d}x}$$

求用 x 表示 y，则令 $z=0$，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad 即 \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

同样，令 $y=0$，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 即 \quad z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

代入并简化，得

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x}{\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}x} = \frac{3}{8}a$$

当然，$\bar{y} = \bar{z} = 0$.

10.21　求半球的质量中心. 其密度随距底面的距离的平方而变化.

解 ☞ 让半球的底面位于 yz 平面，如图 10-27 所示，则密度随 x^2 而变化，为 $\delta = Kx^2$.

选 $\mathrm{d}m$ 平行于 yz 平面和距 yz 平面的距离 x. 则

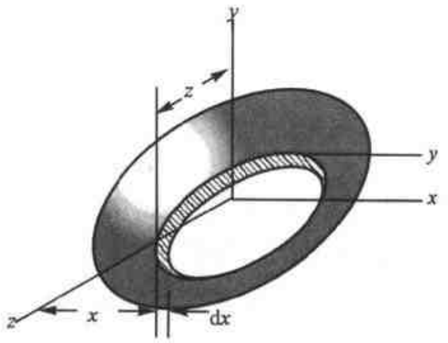


图 10-26

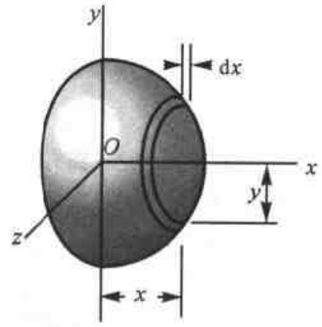


图 10-27

$$\bar{x}=\frac{Q_{yz}}{m}=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int_0^r x\delta\pi y^2\mathrm{d}x}{\int_0^r \delta\pi y^2\mathrm{d}x}$$

在 xy 平面中,坐标(x,y)位于半径为 r 的圆上.这里,$y^2=r^2-x^2$.

代入 y^2 和 δ 的值,方程变为

$$\bar{x}=\frac{\int_0^r xKx^2\pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x}{\int_0^r Kx^2\pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^r x^3\pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x}{\int_0^r x^2(r^2-x^2)\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{12}r^6}{\frac{2}{15}r^5}=\frac{5}{8}r$$

10.22 细长杆的密度随距离的一次方而变化,此距离从杆的一端算起.问质量中心在哪?

解 ☞ 以杆的一端为坐标原点,则密度与沿杆的 x 距离成正比,即为 $\delta=Kx$,δ 为单位长度的质量.

为求 $\mathrm{d}m$,让微元长度 $\mathrm{d}x$ 乘以该点即 x 点处的密度,得到 $\mathrm{d}m=\delta\mathrm{d}x=Kx\mathrm{d}x$,则

$$\bar{x}=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int_0^l xKx\mathrm{d}x}{\int_0^l Kx\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}l$$

质量中心在距选择坐标原点$\frac{2}{3}l$ 处.

10.23 圆环关于 x 轴旋转成环形胎,试用 P-G 理论求其表面积.

解 ☞ 圆周的中心距 x 轴的距离为 d,在旋转过程中,中心移动得半径为 d 的圆环,则位移为 $2\pi d$,生成曲线的长 $2\pi r$ 是圆环的圆周.即,胎的表面积是 $2\pi d\times 2\pi r=4\pi^2 d$.

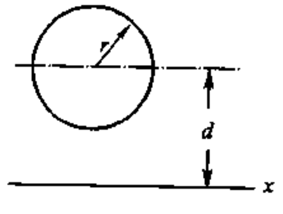


图 10-28

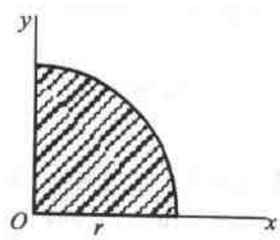


图 10-29

10.24 使用 P-G 理论,求四分之一圆的中心.

解 ☞ 本题正是 P-G 理论的逆运算.图 10-29 中的面积,当旋转生成半球时,体积已知为$\frac{2}{3}\pi r^3$.其四分之一圆在旋转中,中心移动的位移长度应是体积除以面积,得

$$l - \frac{\frac{2\pi r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{8}{3}r$$

且 $l = 2\pi\bar{y}$．即 $2\pi\bar{y} = \frac{8r}{3}$，$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$．此值与积分方法的计算之值相同．(见前题 10.8)．

当然对于四分之一圆有 $\bar{x} = \bar{y}$．

10.25 在图 10-30 所示中，盒子的尺寸是 l, b 和 hm，并装有半盒的砂砾，其密度为 δkg/m³．设砂砾的高成线性变化，最左端为零，最右端是 h，求砂砾的压力中心距最左端多远？

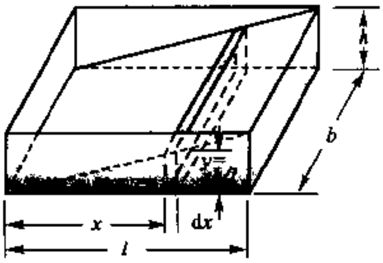


图 10-30

解 ☞ 在距左端 x 处选择微元体，如图示．高 $y = \frac{xh}{l}$，并且在 dV 中的重力 $dW = g\delta\left(\frac{xh}{l}\right)b\,dx$．为求压力中心位置，由

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dW}{\int dW} = \frac{(g\delta hb/l)\int_0^l x^2 dx}{(g\delta bh/l)\int_0^l x\,dx} = \frac{2}{3}l$$

砂砾的压力中心沿铅垂方向，距最左边 $\frac{2}{3}l$，距前面 $\frac{1}{2}b$．如果将砂砾的全部质量集中放置在该压力中心上，则引起箱子的压力与分布质量时相同．

10.26 (a) 见图 10-31．梁上受有材料作用，材料重 w lb/ft³，高度 y 随以左端为基准的 x 距离按照已知曲线变化．试求右端的每个支反力．设 b 是常量，所选择的窄条 y 沿 b 的方向不变．

(b) 在(a)中，假设 $w = 150$ lb/ft³，载荷的高是线性的，在最左端为零，最右端为 2 ft，如图 10-32 所示．跨距 8 ft，$b = 2$ ft．试求右端的两个支反力．梁重不计．

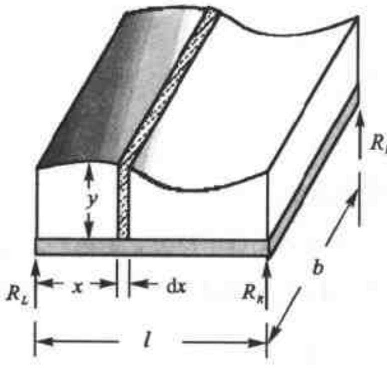


图 10-31

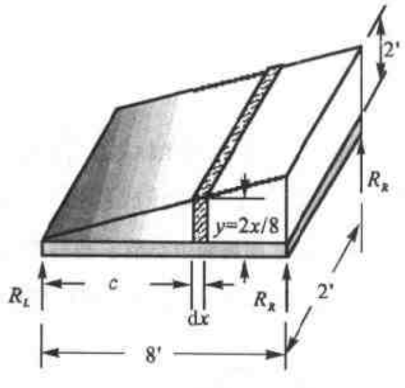


图 10-32

解 ☞ (a) 距左端为 x 距离处的微元体积重 $dW = wby\,dx$．dW 对于左边(竖直平面垂直于 l)的力矩是 $x\,dW = wbyx\,dx$．

微元体的重力关于对左边之矩求和应与二右端反力 R_R 之矩相平衡．即

$$\int_0^l wbyx\,dx = 2R_R l$$

如果 y 是 x 的简单函数，则可求出积分，否则需用其他方法求解．

(b) 距左端为 x 距离处的微分载荷的高度为 $y = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$．

全部载荷关于包含有二左端反力的铅直面之矩是

$$M = \int x\,dW = \int x(150\,dV) = \int_0^8 x\left[150\left(\frac{x}{4}\right)(2)dx\right] = 12\ 800\ \text{ft-lb}$$

右端二反力对左边之矩等于载荷之矩．即

$$2R_R(8)=12\ 800 \quad 得 \quad R_R=800\ \text{lb}$$

载荷的矩也可以使用载荷的沿梁长的集度即 lb/ft 而求出.如果载荷右端是 2 ft 高,沿梁纵向 2 ft,从右取 x 距离为 1,则此载荷的大小是每英尺长为 $2\times2\times1\times150=600$ lb.因此,本题中,载荷则从最左边的零变到最右端的 600 lb/ft.

距左边 x 距离 dx 长度的载荷 $=p_x dx$,p_x 是单位长度上的载荷.由三角形的相似关系,$p_x/x=600/8$,即 $p_x=75x$.则全部载荷关于对左端之矩为

$$M=\int_0^8 xp_x dx=\int_0^8 x(75x)dx=12\ 800\ \text{ft-lb}$$

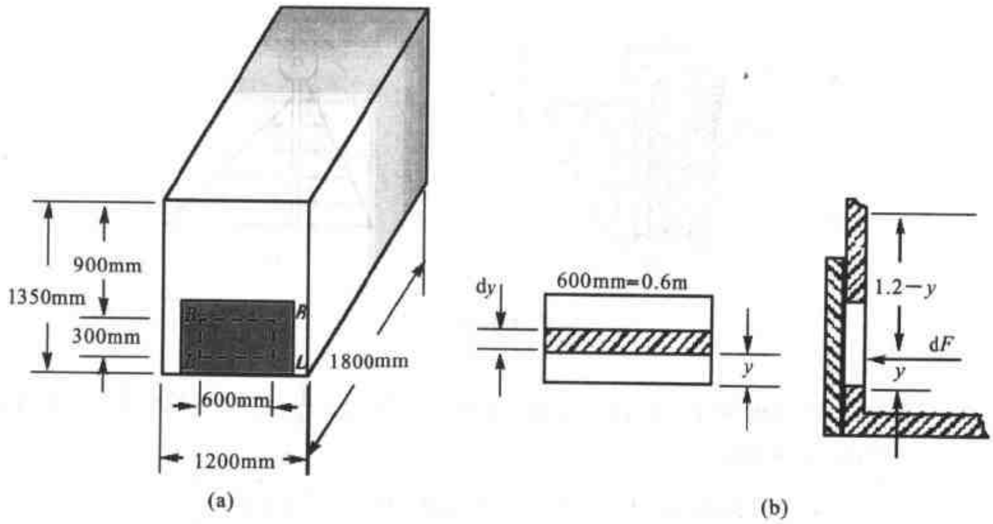


图 10-33

10.27 如图 10-33(a)所示的水箱充满了水,水的密度为 1000 kg/m³.板盖上一个高 300 mm,宽 600 mm 的洞.试求由于水对板的作用,而引起上方两螺栓 B 的二反力的大小.(提示:在题解中,所有长度用米).

解 ☞ 图 10-33(b)的图解表明,板的微元位于孔的底边以上 y 距离的位置.因为我们感兴趣的是受水作用的板的面积,则微元面积 $dA=0.6dy$.(提示:如果板的宽度是 y 的函数,则微元面积为 $f(y)dy$.)

在选定的微元上的力 dF 等于面积 dA 乘以距孔底边距离处 y 的压力.

距孔洞底边 y 米处压力 P 等于高为 $(1.2-y)$m 横截面 1 m² 的水柱,所施加的重力,即 $p=9.8\times1000(1.2-y)$ N/m².则小面积上的微元力是 $dF=9.8\times1000(1.2-y)(0.6)dy$.

dy 关于对孔底边之矩是 ydy.水力的总和的力矩是 $\int ydy$,它与 B 处的螺栓力关于对底边之矩平衡,即

$$2B(0.3)=\int_0^{0.3} y9.8\times1000(1.2-y)(0.6)dy$$

解出 $B=441$ N.

请读者求解作用在孔底边的螺栓力分别是 485 N.

10.28 图 10-34(a)所示一个矩形闸门,将不同密度的液体分隔两边.闸门顶部铰接,底部靠在阻挡物上.求,使闸门处于关闭状态的两边液体的最大高度差 d.

解 ☞ 图 10-34(b)所示为闸门的压力分布,门左边低部的最大压力是单位面积上 12 ft 高的液体的重力,即

$$p_1=6.24\times12\ \text{lb/ft}^2$$

左边门上力的总和是

$$F_1=\frac{1}{2}p_1\times面积=\frac{1}{2}(62.4)(12)(12)(a)$$

这里 a 是沿闸门的距离(垂直于低面).这个力(F_1)作用在压力中心,因为力是三角形变化的,因此为三角形的中心(距闸门顶部 8 ft).

闸门右边低部最大压力是单位面积上,$(12-d)$ ft 高的流体重力,即

$$p_2 = 105(12-d)\ \mathrm{lb/ft^2}$$

右边力的总和是

$$F_2 = \frac{1}{2}p_2 \times 面积 = \frac{1}{2}(105)(12-d)(12-d)(a)$$

力 F_2 作用在压力中心,即是$\frac{1}{3}\times$高$=\frac{1}{3}(12-d)$,以底部为基准.

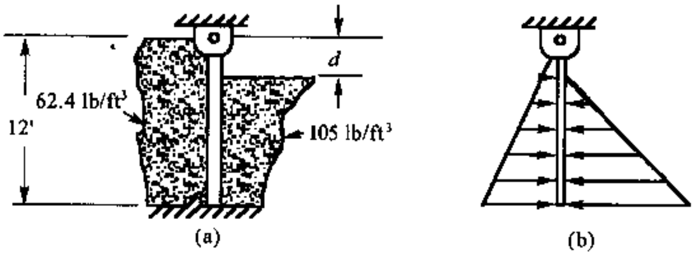


图 10-34

为了得到关于铰之矩,用 F_1 力与 8 ft 力臂之矩和 F_2 力与 $12-\frac{1}{3}(12-d)=8+\frac{1}{3}d$ 力臂的力矩,并由二力矩的平衡得到

$$\frac{1}{2}(62.4)(12)(12)(a)(8) = \frac{1}{2}(105)(12-d)^2(a)\left(8+\frac{1}{3}d\right)$$

$$685 = (144-24d+d^2)\left(8+\frac{1}{3}d\right) \quad 得\ \frac{1}{3}d^3-144d+467=0$$

$d=33.3$ ft 的值,满足这个方程.

补充习题*

10.29 将一条丝线展开,一端连在 x 轴上的距原点之右的 4 in 处,另一端连在 y 轴上的原点之上 4 in 处,试求丝线关于对 x 轴的一次矩.

答案:$Q=11.3\ \mathrm{in}^2$.

10.30 求如图 10.35 所示的半车轮环质量 m 的 Q_x.设轮环的厚度与其半径相比很小.并用极坐标表示.密度为 δ,即单位长度的质量.

答案:$Q_x=2\delta r^2=\dfrac{2rm}{\pi}$.

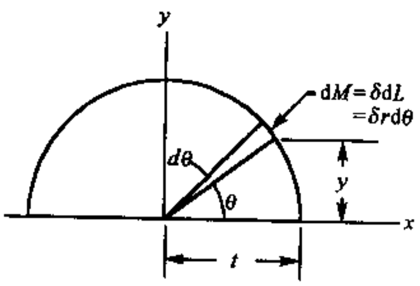


图 10-35

10.31 试求半圆面积关于对它的直径的一次矩.

答案:$Q=\dfrac{2}{3}r^3$.

10.32 试求由 $y^2=4ax$, $x=0$, $y=b$ 所包围面积的 Q_x 和 Q_y.

答案:$Q_x=b^4/16a$, $Q_y=b^5/160a^2$.

10.33 试求半球体积关于对其底面积的 Q.

答案:$Q=1/4\pi r^4$.

10.34 使用题 10.33 的结果,求半径为 6 in 的半球关于其底面积的 Q.

答案:$Q=1020\ \mathrm{in}^4$.

10.35 试求$\frac{1}{4}$椭圆的 Q_x 和 Q_y.椭圆的长、短轴分别是 100 mm 和 75 mm.

* 在附录 B 中,一次矩与中心的表格有助于数值问题的求解.

答案：$Q_x = 23\ 400\ mm^3$, $Q_y = 31\ 300\ mm^3$.

10.36 使用题 10.3 的结果，求正圆锥体关于对其底平面的一次矩，底半径是 75 mm，高是 100 mm.

答案：$Q = 14.7\times10^6\ mm^4$.

10.37 均质杆 18 in 长，在其中点弯成 90°角，试求其中心位置. 使用其边为轴.

答案：$\bar{x} = \bar{y} = 2.25$ in.

10.38 假设题 10.37 中的杆，在其中点弯成 70°，则它的中点距其连接末端的连线有多远？

答案：$d = 3.69$ in.

10.39 一条金属丝弯成如图 10-36 所示形状，试求其重心.

答案：$\bar{x} = 56.5$ mm, $\bar{y} = 103$ mm.

10.40 试求如图 10-37 所示的线组合图形的中心.

答案：$\bar{x} = -77.0$ mm, $\bar{y} = 67.6$ mm.

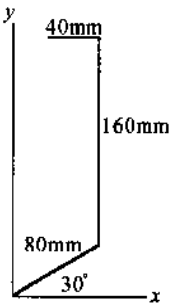


图 10-36

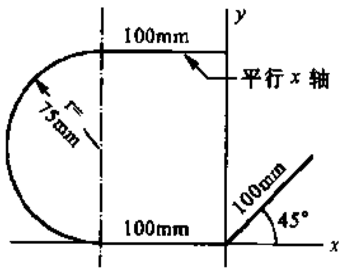


图 10-37

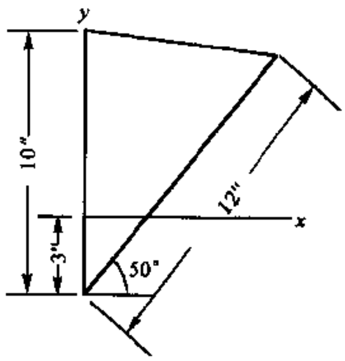
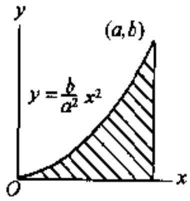
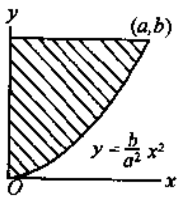
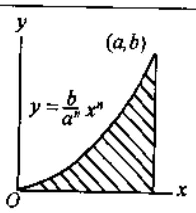


图 10-38

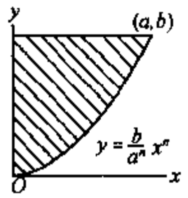
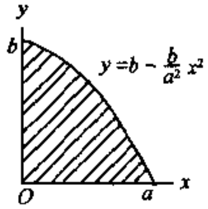
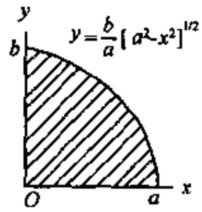
10.41 均匀杆弯成三角形，见图 10-38，试求其中心.

答案：$\bar{x} = 2.52$ in, $\bar{y} = 3.116$ in.

10.42 对于所示面积，求证出下列数值.

图　形	面积	Q_y	Q_y	中　心	
				$\bar{x}$	$\bar{y}$
	$\frac{1}{3}ab$	$\frac{1}{10}ab^2$	$\frac{1}{4}a^2b$	$\frac{3}{4}a$	$\frac{3}{10}b$
	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{2}{3}ab^2$	$\frac{1}{4}b^2a$	$\frac{3}{8}a$	$\frac{3}{5}b$
	$\frac{ab}{n+1}$	$\frac{ab^2}{2(2n+1)}$	$\frac{a^2b}{n+2}$	$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{2(2n+1)}b$

续表

图　形	面积	Q_y	Q_y	中　心	
				$\bar{x}$	$\bar{y}$
	$\frac{n}{n+1}ab$	$\frac{n}{2n+1}ab^2$	$\frac{n}{2(2n+1)}a^2b$	$\frac{n+1}{2(n+2)}a$	$\frac{n+1}{2n+1}b$
	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{4}{15}ab^2$	$\frac{1}{4}b^2a$	$\frac{3}{8}a$	$\frac{2}{5}b$
	$\frac{\pi ab}{4}$	$\frac{ab^2}{3}$	$\frac{a^2b}{3}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$

10.43　试求由抛物线 $y^3=4ax$，直线 $x=0$，$y=b$ 所包围面积的中心.

答案：$\bar{x}=\frac{3b^2}{40a}$，$\bar{y}=\frac{3}{4}b$.

10.44　关于对三次抛物线 $ay^2=x^3$ 与直线 $x=a$ 之间的面积，计算 $\bar{x}$.

答案：$\bar{x}=\frac{5}{7}a$.

10.45　试求由 $y^2=2x$，$x=3$，$y=0$ 所围成面积的中心.

答案：$\bar{x}=1.8$，$\bar{y}=\frac{3}{8}\sqrt{6}$.

10.46　试求抛物线 $y^2=4ax$ 和直线 $y=bx$ 之间的面积的中心.

答案：$\bar{x}=\frac{8a}{5b^2}$，$\bar{y}=\frac{2a}{b}$.

10.47　试求由曲线 $x^2=y$ 和直线 $x=y$ 包围的面积的中心.

答案：$\bar{x}=0.5$，$\bar{y}=0.5$.

10.48　试求由抛物线 $y^3=4x$ 与 $x^2=4y$ 包围面积的中心.

答案：$\bar{x}=\bar{y}=1.8$.

10.49　试求 x 轴与曲线 $y=\sin x$ 之间的面积的中心的 y 坐标. 使用区间为 $0\leqslant x\leqslant\pi$.

答案：$y=\frac{1}{8}\pi$.

10.50　试求由双曲线 $xy=c^2$ 和直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 所包围面积的 $\bar{x}$ 值.

答案：$\bar{x}=\frac{b-a}{\log e^b-\log e^a}$.

10.51　试求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $x=a$，$y=b$ 之间的面积的中心.

答案：$\bar{x}=0.776a$，$\bar{y}=0.776b$.

10.52　求图 10.39 中组合面积的中心.

答案：$\bar{x}=64.4$ mm，$\bar{y}=80.6$ mm.

10.53　计算图 10.40 中 T 型截面的顶线到其中心的距离.

答案：$d=2.97$ in.

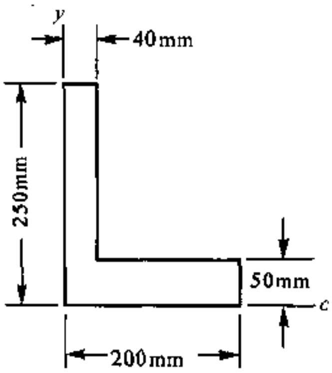


图 10-39

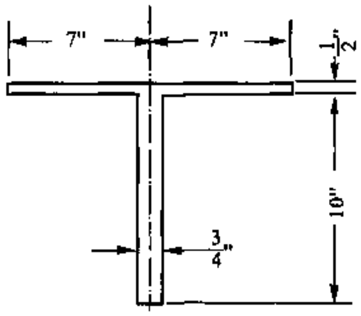


图 10-40

10.54 在图 10.41 中,从半圆面积中移走三角形面积,求阴影面积的中心.
答案: $\bar{x}=0$, $\bar{y}=23.4$ mm.

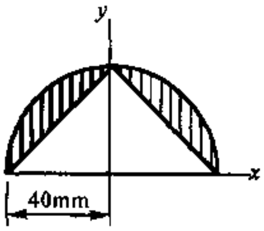


图 10-41

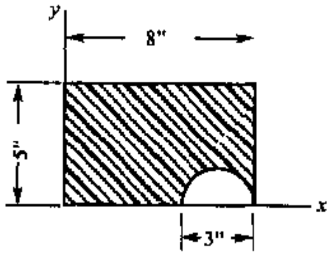


图 10-42

10.55 试求图 10.42 中阴影之间中心的坐标.负面积是半圆.
答案: $\bar{x}=3.77$ in, $\bar{y}=2.69$ in.

求下列图形关于所示轴的中心位置.

10.56 图 10-43.答案: $\bar{x}=10.0$ mm, $\bar{y}=110$ mm.

10.57 图 10-44.答案: $\bar{x}=0$ in, $\bar{y}=4.37$ in.

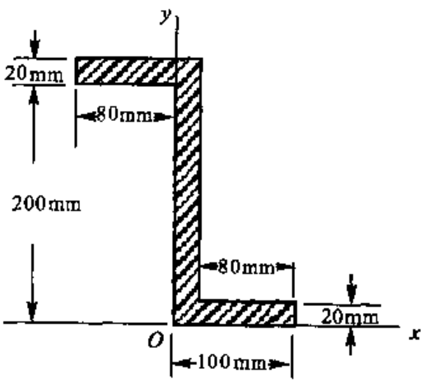


图 10-43

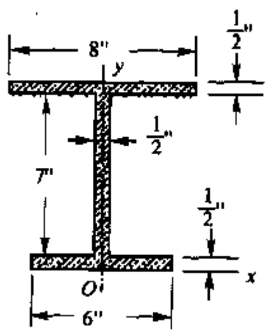


图 10-44

10.58 图 10-45.答案: $\bar{x}=11.9$ mm, $\bar{y}=0$ mm.

10.59 图 10-46.答案: $\bar{x}=1.32$ in, $\bar{y}=3.59$ in.

10.60 图 10-47.答案: $\bar{x}=99.3$ mm, $\bar{y}=41.1$ mm.

10.61 图 10-48.答案: $\bar{x}=3$ in, $\bar{y}=3.40$ in.

10.62 用积分法证明正圆锥体积的中心在距底表面距离的四分之一高度处.

10.63 由直线 $by=ax$, $y=0$ 和 $x=b$ 包围的面积绕 x 轴旋转而生了锥体.试求此锥体的 $\bar{x}$.

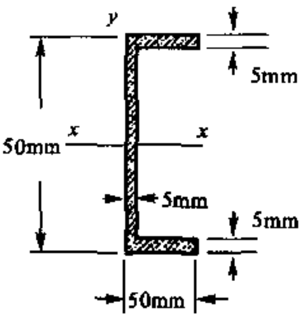


图 10-45

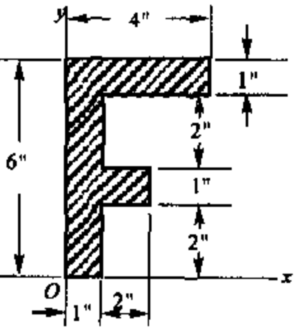


图 10-46

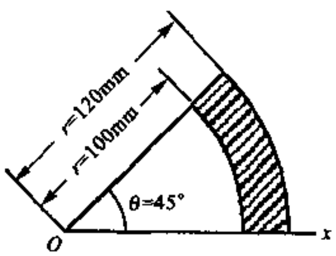


图 10-47

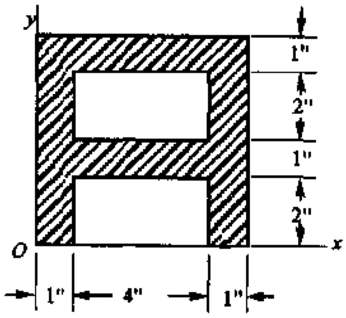


图 10-48

答案：$\bar{x}=\frac{3}{4}b$.

10.64 用积分法证明半球中心是距底表面的距离为八分之三半径.

10.65 由抛物线 $y^2=4ax$ 和直线 $x=b, y=0$ 组成的面积绕关于 x 轴旋转，证明由此生成的抛物线的体积的 $\bar{x}=\frac{2}{3}b$.

10.66 第一象限中的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转，试证其生成体积的 $\bar{x}=\frac{3}{8}a$.

10.67 由双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 和直线 $y=0, x=2a$ 包围的面积绕 x 轴旋转，计算生成体的 $\bar{x}$.

答案：$\bar{x}=\frac{27}{16}a$.

10.68 由曲线 $y=\sin x$ 和直线 $y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 包围的面积绕 x 轴旋转，计算生成体的 $\bar{x}$.

答案：$\bar{x}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2\pi}$.

10.69 由曲线 $y=e^x$ 和直线 $x=b, y=0$ 组成的面积，绕 x 轴旋转，试求生成体的 $\bar{x}$.

答案：$\bar{x}=\left(be^{2b}-\frac{1}{2}e^{2b}+\frac{1}{2}\right)\Big/(e^{2b}-1)$.

10.70 由曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和直线 $x=a, y=b$ 所形成的面积，绕 x 轴旋转，试求生成体的 $\bar{x}$.

答案：$\bar{x}=\frac{3}{4}a$.

10.71 试求正圆锥体积的中心. 其底表面直径 100 mm，高为 200 mm.

答案：$d=50$ mm.

10.72 正圆锥体高 8 in，底表面半径是 6 in，与直径为 12 in 的半球体结合，并且底面重合. 求总体积的中心.

答案：距锥顶 8.55 in

10.73 正圆锥高 250 mm，底面直径 200 mm，将其放在底相同，高为 300 mm 的正圆柱上，求组合体的中心.

答案：距锥顶 354 mm

10.74 半径为 a 的半球放在底面半径也为 a 的正圆柱上. 如果圆柱高为 a，求组合体的中心.

答案:离圆柱底面为 $0.85a$.

10.75 阶梯式正圆锥的高为 4 ft,底面半径分别为 2 ft 和 4 ft.求其体积的中心.

答案:离大的底面为 1.57 ft.

10.76 从半径为 a 的半球中,切去具有相同底和高的圆锥体,证明剩下部分的中心距底表面的距离为$\frac{1}{2}a$.

10.77 物块尺寸为 600 mm×600 mm×1200 mm.在其顶面(600×600 的面)的中心法向挖去一个直径为 150 mm 的孔.如果孔深为 460 mm,试求剩余体积的中心.

答案:离底面为 593 mm.

10.78 图 10.49 为车库加工的零件图.计算此零件的中心,以其左端为基准.

答案:$d = 5.48$ in.

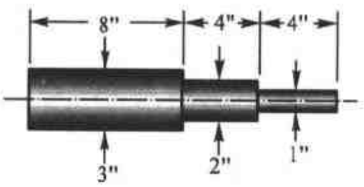


图 10-49

10.79 两球体的体积分别为 5 in^3 和 15 in^3,用一个体积为 10 in^3 的棒条连接.如果两球中心距离为 10 in,则组合体中心离体积为 5 in^3 的球的中心为多远?

答案:$d = 6.67$ in.

10.80 在半径为 400 mm 的球体上有一个半径为 100 mm 的球形坑,如果两球中心的距离是 200 mm,则中心在哪里?设坐标轴正向从大球中心通过球坑中心.

答案:$d = -3.18$ mm.

10.81 重解题 10.19,并将坐标原点建在顶点.

答案:$d = -\frac{2}{3}h$.

10.82 圆柱形桶其直径 20 ft,高 20 ft,并且底部为半球形,顶部为锥形,高为 5 ft.求空桶的重心.设其与表面积重心相同.

答案:$\bar{y} = 17.6$ ft(离桶底).

10.83 半球的半径为 75 mm,与一具有同底的高为 100 mm 的圆锥相连接,问其表面积的中心在哪里?设两者紧密连接.

答案:离顶点为 105 mm.

10.84 开口圆桶是由高 36 in,直径 20 in 的正圆柱组成,在桶底扩接一个高为 4 in 的正圆锥体.试求此表面积中心.

答案:离顶点为 19.5 in.

10.85 正圆锥体的半径为 200 mm,高为 250 mm,试求(a)斜表面积的中心;(b)体积关于底表面的中心.

答案:(a)$d = 83.3$ mm,(b)$d = 62.5$ mm.

10.86 求均质椭圆体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的第一象限的质量中心.

答案:$\bar{x} = \frac{3}{8}a$, $\bar{y} = \frac{3}{8}b$, $z = \frac{3}{8}c$.

10.87 试求半球的质量中心,密度为变量,(a)离底表面的距离成线性变化,(b)以离中心距离的半径平方项变化.

答案:(a)$\frac{8}{15}r$,(b)$d = 0.417r$.

10.88 试求正圆锥体的质量中心.密度随离底表面两点的距离成正比.

答案:$d = \frac{2}{5}h$.

10.89 一锤具有木制圆柱体形的头和一个木制圆柱体形的柄.头的直径为 4 in,高为6 in.柄的直径是 1.25 in,长是 12 in.则相对于柄的自由端的质心在哪里?木头比重为 50 lb/ft^3.

答案:$d = 12.7$ in.

10.90 从底表面直径为 200 mm,高 250 mm 的正圆锥体中切去一个直径为 50 mm,高 50 mm 的圆柱体.圆柱体的底表面位于圆锥体底表面的平面中.如果圆锥是由密度为 785 kg/m^3 的钢制成,则剩余部分的质量中心在底表面以上多远?

答案:$d = 64.0$ mm.

10.91 桶的直径 2.5 m.当它空的时候,其质量中心在桶底以上 1.2 m.如果装上 1.8 m 高的油(密度 880 kg/m^3),且空桶质量是 3600 kg,求桶与油的质心.

答案：基础以上 0.995 m.

10.92 一个由黄铜制的立方体，各边长为 8 in，在其顶面中心法向挖去一个深 6 in，直径是 2 in 的孔洞. 并在孔里装满了铅. 铜的比重为 525 lb/ft^3，铅的比重为710 lb/ft^3. 求两种金属关于底表面的质心.

答案：4.04 in.

10.93 钢制圆柱体，直径为 4 in，高为 6 in，其中一正圆锥形孔，底表面与圆柱底面重合，其轴与圆柱轴也重合，并注满了铅. 圆锥体的底表面直径是 2 in，高为 1 in. 钢的比重是 490 lb/ft^3，铅的比重是 710 lb/ft^3. 求关于底面的中心.

答案：$d = 2.97$.

10.94 在图 10-50 中，计算组合质量离左端的质心位置. 大圆柱体的密度是 7850 kg/m^3，小圆柱体的密度是 8500 kg/m^3.

答案：$d = 299$ mm.

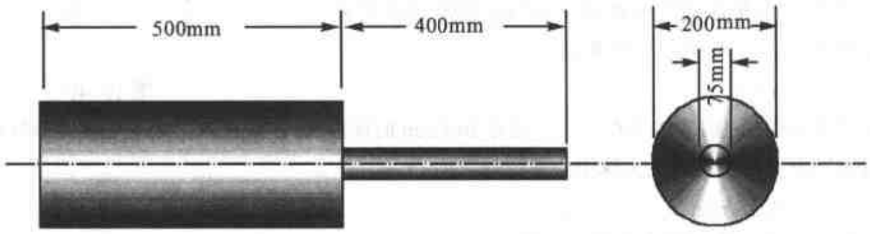


图 10-50

10.95 在图 10-51 中，一半圆弧的半径为 r，试求半圆弧绕 y 轴旋转而生成的面积. 注：半圆弧的中心 $\bar{x} = d + 2r/\pi$.

答案：$S = 2\pi^2 rd + 4\pi r^2$.

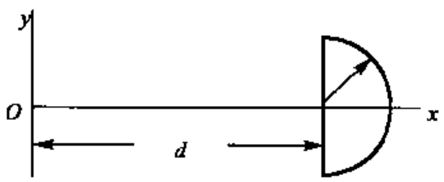


图 10-51

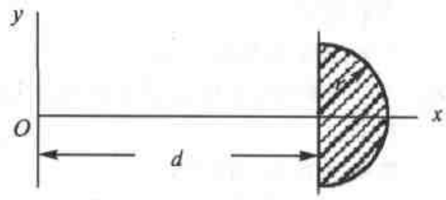


图 10-52

10.96 试求由半径为 r 的半圆面积绕 y 轴旋转而生成的体积. 见图 10-52.

答案：$V = \pi^2 r^2 d + \frac{4}{3}\pi r^3$

10.97 求椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕直线 $x = 2a$ 旋转而生成的体积.

答案：$V = 4\pi^2 a^2 b$.

10.98 图 10-53 所示是一个压榨机上的飞轮. 设轮缘的截面是矩形及切去半径为 1/2 in 的半圆槽. 计算图示 A-A 截面的中心离轮圆心的距离，用这个中心的距离确定轮缘的体积.

答案：$V = 95\ in^3$.

10.99 直角三角形底为 h，高为 r，并绕其底边旋转 360°，则由此生成的体积是多少？

答案：$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

10.100 直角三角形 ABC 如图 10-54 所示.

(a)求三边组成的图形的中心.

(b)求三边围成的面积的中心.

(c)设三边质量分别为 3，2 和 1 oz，并集中在 A，B，C 三点，求质心.

答案：(a) $\bar{x} = 3$ in，$\bar{y} = 2$ in，(b) $\bar{x} = 2.67$ in，$\bar{y} = 3$ in，(c) $\bar{x} = 2.67$ in，$\bar{y} = 1$ in.

10.101 6 m 高的墙上，在其铅垂面受有水压力，求水压力中心的位置在墙上的位置？

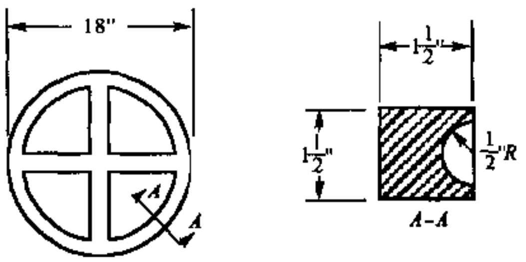


图 10-53

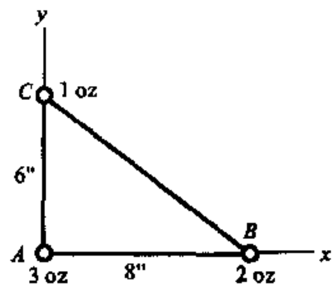


图 10-54

答案：表面以上 4 m.

10.102　在题 10.101 中，求在 12 m 长，1 m 厚的墙截面中，水关于对基础的转矩是多少？水密度为 1000 kg/m^3.

答案：4.23×10^6 N·m 或 3.23M N·m.

10.103　梁长 12 ft，从左端开始，在 4 ft 长的梁上作用均匀分布载荷为 100 lb/ft，并使梁上距左端 4 ft 处在 100 lb/ft 力的基础上沿梁长从左至右逐渐加大成线性关系，到梁最右端时其载荷最大值为 300 lb/ft. 则问梁两端支承反力为多少？

答案：$R_L = 780$ lb, $R_R = 1220$ lb.

10.104　梁承受均匀分布载荷其单位力为 w lb/ft，作用长度为$\frac{1}{3}l$，然后逐渐均匀递减至梁最右端时为零. 问作用的合力为多大？并求作用的支点上的力是多大？

答案：$P=\frac{2}{3}wl$ lb, $R_L=\frac{23}{54}wl$ lb, $R_R=\frac{13}{54}wl$ lb.

10.105　盛满水的水箱闸门 AB 倾斜安装，如图 10-55 所示. 其宽 600 mm(与视图方向垂直)，闸门 B 处铰接，A 处夹紧. 试求(a)作用在门法向的全部水压力；(b)A 处的水平夹紧力.

答案：(a)11.4 kN, (b)5.3 kN.

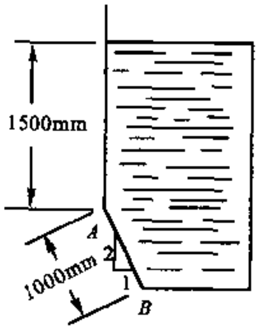


图 10-55

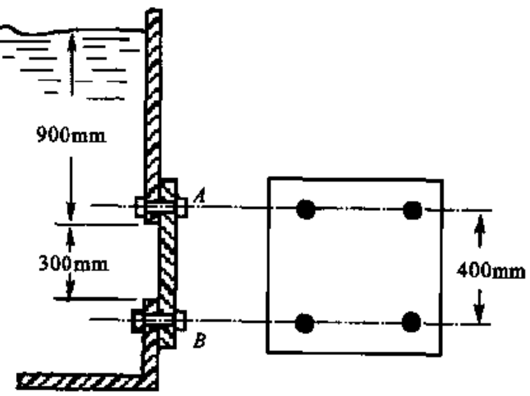


图 10-56

10.106　见图 10-56，一块板盖在油箱边上的一个 300 mm 长的方孔上，油箱中装满了密度为 800 kg/m^3 的油. 分别用两个螺栓紧固在板的 A，B 两处，求每个螺栓中的力.

答案：螺栓中的力：A 处 = 179 N, B 处 = 192 N.

10.107　假设上题中的板盖在一个直径为 300 mm 的圆孔上. 求每个螺栓中的力.

答案：螺栓中的力为 A 处 = 140 N, B 处 = 150 N.

10.108　混凝土坝的截面如图 10-57 所示. 试求 1 ft 长坝截面的底部作用在地基上的力. 水比重为 62.4 lb/ft^3，混凝土比重为 150 lb/ft^3.(提示：研究坝的斜面上水体积的隔离体图.)

答案：$R_h = 7020$ lb, $R_v = 29\ 000$ lb, 作用点为 A 点之右 5.64 ft 处.

10.109　半圆柱槽的半径为 3 ft，里面装满了比重为 100 lb/ft^3 的液体. 槽末端的闸门控制槽中的流体. 试求闸门上合力的大小及离顶部的位置.

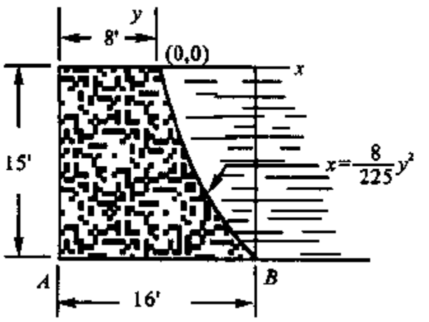


图 10-57

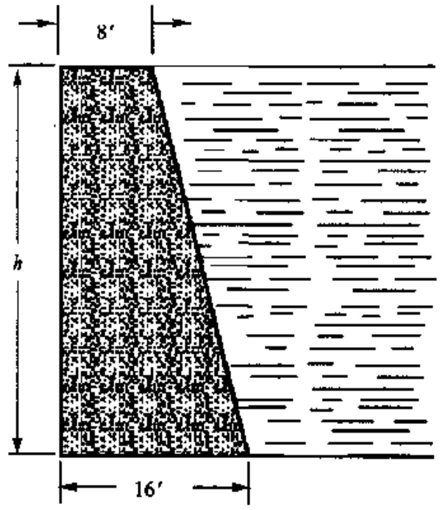


图 10-58

答案：$F=1800$ lb, $y=1.77$ ft, 顶部下面.

10.110　求解题 10.108, 设坝体表面为抛物线的.

答案：$R_h=7000$ lb, $R_v=31\ 000$ lb, 作用点为 A 点之右 5.92 ft 处.

10.111　求解题 10.109 设槽截面为三角形的，且三角形 3 ft 高，在顶点 3 ft 宽.

答案：$F=450$ lb, $y=1.5$ ft.

10.112　图 10-58 中，求水位到达警戒线前，坝体不致倾倒的最大高度是多少?

答案：$h=37.4$ ft.

第11章 虚 功

11.1 虚位移和虚功

质点的虚位移 δS 是约束所允许的在质点的位置上任意无限小的变化.虚位移实际上并不一定发生,而是一种假设的位移.

力的虚功 δU 由 $F_t\delta S$ 决定.F_t 是力沿着虚位移 δS 方向上的分量的大小.

力偶矩 M 的虚功 δU 由 $M\delta\theta$ 所决定.$\delta\theta$ 是虚角位移.

11.2 平衡

质点的平衡:质点平衡的充分必要条件是,作用在质点上的所有的力在任意虚位移 δS 上的虚功之和等于零.

刚体的平衡:刚体平衡的充分必要条件是,作用在刚体上的所有外力,在其约束允许的虚位移上所做的虚功之和等于零.

物体系统的平衡:与上述刚体平衡条件相同.但应记住,内力、光滑销子的反力、运动方向的法向力,在约束允许的虚位移上不做功.做功的外力(包括摩擦力)又被称为主动力或作用力.

系统的平衡:如果势能 V* 有稳态值,平衡存在.即,如果 V 是独立变量的函数,例如是 x 的函数,则 $\frac{dV}{dx}=0$,得到 x 的平衡值.

11.3 稳定平衡

若势能 V 是极小值,则为稳定平衡.图 11-1(a)中,一个珠子,穿在由金属丝弯成的无摩擦的圆环的下边,显然,由于珠子的势能最小,这是珠子的平衡位置.当它受到微小的扰动而偏离平衡的位置后,在重力的作用下,它能返回原平衡位置.使用 x 轴为标准(基准面),珠子的势能在 x 轴以下是,

$$V=-Wy=-W\sqrt{a^2-x^2}$$

由 $\frac{dV}{dx}=0$,求得平衡位置:

$$\frac{dV}{dx}=+\frac{Wx}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$$

即,$x=0$(珠子最低位置).为了确定平衡的类型,需要计算平衡位置时的 $\frac{d^2V}{dx^2}$,即

$$\frac{d^2V}{dx^2}=+\frac{W}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{Wx^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

在 $x=0$ 时,$\frac{d^2V}{dx^2}=+\frac{W}{a}$(正的),表明为稳定平衡.

11.4 不稳定平衡

若势能 V 是极大值,则为不稳定平衡.图 11-1(b)中,珠子在环中最高位置,显然,珠子的

---

* 质量 m 的距离 h 在选择的参考平面以上,则势能为 mgh;如果 m 在参考平面以下,$V=-mgh$.弹性势能 V,与弹簧的常数 k 和相对于未变形形状的压缩或伸长量 x 距离的关系是 $V=\frac{1}{2}kx^2$.

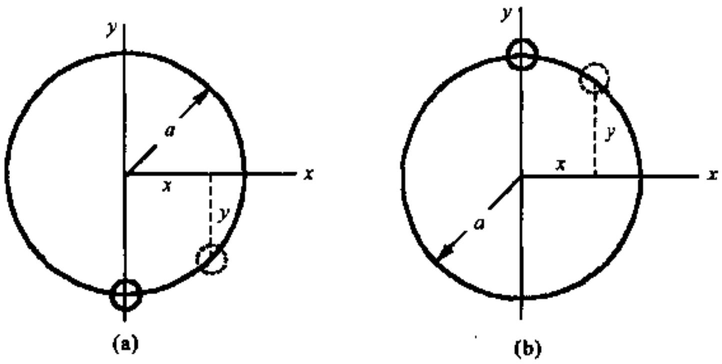


图 11-1

势能最大,这是珠子的不稳定平衡的位置.使用 x 轴为标准(基准面),珠子的势能在 x 轴以上任意位置是,

$$V=+Wy=+\sqrt{a^2-x^2}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0$,求出平衡位置:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=+\frac{Wx}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$$

即 $x=0$(珠子在最高位置).再由

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{W}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{Wx^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

当 $x=0$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{W}{a}$(负的),表明为不稳定平衡.

11.5　随遇平衡

不论在哪个位置,系统总是平衡的,则为随遇平衡.例如,将珠子放在水平的金属丝上,珠子可停留在金属丝的任何位置上.

11.6　平衡的概括

为了确定平衡系统的平衡位置的变量值,将系统的势能表示成变量的函数.在上面的讨论中,x 为变量.令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0$,可以确定平衡状态的 x 值,评价 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}$,则可得到平衡的类型,即

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}>0\qquad\text{平衡是稳定的}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}<0\qquad\text{平衡是不稳定的}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=0\qquad\text{平衡是随遇的}$$

例　　题

11.1　均质梯子的质量为 M,长度为 l,在水平力 P 的作用下处于平衡状态,如图 11-2 所示.使用虚功方法,用 M 表示P.

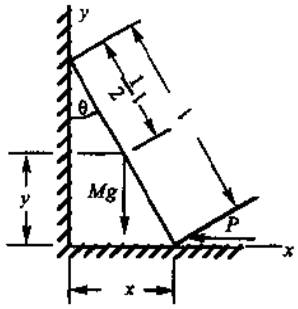


图 11-2

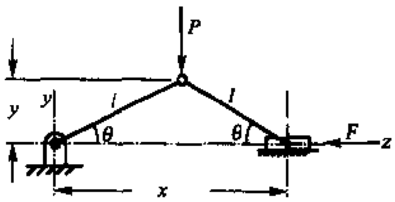


图 11-3

解 ☞ 设 x 向右为正,则 P 在虚位移 δx 上所做的虚功是 $-P\delta x$,因为 P 指向左.

设 y 的方向向上为正,则向下的重力在虚位移 δy 上所做的虚功为 $-Mg\delta y$. 由虚功 δU 之和等于零,得

$$\delta U = -P\delta x - Mg\delta y = 0 \tag{1}$$

由图中, $x = l\sin\theta$, $y = \frac{1}{2}l\cos\theta$, 则

$$\delta x = l(\cos\theta)\delta\theta \qquad \delta y = -\frac{1}{2}(\sin\theta)\delta\theta$$

将此值代入方程(1),得 $P = \frac{1}{2}Mg\tan\theta$.

11.2 压紧机构如图 11-3 所示,试用 θ 角表示力 F 和 P 之间的关系.

解 ☞ 设 x 向右为正, F 在增量 δx 上做的虚功是 $-F\delta x$, 由于 F 指向左. 设 y 向上为正, P 在增量 δy 上做的虚功是 $-P\delta y$, 因为 P 指向下. 由虚功之和等于零,得

$$\delta U = -F\delta x - P\delta y = 0 \tag{1}$$

由图中, $x = 2l\cos\theta$, $y = l\sin\theta$, 则

$$\delta x = -2l(\sin\theta)\delta\theta \quad 和 \quad \delta y = l(\cos\theta)\delta\theta$$

将其代入方程(1),得到 $P = 2F\ \tan\theta$.

11.3 在图 11-4 所示的曲柄滑块机构中,使用虚功方法,确定曲柄 R 上的力偶 M 与作用在滑块上的力 F 之间的关系.

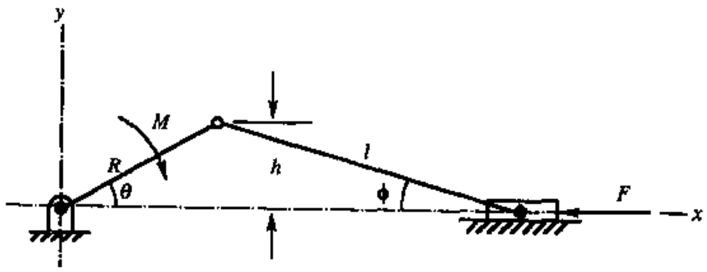


图 11-4

解 ☞ 设 θ 逆时针转动为正,则 M 在增量 $\delta\theta$ 上做的虚功是 $-M\delta\theta$. 设 x 向右为正,则 F 在增量 δx 上做的虚功是 $-F\delta x$. 由虚功 δU 之和等于零,得

$$\delta U = -M\delta\theta - F\delta x = 0 \tag{1}$$

由图中得, $x = R\cos\theta + l\cos\phi$. 为了用 θ 表示 ϕ, 有 $h = R\sin\theta = l\sin\phi$, 得到 $\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-(R/l)^2\sin^2\theta}$.

将

$$\delta x = -R(\sin\theta) - \frac{R^2}{l}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-(R/l)^2\sin^2\theta}}\delta\theta$$

代入方程(1)得

$$M = FR(\sin\theta)\left[1 + \frac{R\cos\theta}{\sqrt{1-(R/l)^2\sin^2\theta}}\right]$$

11.4 见图 11-5. 使用虚功方法,求维持受 P 力作用构架平衡的 F 之值. 每根连杆长 $2a$, $\theta=45^\circ$

解 ☞ 在分析中,令 θ 为变量,最后再使 $\theta=45^\circ$. 如果有增量 $\delta\theta$,则 P 在向上做负功. 升起的微分量的大小是 $|\delta(a\cos\theta)|=a\sin\theta\delta\theta$. 同时,$F$ 做正功. F 的虚位移是 $\delta(a\sin\theta)=a\cos\theta\delta\theta$.

因此,有 $$\delta U = -P(a\sin\delta\theta)+2F(a\cos\theta\delta\theta)=0.$$

其解为 $$F=\frac{1}{2}P\tan\theta;\text{当 }\theta=45^\circ\text{时},F=0.5P.$$

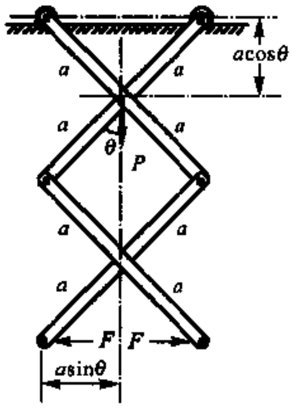


图 11-5

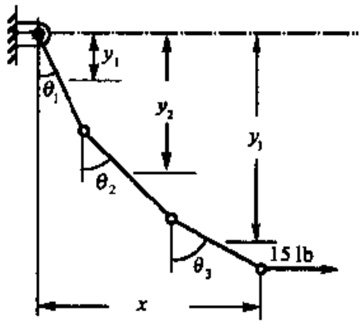


图 11-6

11.5 3 根均质连杆,各重 10 lb,长 6 ft,在 15 lb 的水平力作用下,维持在平衡位置,如图 11-6 所示. 试求平衡位置的 θ_1,θ_2 和 θ_3 之值.

解 ☞ 对于增量 δx,15 lb 力将做正功,对于增量 δ_1,δ_2 和 δ_3 则 10 lb 的重力也做正功. 则有

$$\delta U = +15\delta x+10\delta y_1+10\delta y_2+10\delta y_3=0$$

由图中得

$$x = 6\sin\theta_1+6\sin\theta_2+6\sin\theta_3$$

$$y_1 = 3\cos\theta_1,\ y_2 = 6\cos\theta_1+3\cos\theta_2,\ y_3 = 6\cos\theta_1+6\cos\theta_2+3\cos\theta_3$$

则

$$\begin{aligned}\delta x &= 6\cos\theta_1\delta\theta_1+6\cos\theta_2\delta\theta_2+6\cos\theta_3\delta\theta_3\\ \delta y_1 &= -3\sin\theta_1\delta\theta_1\\ \delta y_2 &= -6\sin\theta_1\delta\theta_1-3\sin\theta_2\delta\theta_2\\ \delta y_3 &= -6\sin\theta_1\delta\theta_1-6\sin\theta_2\delta\theta_2-3\sin\theta_3\delta\theta_3\end{aligned}$$

代入,得

$$\begin{aligned}\delta U &= +15(6\cos\theta_1\delta\theta_1+6\cos\theta_2\delta\theta_2+6\cos\theta_3\delta\theta_3)\\ &\quad -10(6\sin\theta_1\delta\theta_1)-10(6\sin\theta_1\delta\theta_1+3\sin\theta_2\delta\theta_2)\\ &\quad -10(6\sin\theta_1\delta\theta_1+6\sin\theta_2\delta\theta_2+3\sin\theta_3\delta\theta_3)\\ &= 0\end{aligned}$$

为了求解 θ_1,令 $\delta\theta_2=\delta\theta_3=0$,得到

$$(90\cos\theta_1-30\sin\theta_1-60\sin\theta_1-60\sin\theta_1)\delta\theta_1=0$$

解出 $\tan\theta_1=\dfrac{90}{150}$, $\theta_1=30^\circ58'$.

为求解 θ_2,令 $\delta\theta_1=\delta\theta_3=0$,得到

$$(90\cos\theta_2-30\sin\theta_2-60\sin\theta_2)\delta\theta_2=0$$

解出 $\theta_2=45^\circ$

同理得 $(90\cos\theta_3-30\sin\theta_3)\delta\theta_3=0$,解出 $\theta_3=71^\circ33'$.

11.6 水平弹簧在图 11-7 所示位置压缩了 5 in.100 lb 的物块与水平面之间的摩擦系数为 0.3，使用虚功方法，求作用在顶点支承的铅垂杆的力矩 M 多大，才能使物块向右运动？

解 设物块向左移动的距离为 δx. 则弹簧的压缩量由 5 增加到 $5+\delta x$ in，杆转动的角位移为 $\frac{\delta x}{8}$. 水平面施加在物块上的法向力为 100 lb，因此摩擦力等于 30 lb. 虚功之和等于摩擦力的负功，弹簧的负功和力矩的正功，即

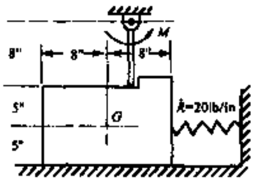


图 11-7

$$\delta U = -30\delta x - \frac{1}{2}(20)[(5+\delta x)^2 - 5^2] + M\frac{\delta x}{8} = 0$$

或

$$-30\delta x - 10(25 + 10\delta x + \delta x^2 - 25) + M\frac{\delta x}{8} = 0$$

因为 δx 很小，略去 δx^2，化简得

$$-30\delta x - 100\delta x + M\frac{\delta x}{8} = 0$$

则，$M = 1040$ lb-in.

11.7 使用虚功原理，试求图 11-8(a)中销 A 与 B 的反力的分量. 忽略所有销子的摩擦. E 处力是水平的.

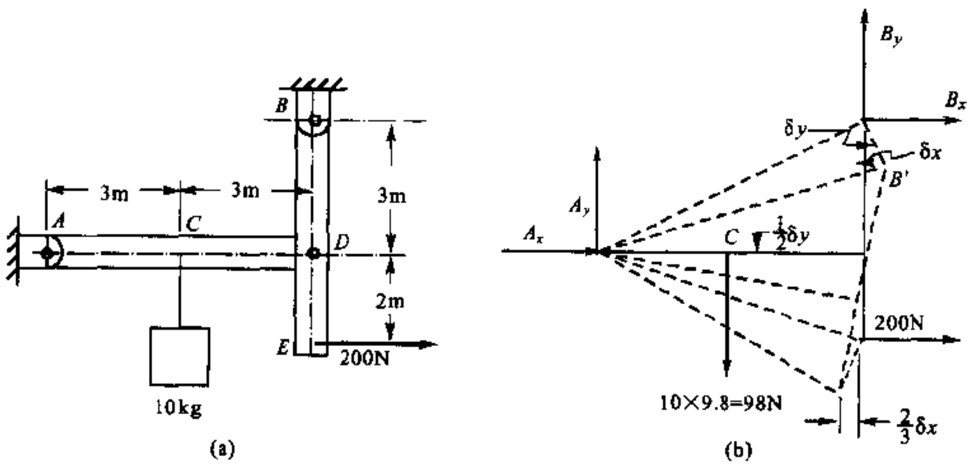


图 11-8

解 图 11-8(b)中的隔离体图表明，去掉了销钉 B 并且给出了关于 A 销的虚角位移 $\delta\theta$. B 到 B' 的虚位移用向下位移 δy 和向右位移 δx 表示. 由于角位移很小，所以，构件 BDE 上各点向下运动的量为 δy；C 点位移是 D 点位移的 $\frac{1}{2}$. 由于杆 BDE 旋转角度为 $\delta\theta$，E 点水平位移是 B 点位移的 $\frac{2}{3}$，即 $\left(\frac{2}{3}\delta x\right)$. 销 A 反力不做功. 虚功是，

$$\delta U = +98\left(\frac{1}{2}\delta y\right) - B_y\delta y + B_x\delta x - 200\left(\frac{2}{3}\delta x\right) = 0$$

即

$$\delta U = (49 - B_y)\delta y + (B_x - 133)\delta x = 0$$

由于 δx 和 δy 完全无关，若 $\delta U = 0$ 成立，只有

$$(49 - B_y) = 0 \quad 和 \quad B_x - 133 = 0$$

解出，$B_y = 49$ N 向上和 $B_x = 133$ N 向右.

应用平衡方程如下：

$$\sum F_x = A_x + B_x + 200 = 0 \quad 得\ A_x = 333\text{N} 向左$$

$$\sum F_y = A_y - 98 + B_x = 0 \quad 得\ A_y = 49\text{N} 向上$$

不使用虚功原理,则必须研究构架中各部分的隔离体图.

11.8　如图 11-9 所示,一无重杆在轴 O 铰接,此轴垂直于纸轴面,二重物分别重 W 和 w 连接在杆两端.试讨论平衡状态.

讨论　☞ 选 $\theta=0°$为基准,则 θ 为图示的任意角,W 的势能为 $Wa(1-\cos\theta)$,w 的势能为 $wb(1-\cos\theta)$.则在角 θ 时,系统的总势能是

$$V=-Wa(1-\cos\theta)+wb(1-\cos\theta)$$

为研究平衡,令$\frac{dV}{d\theta}=0$,则

$$\frac{dV}{d\theta}=-Wa\sin\theta+wb\sin\theta=0$$

当 $\sin\theta=0(\theta=0°)$或 $wb=Wa$(θ 可以是任意角)时,上式满足.

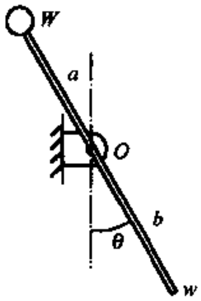


图 11-9

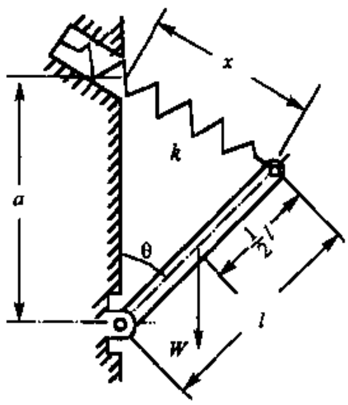


图 11-10

为讨论稳定性,求$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-Wa\cos\theta+wb\cos\theta$.

其次评价$\frac{d^2V}{d\theta^2}$在两个平衡条件下的情况.当 $\theta=0°$时,$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-Wa+wb$.为了达到稳定平衡,则其值应为正,由此得到 $wb>Wa$.另一平衡状态出现时,有 $wb=Wa$,即$\frac{d^2V}{d\theta^2}=0$;是随遇平衡情况.

总之,如果 $wb>Wa$,当 $\theta=0°$时,系统将是稳定平衡;如果 $wb=Wa$,则系统在任何位置都平衡.

11.9　均匀杆长 l,重 W,由劲度系数为 k 的弹簧维持平衡.当 $\theta=0°$时,弹簧无变形.讨论平衡状态.

讨论　☞ 见图 11-10.使用 $\theta=0°$作为基准,杆在位置 θ 时,杆失去的势能等于$\frac{1}{2}Wl(1-\cos\theta)$,并且弹簧获得势能为$\frac{1}{2}kx^2$.由几何关系,$x^2=a^2+l^2-2al\cos\theta$.因此,系统在任意角 θ 时的势能是,

$$V=-\frac{1}{2}Wl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}k(a^2+l^2-2al\cos\theta)$$

和

$$\frac{dV}{d\theta}=-\frac{1}{2}Wl\sin\theta+kal\sin\theta$$

由其为零得 $\sin\theta=0\ (\theta=0°)$或 $k=\frac{1}{2}\frac{W}{a}$.

再求$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-\frac{1}{2}Wl\cos\theta+kal\cos\theta$.

在 $\theta=0°$时,$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-\frac{1}{2}Wl+kal$,如满足 $k>\frac{1}{2}\frac{W}{a}$,则值为正;在其他任意角度,若$\frac{d^2V}{d\theta^2}=0$,则 $k=\frac{1}{2}\frac{W}{a}$.

结论:如果 $k=\frac{1}{2}\frac{W}{a}$,系统为随遇平衡状态.

11.10　图 11-11 中,两个同样的齿轮绕无摩擦支点转动.无重杆长 2 ft,与齿轮刚性连接并吊

一重20 lb的重物.另一齿轮与劲度系数为 $k=12$ lb/in的铅直弹簧相接.试求平衡状态的 θ 角.

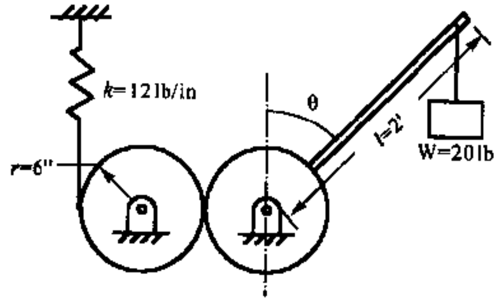


图 11-11

解 ☞ 选 $\theta=0°$ 为基准,并且此时弹簧没变形.在任意角 θ 时,重物失去的势能等于 $Wl(1-\cos\theta)$.弹簧获得的势能是 $\frac{1}{2}k(r\theta)^2$.系统的总势能是

$$V=-Wl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}kr^2\theta^2$$

则

$$\frac{dV}{d\theta}=-Wl\sin\theta+kr^2\theta \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2}=-Wl\cos\theta+kr^2$$

如果 $\theta=0°$ 或 $\sin\theta=\left(\frac{kr^2}{Wl}\right)\theta$,则一次微分为零.

当 $\theta=0°$ 时,$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-Wl+kr^2=-20(2)+(144)\left(\frac{1}{2}\right)^2=-4$(不稳定).

由另一角度的平衡条件,得

$$\sin\theta=\frac{kr^2}{Wl}\theta=\frac{144\left(\frac{1}{2}\right)^2}{20(2)}\theta=0.9\theta$$

经反复迭代,得 $\theta=44.1°$ 时,满足上式.则 $\frac{d^2V}{d\theta^2}=-(20)\cos 44.1°+36=+7.2$,表明为稳定平衡.

11.11 均质绳质量为 M,置于半径为 r 的球上如图11-12所示.当绳子在同一水平面时,离顶部向下垂直距离为 b,试求此时,绳中张力 T.使用虚功原理.

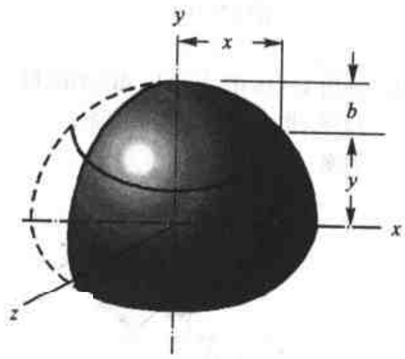


图 11-12

解 ☞ 绳在 xz 平面之上,高度为 y.它的长度是

$$l=2\pi x=2\pi\sqrt{r^2-y^2}$$

设绳虚位移 δy 向下,则虚功是

$$\delta U=+Mg\delta y+T\delta l=0$$

代入

$$\delta l=\frac{2\pi\left(\frac{1}{2}\right)(-2y\delta y)}{(r^2-y^2)^{1/2}}=\frac{-2\pi y\delta y}{(2br-b^2)^{1/2}}$$

得到

$$T=\frac{Mg(2br-b^2)^{1/2}}{2\pi(r-b)}$$

补充习题

11.12 使用虚功原理,求水平构件截面中的力 T,并用载荷 P 和 θ 角表示.见图11-13.

答案：$T=\frac{3}{4}P\tan\theta$

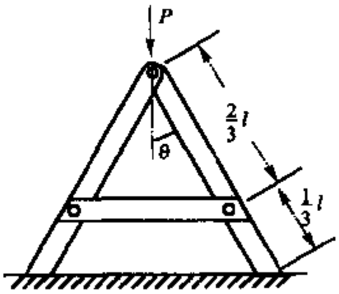


图 11-13

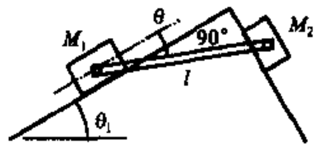


图 11-14

11.13　图 11-14 中，质量 M_1 和 M_2 置于无摩擦的两个垂直的平面上，并用长为 l 的无重杠杆连接. 试求平衡时的角 θ.

答案：$\tan\theta=\frac{M_2}{M_1}\cos\theta_1$.

11.14　见图 11-15. 使用虚功原理，求维持质量 M 平衡的力 P.

答案：$P=\frac{1}{2}Mg$.

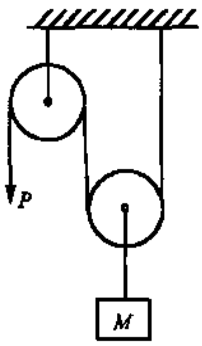


图 11-15

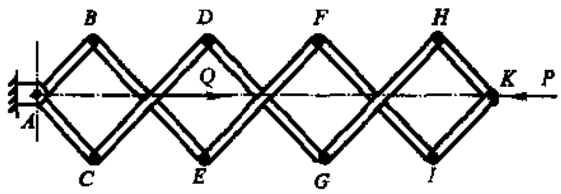


图 11-16

11.15　在图 11-16 中，杆 AB、AC、HK 和 KI 长为 a ft. 其他杆长 $2a$ ft. 杆之间用无摩擦销子连接. 使用虚功原理，求 P 与 Q 之间的关系.

答案：$Q=4P$.

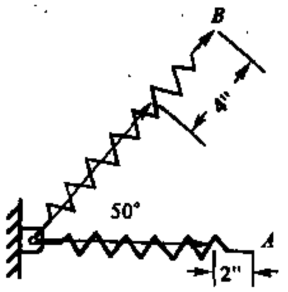


图 11-17

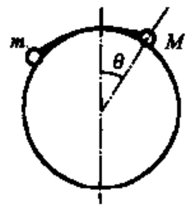


图 11-18

11.16　图 11-17 中的弹簧的自由端 A，从未伸长状态拉伸了 2 in，B 点拉长了 4 in. 如果劲度系数 $k=10$ lb/in，求弹性力在自由端由 A 移动到 B 时所做的功.

答案：$U=60$ in-lb.

11.17　链条重 W，置于高 h，底面半径 r 的正圆锥上. 当链条在同一水平面时，离顶点以下距离为 b，试求此

时链条中的张力.

答案:$T=\dfrac{Wh}{2\pi r}$.

11.18 二质量分别为 m 和 M,用一根轻的不可伸长的绳连接,并放在光滑的圆柱表面,如图 11-18 所示.其二半径之间的夹角为 90°,试求平衡角 θ.并问是否为稳定平衡?

答案:$\tan\theta=\dfrac{m}{M}$;不稳定.

11.19 假设上题中的连接如图 11-19 所示.试求平衡角 θ.并问属于哪种平衡类型.

答案:$\sin\theta=\dfrac{m}{M}$,不稳定.

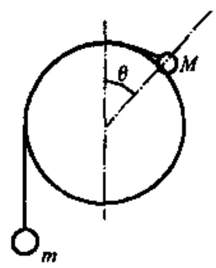


图 11-19

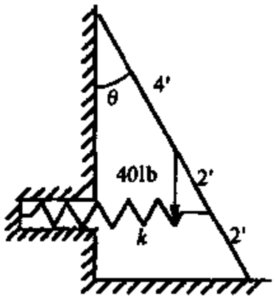


图 11-20

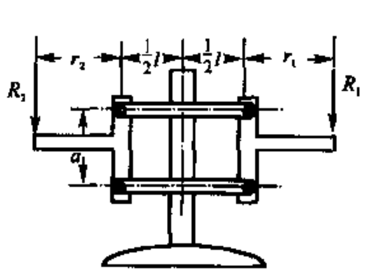


图 11-21

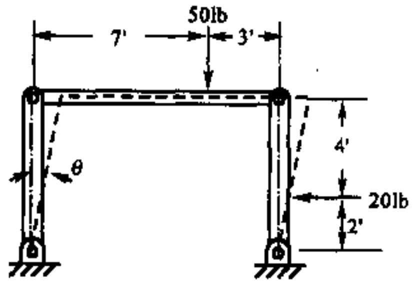


图 11-22

11.20 图 11-20 中,40 lb 的均质梯子静置于光滑表面.当 $\theta=0°$ 时,弹簧未变形.如果劲度系数 $k=50$ lb/ft,研究平衡状态.

答案:$\theta=0°$,稳定平衡;$\theta=27.2°$,不稳定平衡.

11.21 在图 11-21 所示的天平中 $r_2>r_1$,并且各构件重可略去不计.问平衡时 R_1 与 R_2 之间的关系如何?

答案:$R_1=R_2$.

11.22 3 杆连接构架如图 11-22 所示.确定系统平衡时的 θ 角,并问达到此角时的平衡类型是什么?

答案:$\theta=7.59°$,不稳定平衡.

11.23 均质杆质量 50 kg,长 3m,如图 11-23 所示.试求发生稳定平衡时,劲度系数 k 的值是多少?弹簧在图 11-23 示的位置没有变形.

答案:$k>81.7$ N/m.

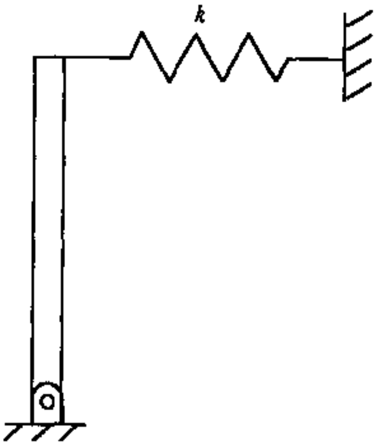


图 11-23

第 12 章　质点运动学

12.1　运动学

运动学研究运动，但不考虑力及其它因素对运动的影响.

12.2　直线运动

直线运动是动点 P 沿直线轨道运动，为了简便选择 x 轴. 在这部分中不使用矢量符号.

(a) 动点 P 在任意时间 t 的位置由 x 轴上离固定原点 O 的距离 x 表示. 距离 x 的正、负按照通用记号.

(b) 动点 P 从 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔上的位置由 x 到 $x+\Delta x$，则平均速度 v_{av} 是比值 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. 数学上写为 $v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$　　(1)

(c) 动点 P 在时刻 t 的瞬时速度，是时间增量趋于零时，平均速度的极限. 数学上写为

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

(d) 动点 P 从 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔里，其速度由 v 到 $v+\Delta v$，则平均加速度 a_{av} 是比值 $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. 数学上写为

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3}$$

(e) 动点 P 在时刻 t 的瞬时加速度是当时间增量趋于零时，平均加速度的极限. 数学上写为

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{4}$$

或

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

(f) 如加速度为常量，$a=k$ 则下列公式有效：

$$v = v_0 + kt \tag{5}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ks \tag{6}$$

$$s = v_0t + \frac{1}{2}kt^2 \tag{7}$$

$$s = \frac{1}{2}(v + v_0)t \tag{8}$$

v_0 为初速度；v 为末速度；k 加速度常量；t 时间；s 为位移.

(g) 简谐运动是直线运动，加速度与运动成负比例关系. 数学上写为

$$a = -k^2x \tag{9}$$

例如，点的振动满足方程(9)，即位移 x 的方程是

$$x = b\sin\omega t \tag{10}$$

b 是线位移振幅；ω 定常角频率，单位 rad/s；t 为时间，单位：秒.

由 $x=b\sin\omega t$，则 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\omega b\cos\omega t$ 及 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2b\sin\omega t=-\omega^2x$. 因此 $a=-k^2x$，这里 $k=\omega$ 为常量，这就是简谐运动.

12.3　曲线运动

平面曲线运动是动点沿平面曲线(轨迹)的运动.动点在曲线上一点的速度和加速度将表示为(a)正交分量;(b)切线和法向分量;(c)径向和横向分量.

12.4　正交分量

动点 P 在曲线上的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 分别用沿 x 和 y 轴的单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

当动点 P 运动时,$\boldsymbol{r}$ 是变量,速度 $\boldsymbol{v}$ 可表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

使用 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}$ 的简便符号,有

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} \tag{11}$$

动点的速率是速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小,即

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

如果矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴夹角是 θ,则

$$\theta = \arctan\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \arctan\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \tan^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

即,速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿点 P 轨迹切向(见图 12-1).

加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 对时间的变化率,即

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$$

使用符号表示 $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$, $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$,得到

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} \tag{12}$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小是

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

不要错误地认为加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿动点 P 轨迹的切线.

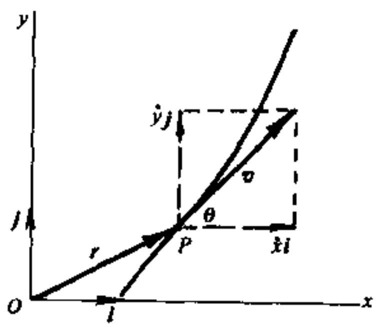


图 12-1

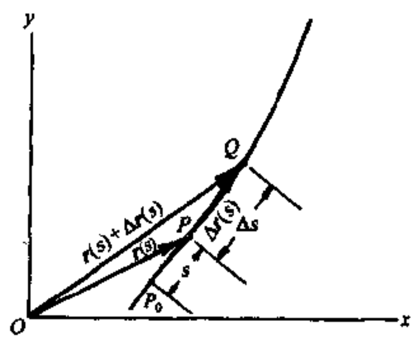


图 12-2

12.5　切向和法向分量

在上面的讨论中,将速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$,分别用沿 x 和 y 轴的正交的单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示.在下面将讨论如何把矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 用动点 P 轨迹的切向单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和垂直于 $\boldsymbol{e}_t$ 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 表示.

图 12-2 中所示，动点在曲线上从点 P_0 沿曲线移动距离 s 到 P 点. P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是标量 s 的函数. 为研究此关系，令曲线上与 P 点相近的点为 Q.

点 P 和 Q 的位置矢量分别是 $\boldsymbol{r}(s)$ 和 $\boldsymbol{r}(s)+\Delta\boldsymbol{r}(s)$，$\Delta\boldsymbol{r}(s)$ 是变化量，沿直线 PQ. 沿曲线从 P 到 Q 的距离为 Δs，$\boldsymbol{r}(s)$ 对 s 的微分写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s)+\Delta\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}$$

当 Q 趋于 P，直线 $\Delta\boldsymbol{r}(s)$ 对弧线 Δs 的比率趋于单位 1. 即，直线 $\Delta\boldsymbol{r}(s)$ 的方向趋于 P 点轨迹的切线. 则单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 定义为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{e}_t \tag{13}$$

再研究 $\boldsymbol{e}_t$ 如何随 s 变化. 如图 12-3(a) 所示，C 是曲线的中心，从 P 到 C 距离为 ρ.

设点 Q 接近点 P，则 P 和 Q 的切线单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_t+\Delta\boldsymbol{e}_t$. 由于点 P 与 Q 的切向垂直于到 C 的半径，则 $\boldsymbol{e}_t$ 与 $\boldsymbol{e}_t+\Delta\boldsymbol{e}_t$ 之间的夹角为 $\Delta\theta$，如图 12-3(b) 所示. 因为 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_t+\Delta\boldsymbol{e}_t$ 是单位矢量，则 $\Delta\boldsymbol{e}_t$ 只表示方向的变化(不是大小).

如图 12-3(b) 中的三角形是等腰的，并将其放大成如图 12-3(c) 所示. 从图 12-3(c) 中，可明显得到

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{e}_t\right|}{1}=\sin\frac{1}{2}\Delta\theta\approx\frac{1}{2}\Delta\theta \qquad \text{得 } |\Delta\boldsymbol{e}_t|\approx\Delta\theta$$

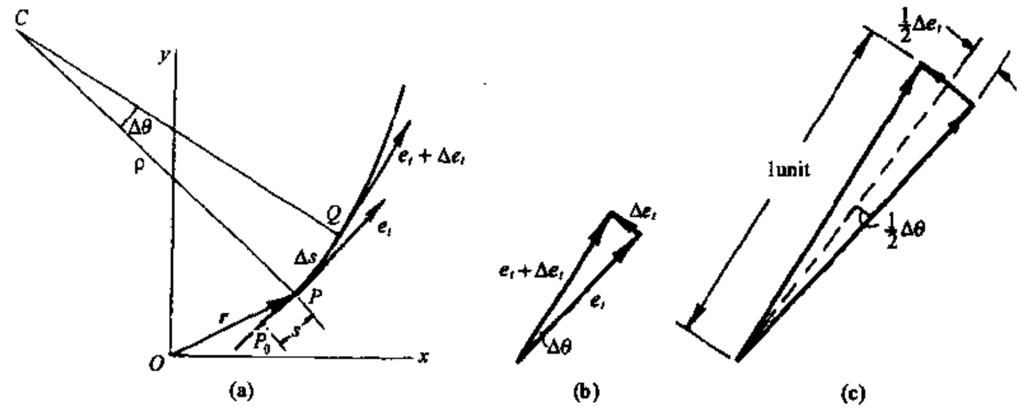


图 12-3

由图 12-3(a) 知，$\Delta s=\rho\Delta\theta$，因此，$\Delta s\approx\rho|\Delta\boldsymbol{e}_t|$. 即

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{e}_t|}{\Delta s}=\frac{1}{\rho}$$

在极限中 $\Delta\boldsymbol{e}_t$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_t$，且方向指向曲线中心 C. 令 $\boldsymbol{e}_n$ 为单位矢量，且垂直于 $\boldsymbol{e}_t$，方向指向曲线中心 C. 则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{e}_t|}{\Delta s}\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{14}$$

速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 可由单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 得到. 由方程(13)，并注意到 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}$ 是沿轨迹上 P 点的速率，可写成

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s}\boldsymbol{e}_t \tag{15}$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 是速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的微分，由方程(15)得：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\ddot{s}\boldsymbol{e}_t+\dot{s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

从方程(14)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{s}}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

则

$$\boldsymbol{a}=\ddot{s}\boldsymbol{e}_t+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{16}$$

$\ddot{s}$ 是点的速率沿切向对时间的变化率.

12.6　径向和横向分量

曲线上点 P 可用选择任一点为极点的极坐标来定位.如图 12-4 所示的原点 O 作为极点.极坐标常用于研究行星的运动及其它的中心力问题.速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 分解为沿径向单位矢量和与径向垂直的单位矢量.应该注意,由于极点是任意选择的,所以每套单位矢量是无穷多的.

径向矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴夹角是 ϕ.单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 沿 $\boldsymbol{r}$ 指向外;单位矢量 $\boldsymbol{e}_\phi$ 垂直于 $\boldsymbol{r}$ 指向增量 ϕ 的方向.

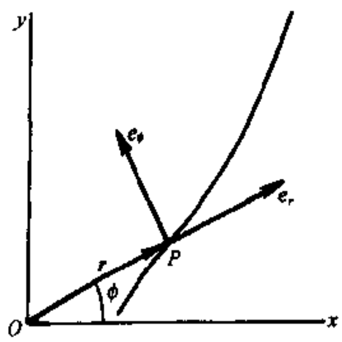


图 12-4

因为 $\boldsymbol{r}$ 是沿 $\boldsymbol{e}_r$ 方向的单位长度 r,则可写成

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \tag{17}$$

速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 是方程(17)中对时间的微分:

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\boldsymbol{e}}_r$$

其中 $\dot{\boldsymbol{e}}_r=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}$.

为了研究 $\dot{\boldsymbol{e}}_r$ 和 $\dot{\boldsymbol{e}}_\phi$,让 P 移到邻近点 Q,则相对应的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r+\Delta\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi+\Delta\boldsymbol{e}_\phi$ 如图 12-5(a)所示.

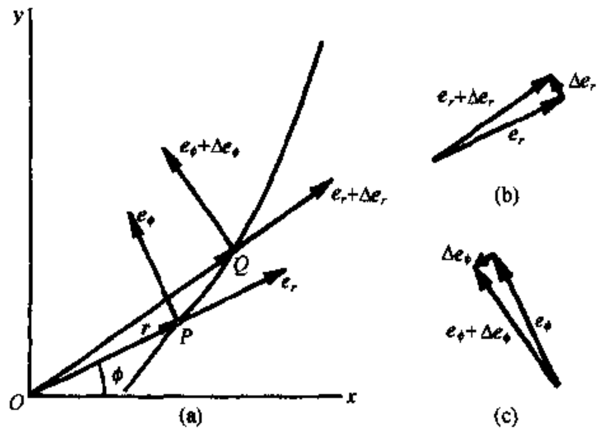


图 12-5

如图 12-5(b)和(c)画出了这些单位矢量.由于三角形是等腰三角形,利用对矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 解释的相似理由,得到下面的微分:$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r$ 的极限是沿 $\boldsymbol{e}_\phi$ 的方向 $\mathrm{d}\phi$ 的大小,$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\phi$ 的极限是沿 $\boldsymbol{e}_r$ 的负方向 $\mathrm{d}\phi$ 的大小.即

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \quad 和 \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\phi=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\phi}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=-\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_r$$

$\dot{\phi}$是角 ϕ 对时间的变化率，ϕ 为径向矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴的夹角.

速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 可以写成

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \tag{18}$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 是方程(18)对时间的微分：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\,\dot{\boldsymbol{e}}_\phi \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi + \dot{r}\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

$\ddot{\phi}$ 为角加速度(角速度 $\dot{\phi}$对时间的微分).合并为

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi \tag{19}$$

对于圆周运动的情况，即点在半径为 R 的圆轨迹上运动.将 R 代替 r 代入方程(18)和(19)，注意到 $\dot{R} = \ddot{R} = 0$，得到

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \qquad \text{(轨迹切向)} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{a} = -R\dot{\phi}^2\boldsymbol{e}_r + R\ddot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi \tag{21}$$

这样，加速度切向分量的大小是 $R\ddot{\phi}$，法向分量的大小是 $R\dot{\phi}^2$ 指向中心.

12.7 单位

在以上的讨论中没有使用单位.下面列出了美国通用(也称工程)单位制和国际单位制.

符　号	工程单位制	国际单位制
s, ρ, R, x, y	ft	m
$v, \dot{x}, \dot{y}, \dot{s}$	ft/s 或 fps	m/s
$a, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{s}$	ft/s^2	m/s^2
θ, ϕ	radians (rad)	radians (rad)
$\omega, \dot{\theta}, \dot{\phi}$	rad/s	rad/s
$\alpha, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}$	rad/s^2	rad/s^2

例　题

12.1　一车沿直线轨道按照 $x = 3t^3 + t + 2$ 的规律运动.x 以 ft 计，t 以 s 计.试求当 $t = 4$s 时，位移、速度和加速度.

解 ☞

$$x = 3t^3 + t + 2 = 3(4)^3 + 4 + 2 = 198 \text{ ft}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 9t^2 + 1 = 9(4)^2 + 1 = 145 \text{ ft/s}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 18t = 18(4) = 72 \text{ ft/s}^2$$

12.2　题 12.1 中，在 5 秒间的平均加速度是多少?

解 ☞　5 秒末的速度为 $v = 9(5)^2 + 1 = 226$ ft/s，5 秒中的速度变化量是 226 ft/s − 145 ft/s = 81 ft/s^2.

平均加速度是

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{81 \text{ ft/s}}{1 \text{ s}} = 81 \text{ ft/s}^2$$

12.3　一点沿直线按位移 $s=8t^2+2t$ 运动，s 以米计，t 以秒计．画出位移、速度、加速度与时间的关系曲线．这也被称为 $s-t, v-t, a-t$ 图形．

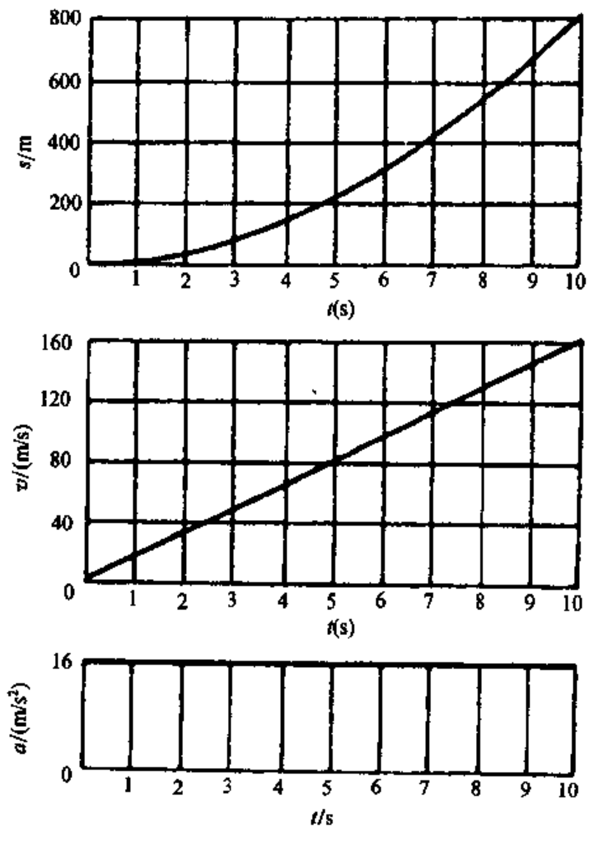
解　☞ 微分 $s=8t^2+2t$，得 $v=\frac{ds}{dt}=16t+2$ 和 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=16$．

这证明加速度是常量为 16 m/s^2．

用下面表格确定所画之值．注：t 以秒计，s 以米计，v 以米/秒计．

t	t^2	$8t^2$	$2t$	$s=8t^2+2t$	$16t$	$v=16t+2$
0	0	0	0	0	0	2
1	1	8	2	10	16	18
2	4	32	4	36	32	34
3	9	72	6	78	48	50
4	16	128	8	136	64	66
5	25	200	10	210	80	82
10	100	800	20	820	160	162

在下面的 s, v, a 图中画出这些数据．有些值的关系可以从图中得出．s-t 曲线在任一时刻 t 的斜率是 v-t 曲线在同一时刻的高．因为有 $v=\frac{ds}{dt}$．



另外，v-t 曲线(在本题中，直线对任一点的斜率都相同，即 16m/s)在任一时刻 t 的斜率等于 a-t 曲线对应时刻 t 的值．因为有 $a=\frac{dv}{dt}$．

两个方程也可写成为

$$a\,dt = dv \quad 和 \quad v\,dt = ds$$

积分得

$$\int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{v_0}^{v} dv = v - v_0 \quad 和 \quad \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{s_0}^{s} ds = s - s_0 \tag{1}$$

其中：

$\int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}t$ 是 a-t 曲线在时间 t_0 至 t 间隔下的面积；

$\int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t$ 是 v-t 曲线在时间 t_0 至 t 间隔下的面积；

v-v_0 是在相同时间间隔 t_0 至 t 的速度变化量；

s-s_0 是在相同时间间隔 t_0 至 t 的位移变化量.

方程(1)中的第一公式表明，v-t 图中任意时间间隔的值的改变量等于在 a-t 图中相同时间间隔下的面积.对于方程(1)中的第二公式的 s-t 图形的值的改变量也有同样的说明.

12.4 汽车匀加速运动，在 28s 内，速度由 0 增加到 60 m/h.求它的加速度常量及在这个时间的位移.

解 ☞ 写出以下数据：$v_0=0$, $v=60$ m/h $=88$ ft/s, $t=28$ s.

为求加速度常量 k，使用公式 $v=v_0+kt$.

$$k=\frac{v-v_0}{t}=\frac{(88-0)\mathrm{ft/s}}{28\ \mathrm{s}}=31.4\ \mathrm{ft/s^2}$$

求位移只需使用原始数据

$$s=\frac{v+v_0}{2}t=\frac{(88+0)\mathrm{ft/s}}{2}\times 28\mathrm{s}=1230\ \mathrm{ft}$$

12.5 一质点作直线运动.速率在 3 s 内由 0 到 30 ft/s，而后，又在 2 s 内减到 0.

(a) 画 v-t 曲线.

(b) 在第一个 3 s 时和另一 2 s 时，加速度各为多少？

(c) 5 s 内行走的距离是多少？

(d) 质点走 50 ft 时，花了多少时间？

解 ☞ (a) 画 v-t 曲线如图 12-6 所示.

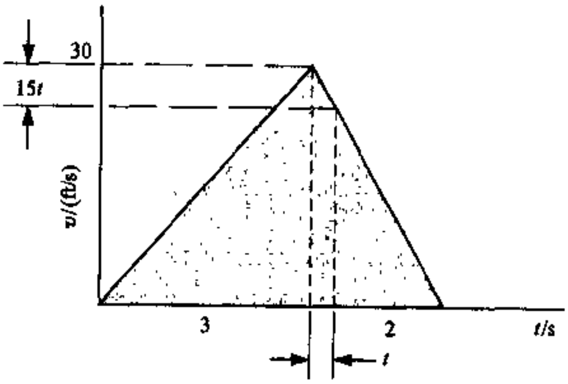


图 12-6

(b) 加速度是速度对时间的微分，即 v-t 曲线的斜率.有

$$\text{在 } t=3\ \mathrm{s}\text{ 时}, a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{30}{3}=10\ \mathrm{ft/s^2}$$

$$\text{在 } t=5\ \mathrm{s}\text{ 时}, a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{30}{2}=-15\ \mathrm{ft/s^2}$$

(c) 速度是位移对时间的微分.即

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\quad \mathrm{d}s=v\mathrm{d}t,\quad \Delta s=\int v\mathrm{d}t$$

$v\mathrm{d}t$ 的积分也即是 v-t 曲线下的面积.即

$$\text{对 } t=5 \qquad s=(30)(3)/2+(30)(2)/2=75\ \mathrm{ft}$$

(d) 由计算 v-t 曲线下的面积，得在第一个 3 s 中的路程是 45 ft.对 $t=3$ 到 $t=5$ 区间，由 v-t 曲线的方程可得速度.再加上 5 ft 的路程，在这段路用的时间 t 下，v-t 曲线的面积是梯形，即为矩形与三角

形之和.得

$$(30-15t)t+(15t)\frac{t}{2}=5$$

解方程得到 $t=0.175$ s.注意到另一个解是 3.826 s,由于此值大于 2 s,超出 t 的最大值.所以总时间 $T=3+0.175=3.175$ s.

12.6 当沙袋释放时,气球上升的速度为 2 m/s.如果沙袋释放时气球高度 120 m,则沙袋需花多少时间达到地面上?

解 ☞ 沙袋与气球在释放瞬时具有相同的速率.即

$$v_0=+2\ \mathrm{m/s},\qquad y=120\ \mathrm{m},\quad g=a=9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

为了求解,以地面为基准($y=0$),向上为正.(提示:$y=0$ 时,沙袋到达地面.)

$$y=y_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$0=+120+2t+\frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

解得

$$t=5.16\ \mathrm{s}$$

另外,若选气球为基准.设向上为正.(提示:$y=-120$ 沙袋到达地面.)

$$y=y_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$-120=0+2t+\frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

当然也得

$$t=5.16\ \mathrm{s}$$

12.7 一球以速度 80 ft/s 垂直向上发射.2 秒后第二个球以速度 60 ft/s 向上发射.则问两球在地球表面之上的何点相遇?

解 ☞ 令 t 为发射后第一球与第二球相遇的时间.相遇时第二球经过的时间是 $t-2$ s.两球在时刻 t 的位移是相同的.

令 s_1 和 s_2 分别表示第一、二两球的位移.则

$$s_1=(v_0)_1t-\frac{1}{2}gt^2\quad 和\quad s_2(v_0)_2(t-2)-\frac{1}{2}g(t-2)^2$$

s_1 与 s_2 相等,代入已知的 $(v_0)_1$ 和 $(v_0)_2$,得到

$$80t-16.1t^2=60(t-2)-16.1(t-2)^2\quad 得\ t=4.15\ \mathrm{s}$$

将 t 的值代入方程 s_1(或 s_2),得位移为

$$s_1=80\ \mathrm{ft/s}\times 4.14\mathrm{s}-\frac{1}{2}(32.2\ \mathrm{ft/s^2})(4.14\mathrm{s})^2=54.6\ \mathrm{ft}$$

12.8 一球以与水平面夹角为 40°的方向抛出.求抛球的初速度为多大,才能使之落地距离 100 ft? 忽略空气阻力

解 ☞ 以球抛出的地点为 x,y 轴的原点.由于略去空气阻力,则加速度的 x 分量为零,y 分量等于 $-g$.

由方程(7)及 $a_x=0,a_y=-32.2\ \mathrm{ft/s^2}$,得

$$x=v_{0x}t\quad 和\quad y=v_{0y}t-\frac{1}{2}(32.2)t^2$$

当 $x=100,y=0,\ v_{0x}=v_0\cos45°,v_{0y}=v_0\sin140°$时,上面方程为

$$100=v_0\cos40°(t)$$

$$0=v_0\sin40°(t)-\frac{1}{2}(32.2)t^2$$

解第一个方程得 v_0 的关系式,再代入第二个方程,得到 $t=2.28$ s.将此值代入第一个方程,得

$$v_0=57.3\ \mathrm{ft/s}$$

12.9 一质点沿水平直线运动,其加速度 $a=6\sqrt[3]{s}$.当 $t=2$ s 时,它的位移 $s=+27$ ft,速度 $v=+27$ ft/s.计算当 $t=4$ s 时,点的速度与加速度.

解 ☞ 由于加速度是位移的函数,使用微分方程 $a\mathrm{d}s=v\mathrm{d}v$.

则

$$\int 6s^{1/3}\mathrm{d}s = \int v\mathrm{d}v \quad 或 \quad \frac{9}{2}s^{4/3} = \frac{1}{2}v^2 + C_1$$

由于 $v = +27$ ft, $s = +27$ ft,则 $C_1 = 0$, $v = 3\,s^{2/3}$.

再由 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$得 $\mathrm{d}s/s^{2/3} = 3\mathrm{d}t$,积分得 $3s^{1/3} = 3t + C_2$.代入条件,当 $t = 2$ 时,$s = +27$,解出 $C_2 = 3$ 和 $s = (t+1)^3$.

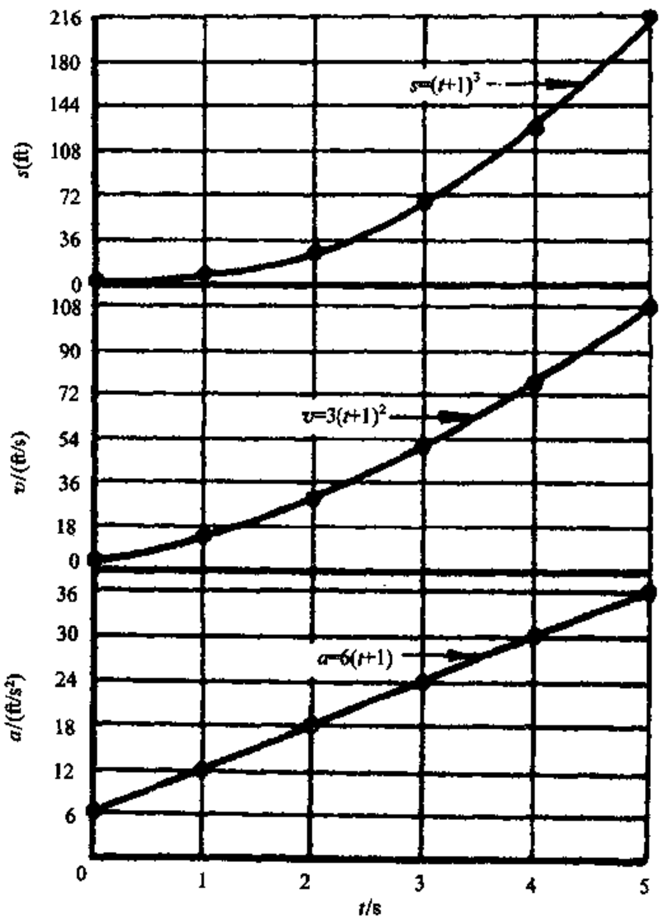
写出方程 $s = (t+1)^3$, $v = 3(t+1)^2$, $a = 6(t+1)$.当 $t = 4$ s 时 $s = 125$ ft, $v = 75$ ft/s, $a = 30$ ft/s^2.

画出这些量相对于时间的关系如图所示.注意到 v-t 曲线在任意时刻 t 的值是 s-t 曲线在相同时刻的斜率.a-t 曲线在任意时刻 t 的值也是 v-t 曲线在同一时刻的斜率.

12.10 一质点沿铅垂直线运动,其加速度为 $a = 2\sqrt{v}$.当 $t = 2$ s 时,它的位移 $s = 64/3$ ft,速度 $v = 16$ ft/s.求质点当 $t = 3$ s 时的位移、速度和加速度.

解 由于 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,则 $2\sqrt{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.分离变量,$2\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}}$.积分得,$2t + C_1 = 2v^{1/2}$.当 $t = 2$ s时,$v = 16$ ft/s,则有 $C_1 = 4$.

方程变成 $t + 2 = \sqrt{v}$或者 $v = (t+2)^2 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.则有 $\mathrm{d}s = (t+2)^2\mathrm{d}t$,积分,$s = \frac{1}{3}(t+2)^3 + C_2$.当 $t = 2$ s时,$s = \frac{64}{3}$ ft,则 $C_2 = 0$.



因此,方程为 $s = \frac{1}{2}(t+2)^3$, $v = (t+2)^2$ 和 $a = 2(t+2)$.

当 $t = 3$ s 时,$s = 41.7$ ft, $v = 25$ ft/s 和 $a = 10$ ft/s^2.

12.11 点沿铅垂直线运动,其加速度方程为 $a = 12t - 20$.且当 $t = 0$ 时,位移 $s = -10$ m;$t = 5$ s 时,$s = +10$ m.试求出点的运动方程.

解 ☞ 积分 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=12t-20$，得到 $v=16t^2-20t+C_1$，再积分一次得 $s=2t^3-10t^2+C_1t+C_2$.

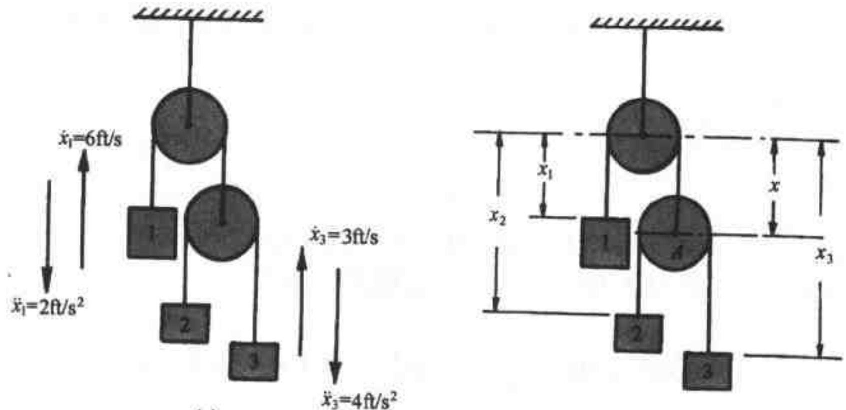
积分常量可以求出.代入已知值 s 和 t：

$$-10=2(0)^3-10(0)^2+C_1(0)+C_2 \qquad \text{得 } C_2=-10$$

$$+10=2(5)^3-10(5)^2+C_1(5)-10 \qquad \text{得 } C_1=+4$$

则运动方程为 $s=2t^3-10t^2+4t-10$.

12.12 在图 12-7(a)所示系统中，试求物块 2 在图示瞬时的速度和加速度.



(a)　　(b)

图 12-7

解 ☞ 图 12-7(b)画出了每个物块相对于固定支承的位置.重物 1 和点 A 之间绳的长度是常量，等于顶部滑轮的 1/2 周长加上 x_1+x.物块 2 与 3 之间绳子的长是常量，等于滑轮 A 的 1/2 周长加上 x_2-x+x_3-x.

即，$x_1+x=$ 常量，$x_2+x_3-2x=$ 常量.对时间微分为

$$\dot{x}_1+\dot{x}=0 \quad (1) \qquad \dot{x}_2+\dot{x}_3-2\dot{x}=0 \quad (3)$$

$$\ddot{x}_1+\ddot{x}=0 \quad (2) \qquad \ddot{x}_2+\ddot{x}_3-2\ddot{x}=0 \quad (4)$$

令向上为正，并将 $\dot{x}_1=6$ ft/s 代入方程(1)，得 $\dot{x}=-6$ ft/s.再将这些值与 $\dot{x}_3=3$ ft/s 一起代入方程(3)，得到 $\dot{x}_2=2\dot{x}-\dot{x}_3=2(-6)-(3)=-15$ ft/s(向下).

同理，加速度为

$$\ddot{x}=+2 \quad \text{和} \quad \ddot{x}_2=2\ddot{x}-\ddot{x}_3=2(+2)-(-4)=8\ \text{ft/s}^2$$

12.13 证明平面曲线 P 点的曲率所表示为，

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

这里 ρ 是曲率半径，$\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 是 P 点速度的 x 和 y 方向的分量，$\ddot{x}$ 和 $\ddot{y}$ 是 P 点加速度大小的 x 和 y 方向的分量.

解 ☞ 曲线 $y=f(x)$ 在点 P 的曲率是

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2}{[1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2]^{3/2}} \tag{1}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{1}{\dot{x}}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2\dot{x}}$$

并代入(1)，即得到需要的方程.

12.14 一质点描述的轨迹为 $y=3.6x^2$，x，y 用米计.速度在 x 方向的分量是常量为 2 m/s.

设质点在原点开始运动，求质点随时间的位移、速度和加速度分量.

解 ☞ 由$\frac{dx}{dt}=2$ m/s，积分得到 $x=2t+C_1$. 由 $x=0, t=0$ 得 $C_1=0$. 则 $x=2t$ m.
同时，$y=3.6x^2=3.6(2t)^2=14.4t^2$m. 即

$$\frac{dy}{dt}=28.8t \text{ m/s}$$

最后

$$\frac{d^2y}{dt^2}=0 \quad 和 \quad \frac{d^2y}{dt^2}=28.8 \text{ m/s}^2$$

12.15 一质点描述的轨迹是 $y=4x^2$，速率 v 为常数，x, y 以米计. 求加速度法向分量是多少？

解 ☞

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}=\frac{8}{[1+(8x)^2]^{3/2}} 得 a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{8v^2}{[1+64x^2]^{3/2}}\text{m/s}^2$$

12.16 一质点以速度矢量$\boldsymbol{v}=3t^2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$in/s 在轨迹上运动.
(a)求质点 4 s 后的坐标位置. 当 $t=0$ 时，质点在原点.
(b)求轨迹方程.
(c)当 $t=4$ s 时，求质点的速度矢量在矢量 $\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 方向上的投影.

解 ☞

(a) 速度矢量的积分是位置矢量. 可由速度的定义看到，由

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

得

$$\boldsymbol{r}=\int \boldsymbol{v}dt=t^3\boldsymbol{i}-2t^2\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$$

$t=4$ s, $\boldsymbol{r}=64\boldsymbol{i}-32\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$ in. 则 $t=4$ s 时，位置的坐标为 $x=64$ in, $y=-32$ in 和 $y=8$ in.

(b) 对于任意 t，位置的参数方程可由 $\boldsymbol{r}$ 中的 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 前的系数得到. 即 $x=t^3$, $y=-2t^2$和 $z=2t$. 从参数方程中消去 t，得

$$t=x^{1/3}, \quad y=-2x^{2/3}, \quad \left(\frac{z}{2}\right)^2=x^{2/3}$$

将方程结合得到

$$y+\left(\frac{z}{2}\right)^2=-x^{2/3}$$

或者

$$x^{2/3}+y+\left(\frac{z}{2}\right)^2=0$$

即为轨迹方程. 读者可以证明，当 $t=4$ s 时，方程满足.

(c) 单位矢量表示的方向是

$$\boldsymbol{e}_L=\frac{4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}}{\sqrt{4^2+1^2+(-3)^2}}$$

则，在 $t=4$ s, $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_L=\frac{4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}}{\sqrt{26}}\cdot[3(4)^2\boldsymbol{i}-4(4)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}]=33.3 \text{ in/s}$$

12.17 一质点沿轨迹方程 $r=2\theta$ ft 运动. 如果角 $\theta=t^2$ rad，求当 $\theta=60°$时，质点的速度. 用两种方法求解.

解 ☞ 图 12-8(a)所示，画出了质点的轨迹及沿 r 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、垂直于 r 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_\theta$ 和 θ 增长的方向.

(a) 极坐标. 见图 12-8(b).
因为 $\theta=t^2$, $\dot{\theta}=2t$；因此 $r=2\theta=2t^2$, $\dot{r}=4t$.
当 $\theta=\frac{\pi}{3}$rad 时，速度矢量$\boldsymbol{v}$ 如下：

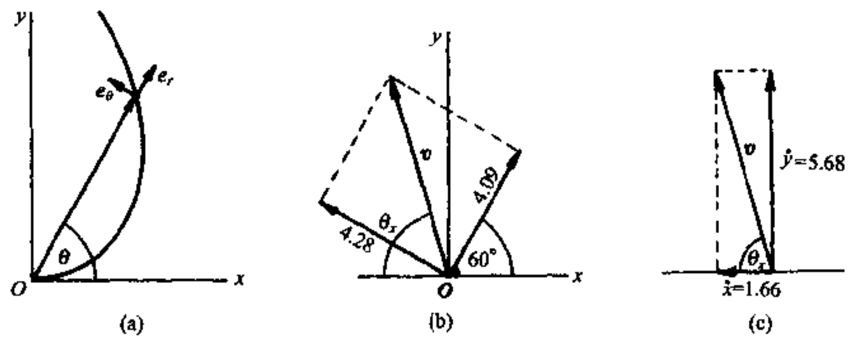


图 12-8

$$\theta = \frac{\pi}{3} = t^2 \qquad\qquad \text{得 } t = 1.023 \text{ s}$$

$$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta = 4(1.023)e_r + [2(1.047)][2(1.023)]e_\theta = 4.09e_r + 4.28e_\theta$$

并且　$v = \sqrt{(4.09)^2 + (4.28)^2} = 5.92$ ft/s 及 $\theta_x = 30° + \tan^{-1}\left(\frac{4.09}{4.28}\right) = 73.7°$

(b) 笛卡尔坐标. 见图 12-8(c)

$$x = r\cos\theta = 2\theta\cos\theta = 2t^2\cos t^2 \qquad y = r\sin\theta = 2\theta\sin\theta = 2t^2\sin t^2$$

则

$$\dot{x} = 4t\cos t^2 + 2t(-\sin t^2)(2t) = -1.66 \text{ ft/s}$$

$$\dot{y} = 4t\sin t^2 + 2t^2(\cos t^2)(2t) = +5.68 \text{ ft/s}$$

当 $t = 1.023$ s$\left(\cos t^2 = \cos\frac{\pi}{3}, \sin t^2 = \sin\frac{\pi}{3}\right)$. 则有

$$v = \sqrt{(-1.66)^2 + (5.68)^2} = 5.92 \text{ ft/s 与 } \theta_x = \tan^{-1}\frac{5.68}{1.66} = 73.7°$$

12.18　在上题中, 使用两种方法求质点的加速度.

解　☞ (a) 极坐标. 见图 12-9.

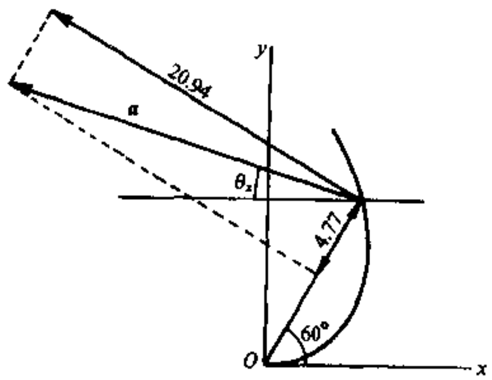


图 12-9

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta = -4.77e_r + 20.94e_\theta$$

由 $\theta = t^2, \dot{\theta} = 2t, \ddot{\theta} = 2$;　$r = 2\theta = 2t^2, \dot{r} = 4t, \ddot{r} = 4$;　当 $\theta = \frac{\pi}{3}$时, $t = 1.023$ s. 则有

$$a = \sqrt{(-4.77)^2 + (20.94)^2} = 21.5 \text{ ft/s}^2 \quad \text{与} \quad \theta_x = 30° - 12.8° = 17.2°$$

(b) 笛卡尔坐标。见图 12-10。

继续对时间微分并代入 $t = 1.023\left(t^2 = \frac{\pi}{3}\right)$, 得

$$\ddot{x} = 4\cos t^2 + 4t(-\sin t^2)(2t) + 12t^2(-\sin t^2) - 4t^3(\cos t^2)(2t) = -20.52 \text{ ft/s}^2$$

$$\ddot{y} = 4\sin t^2 + 4t(\cos t^2)(2t) + 12t^2(\cos t^2) + 4t^3(-\sin t^2)(2t) = +6.34 \text{ ft/s}^2$$

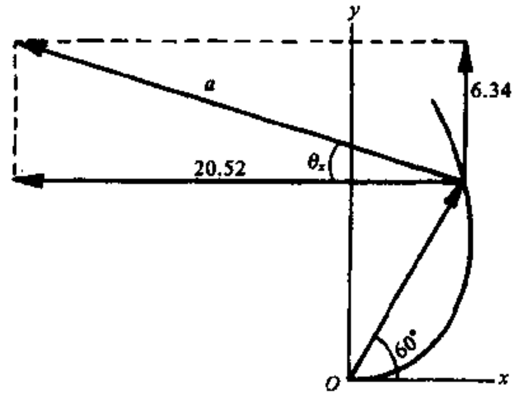


图 12-10

则 $a=\sqrt{(-20.52)^2+(634)^2}=21.5\ \text{ft/s}^2$ 与 $\theta_x=\arctan\dfrac{6.34}{20.52}=17.2°$

12.19 图 12-11 所示机构中，曲柄 OA 以常角速度 ω rad/s 转动．试导出滑动构件的位移、速度、加速度的表达式．

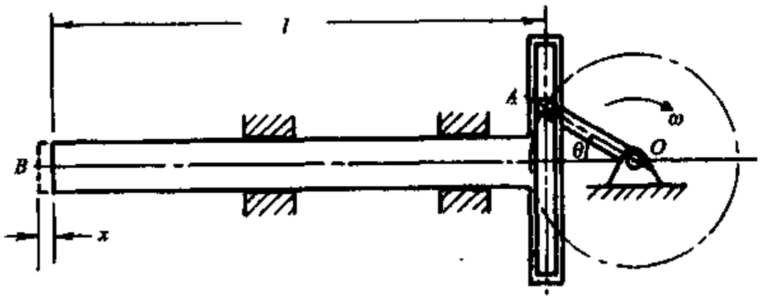


图 12-11

解 ☞ 当 $\theta=0°$时，令 B 代表滑动构件的左端点的位置．位移 x 可写为 $x=OB-l-OA\cos\theta$．当曲柄水平时，$OB=l+OA$，即

$$x=l+OA-l-OA\cos\theta=OA(1-\cos\theta)$$

令 $OA=R$，又由于曲柄转动的角速度 ω 是常量，则 ωt 可以用 θ 角表示．微分 $x=R(1-\cos t)$ 得，

$$v=\frac{dx}{dt}=R\omega\sin\omega t \quad 和 \quad a=\frac{dv}{dt}=R\omega^2\cos\omega t$$

12.20 在图 12-12 中，摆动臂 OD 以不变的角速度 10 rad/s 顺时针转动．物块 A 在臂 OD 的槽中自由滑动并用销子与物块 B 连接，物块 B 在构架的水平槽中自由滑动．当 $\theta=45°$

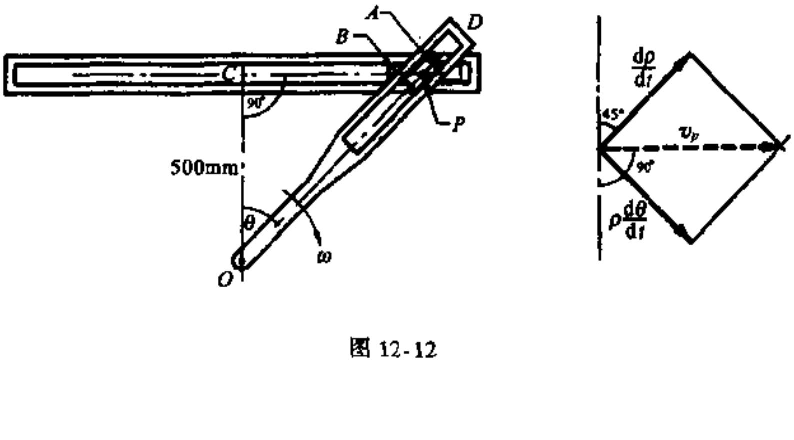


图 12-12

时，求物块 B 中的销 P 的全速度，使用(a)笛卡尔坐标和(b)极坐标.

解 ☞ 应该注意，作为物块 B 中的点 P 的全速度或绝对速度只能是水平的，因为此点为 B 中的点，而 B 中所有的点都做水平运动. 作为物块 A 中的点也具有相同的速度.

(a) 令 x 为 C 到 P 点距离，则 $x=0.5\tan\theta$，$v_P=\dfrac{dx}{dt}=0.5(\sec^2\theta)\dfrac{d\theta}{dt}$，当 $\theta=45°$ 时，$v_P=0.5(\sec^2 45°)10=10\ \text{m/s}$.

(b) 令 ρ 为 0 到 P 点的距离，以 O 为极点. 则 $\rho=0.5\sec\theta$.

速度沿 OP 的径向分量是 $\dfrac{d\rho}{dt}=0.5\sec\theta\cdot\tan\theta\dfrac{d\theta}{dt}$，当 $\theta=45°$ 时，为 $0.5\sec45°\tan45°\times10=7.07$ m/s. 此分量方向沿 OP 指向外.

速度的横向分量是 $\rho\dfrac{d\theta}{dt}=0.5\sec\theta\dfrac{d\theta}{dt}$. 当 $\theta=45°$ 时，为 $0.5\sec45°\times10=7.07$ m/s，由于 ω 为顺时针方向分量垂直于臂 OP 指向右下.

两个分量如右图所示. 则 $v_P=\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(\rho\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2}=10\ \text{m/s}$，沿水平方向.

12.21 如图 12-13 所示的 AB 杆运动，其最低点 A 在水平方向以不变的速度 $v_A=5$ ft/s 向右运动. 则当 $\theta=70°$ 时，点 B 的速度是多少？杆长为 6.24 ft.

解 ☞ 令 x 和 y 是运动中任意时刻 A、B 两点距 O 点的距离. 由于 $x^2+y^2=l^2$，则

$$2x\frac{dx}{dy}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

且

$$v_B=\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}=-(\cot\theta)v_A=-1.82\ \text{ft/s}$$

负值表示 B 点向下运动. 注意 v_B 与 l 无关.

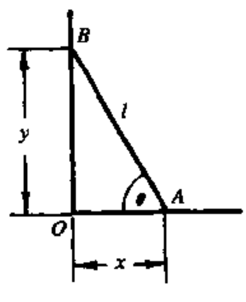


图 12-13

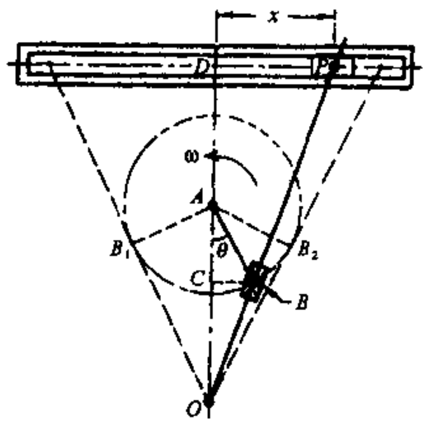


图 12-14

12.22 如图 12-14 所示的急回机构中，曲柄 AB 不变的角速度 ω rad/s 转动. B 点的滑块沿杆 OP 滑动，并引起杆 OP 关于铰 O 摆动. 在转动中，杆 OP 在滑块 P 处滑进滑出并且滑块 P 沿水平槽滑动. 将切削工具连接在滑块 P 上使之产生往复运动，当 OP 与曲柄圆的 B_1 与 B_2 点相切时，切削工具达到水平末端. 曲柄销从 B_2 逆时针运动到 B_1. 期间，开始切削；当回程时，销仍按原弧从 B_1 到 B_2. 因为速度是常量，则工作时间与回程时间与摆过角度成比例. 切削冲程角度大，因此花费时间长. 返回冲程很快，因此称为急回机构. 试求切削工具上 P 点的位移、速度和加速度.

解 ☞ 由图得

$$\frac{x}{BC}=\frac{OD}{OC}$$

令 $OD=l$, $AB=R$, $OA=d$, 则 $BC=R\sin\theta$, $OC=OA-AC=d-R\cos\theta$. 代入上式：

$$\frac{x}{R\sin\theta}=\frac{l}{d-R\cos\theta} \quad 得 \quad x=\frac{Rl\sin\theta}{d-R\cos\theta} \tag{1}$$

和

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{Rl\left[(d-R\cos\theta)\cos\theta\frac{d\theta}{dt}-\sin\theta\left(R\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\right]}{(d-R\cos\theta)^2}$$

由于 $\frac{d\theta}{dt}$ 是角速度 ω, 方程写为

$$v=\frac{Rl\omega(d\cos\theta-R\cos^2\theta-R\sin^2\theta)}{(d-R\cos\theta)^2} \quad 得 \quad v=Rl\omega\frac{d\cos\theta-R}{(d-R\cos\theta)^2} \tag{2}$$

有

$$a=\frac{dv}{dt}=Rl\omega\frac{(d-R\cos\theta)^2\left(-d\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)-(d\cos\theta-R)\left[2(d-R\cos\theta)R\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]}{(d-R\cos\theta)^4}$$

$$=\frac{-Rl\omega^2\sin\theta(d^2-2R^2+Rd\cos\theta)}{(d-R\cos\theta)^3} \tag{3}$$

方程(1)(2)和(3)给出了关于任意角 θ 的位移、速度和加速度的表达式. 这对于机械设计考虑惯性力是十分必要的.

12.23 在曲柄滑块机构中, 曲柄 R 以不变的角速度 ω rad/s 转动, 试求滑块 C 的直线运动的位移、速度和加速度.

解 ☞ 令 C_0 是滑块左末端, 沿中心线的水平位移如图 12-15 所示. 由图明显得到 $x=C_0A-CA$ 和 $CA=CD+DA$.

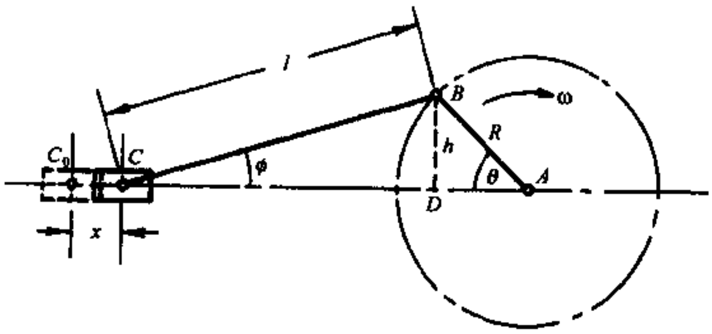


图 12-15

当 C 点在 C_0 时, B 在中心线上, 因此, $C_0A=l+R$. 也有, $CA=l\cos\phi+R\cos\theta$. 则

$$x=l+R-l\cos\phi-R\cos\theta$$

ϕ 和 θ 的关系可由直角三角形 ADB 和 DCB 中得到：

$$h=l\sin\phi=R\sin\theta$$

即

$$\sin\phi=\frac{R}{l}\sin\theta \quad 和 \quad \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\phi}=\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\theta}$$

得位移为

$$x=l+R-l\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\theta}-R\cos\theta$$

由于根式, 上式关于对时间微分有些困难. 不过, 当 $R/l<1/4$ 时, 使用平方根的级数展开的前二项表示根式的近似值, 还是足够准确的. 有

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2\sin^2\theta}}\approx1-\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{l^2}\right)\sin^2\theta$$

将其代入, 位移写成

$$x = l + R - l + \frac{R^2}{2l^2}\sin^2\theta - R\cos\theta = R(1-\cos\theta) + \frac{R^2}{2l^2}\sin^2\theta$$

微分得

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{R^2}{2l^2}2\sin\theta\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega\left(\sin\theta + \frac{R}{2l}\sin2\theta\right)$$

和

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\omega\left(\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{2l}2\cos2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = R\omega^2\left(\cos\theta + \frac{R}{l}\cos2\theta\right)$$

12.24 点 P 沿圆形轨迹以不变的速率(速度大小)12 ft/s 运动.如果轨迹的半径是 2 ft.研究点的运动在水平直径上的投影.见图 12-16.

解 ☞ 点 A 是点 P 在水平直线上的投影.设原点在圆的中心上.点 A 的位移 x 是半径矢量 OP 在 x 轴上的投影(沿水平直径).

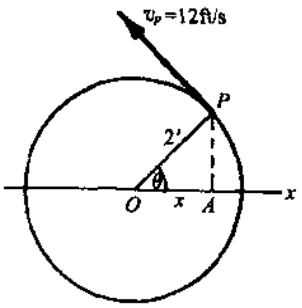


图 12-16

由于直线 OP 转过的角在单位时间下相同(角速度是常量),则 θ 的表达式写成 $\theta = \omega t$.因此,P 点的 x 坐标为

$$x = OP\cos\theta = 2\cos\omega t$$

半径的角速度是 $\omega = v/r = 12/2 = 6$ rad/s.则

$$x = 2\cos6t,\ v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -12\sin6t,$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -72\cos6t.$$

a 的方程也可写成 $a = -36(2\cos6t) = -36x$.意指 P 点运动的加速度 a 与其位移 x 成负比例.因此,这是简谐运动.很明显,当 P 沿圆轴轨迹等速运动时,则其关于直径投影的运动为简谐运动.

12.25 在题 12.24 中,给出 A 点的位移、速度和加速度对应时间的图形.

解 ☞ 位移 x 的振幅是最大值,当 $\cos6t$ 为最大值时,极值出现即为振幅 2.

速度 v 的幅值是 12,加速度 a 的幅值是 72.

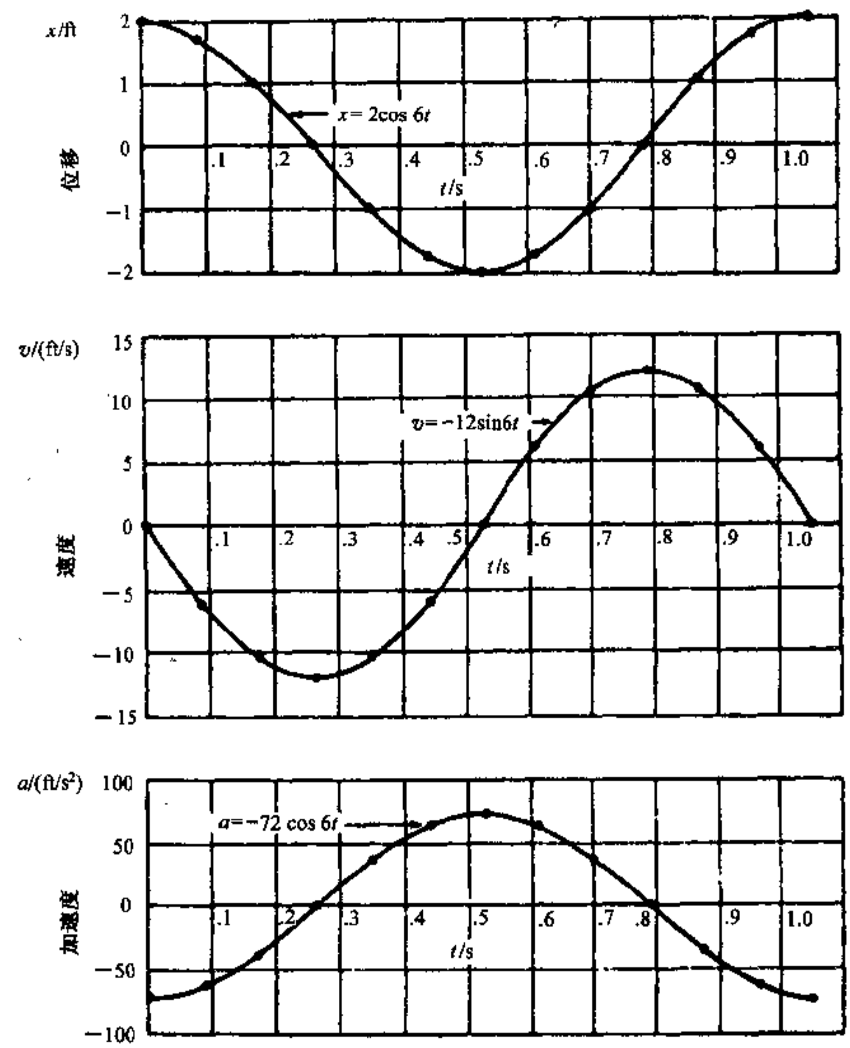
周期为运动一周的时间 T.很明显,半径矢量 OP 运动一周 $\theta = 2\pi$ rad 后,点 A 则做重复运动.函数 $6t$ 与 $\theta = 2\pi$ 相等时为一个周期,得

$$6\text{rad/s}\times T = 2\pi\ \text{rad} \qquad 得 \qquad T = \frac{2\pi}{6}s = 1.05\ \text{s}$$

上式也为角 θ 与时间的关系.例如,当 $\theta = \frac{2\pi}{2}$即 90°时,t 是$\frac{1}{4}$周期,即$\frac{1}{4}\times1.05$ s=0.263 s.按上面规律,制出表格如下.

θ	t	$\cos6t$ 即 $\cos\theta$	$\sin6t$ 即 $\sin\theta$	$x = 2\cos6t$	$v = -12\sin6t$	$a = -72\cos6t$
0°	0	+1.000	0	+2.00	0	−72.0
30°	0.088	+0.866	+0.500	+1.73	−6.00	−62.3
60°	0.175	+0.500	+0.866	+1.00	−10.4	−36.0
90°	0.263	0	+1.000	0	−12.0	0
120°	0.350	−0.500	+0.866	−1.00	−10.4	+36.0
150°	0.438	−0.866	+0.500	−1.73	−6.00	+62.3
180°	0.525	−1.000	0	−2.00	0	+72.0
210°	0.612	−0.866	−0.500	−1.73	+6.00	+62.3
240°	0.700	−0.500	−0.866	−1.00	+10.4	+36.0
270°	0.788	0	−1.000	0	+12.0	0
300°	0.875	+0.500	−0.866	+1.00	+10.4	−36.0
330°	0.962	+0.866	−0.500	+1.73	+6.00	−62.3
360°	1.05	+1.000	0	+2.00	0	−72.0

给出这些点对应一周运动的图形.自然地,随时间增加,这些曲线在循环中重复.下图表示的一周的运动.



12.26 飞轮直径 1.2 m. 在 20 s 中,从静止均匀加速到 2000 rpm,求角加速度等于多少?

解 ☞ 在研究本题中,首先注意加速度是常量.意为可以使用常量加速度的公式.角运动与直线运动类似,即可用 ω 代替 v,α 代替 k 和 θ 代替 s.

轮从静止开始,即 $\omega_0 = 0$.有 3 个已知量 ω_0,ω,t.需求角加速度 α.由公式

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

在国际单位制中,ω 用 rad/s,α 用 rad/s^2,t 用 s,即

$$\omega_0 = 0,\quad \omega = 2000\ \text{rpm} = \frac{2000}{60}\frac{\text{rev}}{\text{s}} \times 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{rev}} = 209\ \text{rad/s}$$

则

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{209\text{rad/s} - 0\text{rad/s}}{20\ \text{s}} = 10.5\ \text{rad/s}^2$$

12.27 在题 12.26 中,当飞轮速度达到 2000 rpm 时,转了多少周?

解 ☞ 为了确定转过周数的弧度 θ,选择包含有已知量 ω_0,ω,t 与 θ 之间关系的表达式.当然,确定角加速度 α 的公式也可以使用,但由于此公式 α 角与 θ 无直接关系,则不用.有

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t = (209\ \text{rad/s} + 0\ \text{rad/s})(20\ \text{s}) = 2090\ \text{rad}$$

为了表示 θ 的周数,则

$$\theta = \frac{2090\text{rad}}{2\pi\text{rad/rev}} = 333\ 周$$

ω 用 rev/s 也可得同样的结果:

$$\theta = \frac{(2000/60)\text{rev/s} + 0\text{rev/s}}{2} \times 20\text{s} = 333 \text{ 周}$$

12.28 在题 12.26 中，飞轮从静止开始运动，求 0.6 s 后，飞轮边缘上点的线速度和加速度.

解 ☞ 边缘上点的速度由半径与角速度的乘积得到.

角速度是

$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (10.5 \text{ rad/s}^2)(0.6 \text{ s})$
$= 6.30 \text{ rad/s}.$

当 $t = 0.6$ s 时，轮缘上点的直线速度的大小是

$v = r\omega = (0.6 \text{ m})(6.30 \text{ rad/s})$
$= 3.78 \text{ m/s}$ （轮缘切向）

为了求出全加速度，使用法向和切向分量. 切向分量 $a_t = r\alpha = (0.6 \text{ m})(10.5 \text{ rad/s}^2) = 6.3 \text{ m/s}^2$. 法向分量 $a_n = r\omega^2 = (0.6\text{m})(6.3 \text{ rad/s})^2 = 23.8 \text{ m/s}^2$. 图 12-17 的图解中表示了轮缘上任意点 P 的这些分量.

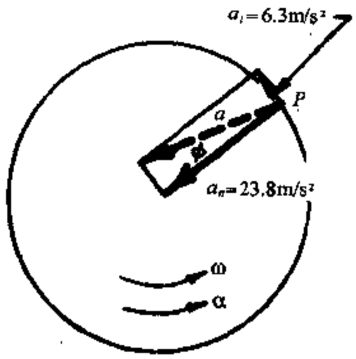


图 12-17

全加速度 a 是两个分量 a_t 和 a_n 的矢量和. 令 ϕ 为全加速度与半径间夹角. 法向加速度指向圆心.

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(6.3)^2 + (23.8)^2} = 24.6 \text{ m/s}^2$$

$$\phi = \arctan\frac{a_t}{a_n} = \arctan\frac{6.3}{23.8} = 0.259 \text{ rad} = 14.8°$$

12.29 均匀细长杆长 4 ft，相对通过其端点的铅直轴在水平面上转动. 如果杆在 5 s 间隔中，速度从 40 均匀增加到 60 rpm，试求杆开始时刻和终了时刻杆中心的线速度是多少？

解 ☞ 中心的速度是 $v = r\omega$. 则杆中心速度在开始时刻和终了时刻的速度分别为

$$v_B = r\omega_B = (2\text{ft})\left(\frac{40 \times 2\pi}{60}\text{rad/s}\right) = 8.38 \text{ ft/s}$$

$$v_E = r\omega_E = (2\text{ft})\left(\frac{60 \times 2\pi}{60}\text{rad/s}\right) = 12.6 \text{ ft/s}$$

12.30 在题 12.29 中，试求加速度开始的 2 s 后，杆中心的加速度法向和切向的分量.

解 ☞ 在 5 s 的时间中的任一时刻上，匀加速度 α 为

$$\alpha = \frac{\omega_E - \omega_B}{t} = \frac{\frac{120}{60}\pi - \frac{80}{60}\pi}{5} = 0.419 \text{ rad/s}^2$$

2 s 后的角速度是

$$\omega = \omega_B + \alpha t = \frac{80}{60}\pi + 0.419(2) = 5.03 \text{ rad/s}$$

加速度的分量为

$$a_t = r\alpha = 2(0.419) = 0.838 \text{ ft/s}^2$$
$$a_n = r\omega^2 = 2(5.03)^2 = 50.6 \text{ ft/s}^2$$

12.31 轮子直径 200 mm，在 600 s 中，速度从 800 rpm 到静止. 试求角加速度.

解 ☞ 已知 $\omega_0 = 800 \text{ rpm} = 83.8 \text{ rad/s}$, $\omega = 0$, $t = 600$ s, 则

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-83.8\text{rad/s}}{600\text{s}} = 0.14 \text{ rad/s}^2 \quad \text{（减速）}$$

加速度是负的，表明角速度的方向与角加速度方向相反，因此，轮子是逐渐变慢的.

12.32 轮子均匀加速，在 $\frac{1}{2}$ s 内由静止到速度为 200 rpm. 然后，在 2 s 钟内，速度不变，又经过 $\frac{1}{3}$ s，速度重新降为零. 求在全部的时间里，轮子转了多少周？

解 ☞ 从 $t = 0$ 到 $t = \frac{1}{2}$：$\theta_1 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{200}{60}\text{rev/s}\right)\left(\frac{1}{2}\text{s}\right) = 0.83$ rev.

从 $t=\frac{1}{2}$到 $t=2\frac{1}{2}$：$\theta_2=\omega t=\left(\frac{200}{60}\text{rev/s}\right)(2\text{s})=6.67\ \text{rev}$.

从 $t=2\frac{1}{2}$到静止：　$\theta_3=\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)t=\frac{1}{2}\left(\frac{200}{60}\text{rev/s}+0\right)\left(\frac{1}{3}\text{s}\right)=0.56\ \text{rev}$.

全部周数 $\theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3=8.06\ \text{rev}$.

12.33　两摩擦轮如图 12-18 所示.试写出角速度与半径关系的表达式.

解　☞ 两轮上的接触点 A 和点 B 的线速度相等,否则两轮将产生滑动.

点 A 和点 B 的线速度分别是

$$v_A=R_1\omega_1,\quad v_B=R_2\omega_2$$

如果 $v_A=v_B$,则没有相对滑动,有

$$R_1\omega_1=R_2\omega_2\quad 即\quad \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}$$

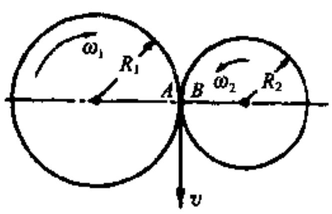


图 12-18

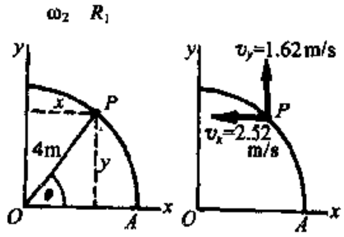


图 12-19

12.34　点沿 P 圆轨迹逆时针方向运动,其走过的弧常是 $s=t^3+3=4$ m. s 的单位为 m, t 的单位为 s,参见图 12-19,试确定当 $t=1$s 时,速度的轴向分量(v_x,v_y).

解　☞ 1s 内经过的距离 $AP=s=1^3+3=4$m,由观察,$x=4\cos\theta$ 和 $y=4\sin\theta$ 微分得,$v_x=(-4\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$和 $v_y=(4\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$.

这些表明 θ 是时间的函数.由关系 $s=r\theta$ 得 $\theta=\frac{s}{r}=\frac{(t^3+3)}{4}$,$\theta$ 是弧度.微分得$\frac{d\theta}{dt}=0.75t^2$.当 $t=1$ s 时,$\theta=1$ rad,$\frac{d\theta}{dt}=0.75\text{rad/s}$.

代入得 $v_x=-2.52$ m/s 和 $v_y=1.62$ m/s.负号表明速度的 x 分量指向左,速度的 y 向分量指向上.

全速度 $v=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2}=3.0$ m/s.也可从 $v=r\frac{d\theta}{dt}=4(0.075\ t^2)$直接得到,当 $t=1$ s 或从 $s=t^3+s$ 中得 $v=\frac{ds}{dt}=3t^2$.

12.35　在题 12-34 中,求 $t=1$ s 时,加速度在轴上的分量 a_x 和 a_y.

解　☞ 微分 v_x 的表达式,得到 $a_x=-4\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-4\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

由$\frac{d\theta}{dt}=0.75t^2$,得$\frac{d^2\theta}{dt^2}=1.5t$.

$t=1$s,$a_x=-4(\cos1)(0.75)^2-4(\sin1)(1.5)=-6.27\text{m/s}^2$,指向左.

同样地,$a_y=-4\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+4\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}=+1.35\ \text{m/s}^2$,指向上.

全加速度 $a=\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2}=6.41\text{m/s}^2$.

也可从加速度的切向分量 a_t 和法向分量 a_n 的求和得到.

即 $a_t=r\alpha=r\frac{d^2\theta}{dt^2}=4(1.5t)$得 6 m/s^2,$a_n=r\omega^2=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=4(0.075)^2$ 得 2.25 m/s^2.

则 $a=\sqrt{(a_t)^2+(a_n)^2}=6.41\text{m/s}^2$.

注意,当 $t=1$ 时,由 $a_t=\frac{d^2s}{dt^2}=6t$ 和 $a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{9}{4}t^2$ 得到相同的结果.

12.36　点按 $x=4t^2-3t$,$y=t^3-10$ 运动,x 和 y 表示位移的分量,用 ft 计.求 $t=2$ s 时,点

的速度和加速度.

解 ☞ 微分,得

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 8t - 3 \quad v_y = 3t^2$$

$t=2$ s 时,$v_x=13$ ft/s, $v_y=12$ ft/s.则有

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = 17.7 \text{ ft/s} \quad 及 \quad \theta_x = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{12}{13} = 42.7°$$

θ_x 是全速度与 x 轴之间的夹角.

二次微分得加速度分量:$a_x=\frac{dv_x}{dt}=8$ 和 $a_y=\frac{dv_y}{dt}=6t$.在 $t=2$ s 时,$a_x=8$ ft/s^2 和 $a_y=12$ ft/s^2.则有

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = 14.4 \text{ ft/s}^2 \quad 和 \quad \phi_x = \arctan\frac{a_x}{a_y} = \arctan\frac{12}{8} = 56.3°$$

12.37 汽车以绝对速度 20 mi/h 向南行驶.在 O 点的观察者距行程线以东 50 ft.当汽车在观察者的正西时,相对于观察者的角速度是多少?汽车向南行驶 50 ft 后,相对于观察者的角速度又是多少?

解 ☞ 如图 12-20 所示,汽车 A 相对于 O 点的速度 $v_{A/O}=20$ mi/h 或 29.3 ft/s.即

$$v_{A/O} = OA \times \omega_{A/O}$$

$$29.3 \text{ ft/s} = 50 \text{ ft} \times \omega_{A/O} \quad 得 \quad \omega_{A/O} = 0.588 \text{ rad/s}$$

注意在下一个问题中,汽车的绝对速度 v_B 仍然指向南为 20 mi/h(29.3 ft/s).分量 $v_{B/O}$(B 关于 O 点的速度)垂直于臂 BO,因此,$v_{B/O}=29.3\cos45°=20.8$ ft/s.即

$$v_{B/O} = OB \times \omega_{B/O}, \qquad 20.8\text{ft/s} = (50\sqrt{2}\text{ft})(\omega_{B/O})$$

得 $\omega_{B/O}=0.29$ rad/s.

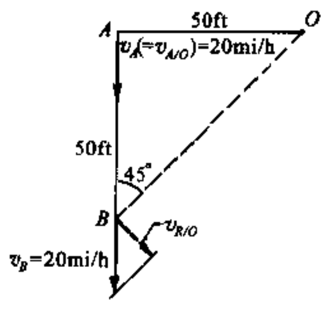


图 12-20

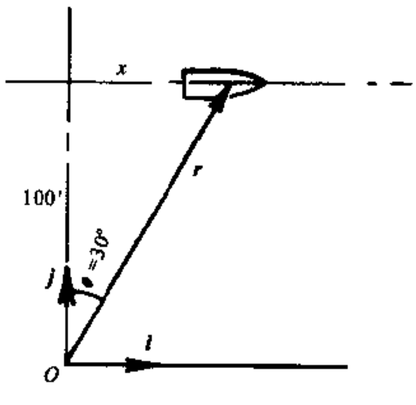


图 12-21

12.38 船以 12 mi/h 的速度向正东航行.观察者距航线以南 100 ft.当位置如图 12-21 所示时,求船关于观察者的角速度.

解 ☞ 选择东和北方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$,令 $\boldsymbol{r}$ 为船相对于观察者 O 的位置矢量.则

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + 100\boldsymbol{j} = 100\tan\theta\boldsymbol{i} + 100\boldsymbol{j}$$

船的速度 $\boldsymbol{v}$ 是

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = 100(\sec^2\theta)(\dot{\theta})\boldsymbol{i} + O\boldsymbol{j}$$

由速率 $v=12$ mi/h$=17.6$ ft/s 和 $\theta=30°$,得

$$17.6 = 100(\sec 30°)\dot{\theta} \qquad 即有 \ \omega = \dot{\theta} = 0.132 \text{ rad/s} 顺时针$$

12.39 点的运动由下列方程所描述:

$$v_x = 20t + 5, \quad v_y = t^2 - 20$$

另外,当 $t=0$ 时,已知 $x=5$ m, $y=-15$ m.求 $t=2$ s 时,点的位移、速度和加速度.

解 ☞ 由已知方程 $v_x=\frac{dx}{dt}=20t+5$, $v_y=\frac{dy}{dt}=t^2-20$,进行积分,得 x 和 y 的表达式为 $x=10t^2+5t+C_1$, $y=\frac{1}{3}t^3-20t+C_2$.

为解 C_1,将 $x=5$ 和 $t=0$ 代入 x 的方程,得 $C_1=5$

为解 C_2,将 $y=-15$ 和 $t=0$ 代入 y 的方程,得 $C_2=-15$.

将 C_1 和 C_2 的值代入,则位移方程为

$$x = 10t^2+5t+5 \qquad y=\frac{1}{2}t^2-20-15$$

微分 v_x 和 v_y,得到加速度方程为

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=20 \qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}=2t$$

将 $t=2$ 代入位移、速度和加速度的表达式,得到下列数值: $x=55$ m, $y=-53$ m; $v_x=45$ m/s, $v_y=-16$ m/s; $a_x=20$ m/s^2, $a_y=4$ m/s^2.

将上述分量值求和,可得到点的全位移、速度和加速度的大小和方向.

12.40 滑轮直径 100 mm,安装在发动机上旋转.其皮带运动的速度 20 m/s,加速度 6 m/s^2.扇叶外径 150 mm,安装在滑轮轴上.求扇叶最高处的线速度和加速度是多少?

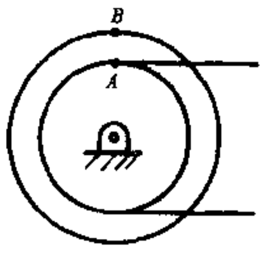


图 12-22

解 ☞ 如 12-22 中,滑轮上的点 A 与皮带的瞬时重合点具有相同的速度.则滑轮(与扇叶锁在同一个轴上)的角速度 ω 等于 $\frac{v}{r}=\frac{20}{0.05}=400$ rad/s.则扇叶顶点的线速度 $v_B=(0.075)(400)=30$ m/s.

A 点加速度的切向分量等于皮带上的加速度,即,$a_t=r\alpha$ 得 $6=0.05\alpha$.系统的角加速度 $\alpha=120$ rad/s^2.

B 点的切向加速度分量是 $(0.075)(120)=9$ m/s^2.

法向加速度等于 $r\omega^2=(0.075)(400)^2=12\ 000$ m/s^2.

这里,全加速度的大小为 $a=\sqrt{(12\ 000)^2+(9)^2}=12\ 000$ m/s^2.

12.41 与水平面夹角 40°的方向抛出一球.将球抛出多高,才能使其落地 100 ft 处?略去空气阻力.

解 ☞ 选择 x 和 y 轴的坐标原点为抛球点.略去空气阻力,加速度的 x 分量为零.加速度的 y 分量是 $-g$.

由方程(7),$a_x=0$ 和 $a_y=-32.2$ ft/s,得

$$x=v_{0x}t \qquad 和 \qquad y=v_{0y}t-\frac{1}{2}(32.2)t^2$$

将 $x=100$, $y=0$, $v_{0x}=v_0\cos40°$ 和 $v_{0y}=v_0\sin40°$,代入上面方程得

$$100=v_0\cos40°(t)$$

$$0=v_0\sin40°(t)-\frac{1}{2}(32.2)t^2$$

将 v_0 从第一个方程中解出,代入第二个方程得 $t=2.28$ s.再将此值代入第一个方程得 $v_0=57.3$ ft/s.最大高度出现在距离的 $\frac{1}{2}$ 处.

因此,对 $t=1.14$ s, $y_{max}=57.3\sin40°(1.14)-\frac{1}{2}(32.2)(1.14)^2=21.1$ ft.

补充习题

12.42 小汽车以 30 mi/h 的速度行驶了 6 min,然后又以为 60 mi/h 的速度行驶了 10 min,最后以 5 mi/h 的速度行驶了 3 min,问在整个时间区间内其速度的平均值是多少?

答案:61.3 ft/s.

12.43 喷气推进器按照方程 $x=2t^3-t^2-2$ 的规律直线运动,x 以米计,t 以秒计.则当速度从 4 m/s 变到 48 m/s 时,位移的改变量是多少?

答案：$\Delta x = 44$ m.

12.44　一物体沿直线运动，相对于直线上的固定点的位移是 $s = 3t^2 + 2t$. 求物体在 3 s 末的位移、速度和加速度.

答案：33 ft, 20 ft/s, 6 ft/s^2.

12.45　质点的运动由关系式 $s = t^4 - 3t^3 + 2t^2 - 8$ 决定，其中 s 以米计，t 以秒计. 求 $t = 2$ s 时的速度 $\dot{s}$ 和加速度 $\ddot{s}$.

答案：$\dot{s} = +4$m/s, $\ddot{s} = +16$ m/s^2.

12.46　摩托车沿直线道路行驶，两点之间的平均速度为 88 ft/s. 返回的平均速度是 44 ft/s. 求全程的平均速度是多少?

答案：58.7 ft/s.

12.47　一汽车从静止开始匀加速到 72 km/h，然后又匀减速到汽车停止. 如果全部时间为 15 s，问行驶的距离是多少?

答案：$d = 150$ m.

12.48　子弹发射时，在枪口的速度是 600 m/s. 如果枪管长 750 mm，则子弹的平均加速度是多少?

答案：240 km/s^2.

12.49　汽车由静止开始以匀加速度 8 ft/s 运动. 问将用多少时间速度达到 30 mi/h 及行驶了多远的距离?

答案：5.5 s, 121 ft.

12.50　石块从一个具有匀速度 30 ft/s^2 上升的气球上掉下来. 如果石块用了 10 s 掉到地上，则石块从气球掉下瞬时的高度是多少?

答案：1310 ft.

12.51　一人在具有常速度 4 m/s 上升的气球中，向上推一球，球相对于气球的速度是1.2 m/s. 求需用多长时间，球回到气球上?

答案：$t = 0.245$ s.

12.52　石子以零初速度掉进井里，3.63 s 后才听到水溅声. 则问水面距地面多远? 设声速为 1090 ft/s.

答案：$s = 193$ ft.

12.53　小孩 A 站在高 8 ft 的车库顶上，以 30 ft/s 的速率垂直向上抛球，小孩 B 站在地上，在同一瞬时以 40 ft/s 的速率垂直向上抛出一球. 求两球离地为同一高度时的时间及高度是多少?

答案：$t = 8$ s, $h = 21.7$ ft.

12.54　卡车以常速率行驶并超过了停驻的警车. 警车立即追赶，在 10 s 钟内，匀加速到 80 mi/h，之后便保持这个常速率行驶. 如果警车再过二分之一英里追上卡车，问卡车行驶的常速率是多少?

答案：$v = 65$ mi/h.

12.55　装有雷达装置的警车注意到了一辆车的行驶速度是 70 mi/h. 警车 30 s 后开始追赶，20 s 后已加速为 100 mi/h. 设保持此速度在直线路上追赶，则追上的地点距观察点的距离有多长?

答案：$s = 13\ 700$ ft.

12.56　第一辆汽车从静止开始在水平直线道路上加速行驶. 第二辆汽车在 6 s 以后，在同一地点从静止开始以加速度 6 m/s^2 追第一辆车. 从起点到追上的距离为 400 m，问第一辆车的加速度是多少?

答案：$a = 2.62$ m/s^2.

12.57　飞机 A 以 120 mi/h 的飞行速度离开航空站向北飞去. 飞机 B 在 20 min 后，以 150 mi/h 的飞行速度离开同一航空站向北飞去. 问 B 需用多长时间追上 A?

答案：$t = 1.33$ h.

12.58　一质点沿直线运动，其加速度如图 12-23 所示. 求质点在时间 $t = 1, 2, 3$ 和 4 s 时的速度和位移. 设初速度是 +3 ft/s，初位移为零.

答案：$v_1 = +1$ ft/s, $s_1 = +2$ ft, $v_2 = +3$ ft/s, $s_2 = +4$ ft, $v_3 = -1$ ft/s, $s_3 = +5$ ft, $v_4 = -3$ ft/s, $s_4 = +3$ ft.

12.59　一质点从向上行驶的电梯中下落，电梯的速度是 3 m/s. 如果质点到达底部的时间是 2 s，求质点在电梯中开始下落距底部之上有多高?

答案：$s = 13.6$ m.

12.60　垂直向上发射子弹的速度是 600 m/s. 理论上，子弹能升到多高?

答案：18.4 km.

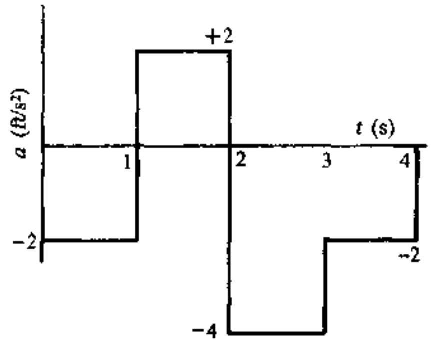


图 12-23

12.61 在海面之上 50 ft 的悬岸边上，以速度 30 ft/s 铅直向上抛一球.问球能达到海面之上多高？球花多少时间落水？球落水的速度是多大？

答案：$h=64.0$ ft, $t=2.93$ s, $v=64.3$ ft/s.

12.62 一质点以加速度 $a=-6v$ 运动，其中 a 用 $\mathrm{ft/s^2}$ 和 v 用 ft/s 计.当 $t=0$ s 时，位移 $s=0$，速度 $v=9$ ft/s.求 $t=0.5$ s 时的位移、速度和加速度.

答案：$s=1.43$ ft, $\dot{s}=v=0.448$ ft/s, $\ddot{s}=a=2.69\ \mathrm{ft/s^2}$.

12.63 一物体以速度 v_0 进入介质中，介质的阻力与速度的平方成比例，即 $a=-kv^2$.试求用时间 t 表示的速度表达式.

答案：$v=1/(kt+1/v_0)$.

12.64 质点的速率为 $v=2t^3+5t^2$.当质点的速度从 7 ft/s 增加到 99 ft/s 时，运动了多少距离？

答案：$s=83.3$ ft.

12.65 一质点从静止开始向右运动，保持 $6\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度直到速度达到 12 m/s 指向右.然后又以指向左的加速度 $12\ \mathrm{m/s^2}$ 运动，直到总的距离为 36 m.求全部的时间.

答案：$t=4.73$ s.

12.66 水以每秒钟 6 滴的速度从水龙头滴下.水龙头在水池之上 8 in.求当一滴水落到水池上时，下一滴水在水池之上多高？

答案：$h=7.75$ in.

12.67 一质点以速度 6 m/s 向上运动，加速度为 $3\ \mathrm{m/s^2}$ 向下，3 s 之后，质点的位移在开始以此加速度加速的位置之下 2 m.之后，在加速度为零的情况下运动了 3 s，然后质点的加速度为 $4\ \mathrm{m/s^2}$ 向上走了 5 s.求质点的位移和它所走的距离.

答案：$s=-7.4$ m 离起点，$d=62.2$ m.

12.68 点沿直线运动的速度—时间曲线如图 12-24 所示.求点在 2 s 内运动了多远？

答案：$x=5.09$ ft.

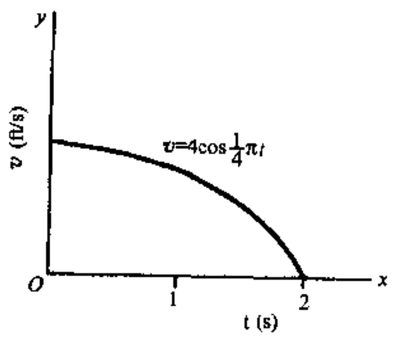


图 12-24

12.69 物体以常加速度 $2\ \mathrm{m/s^2}$ 作直线运动.当速度由 5 m/s 变化到 8 m/s 时，物体用了多少时间？并在此时间间隔下其位移变化是多少？

答案：$t=1.5$ s, $d=9.75$ m.

12.70 质点沿直线运动，其加速度为 $a=t^3-2t^2-7$，其中 a 以 $\mathrm{ft/s^2}$ 和 t 以 s 计.当 $t=1$ s 时，速度为 3.58 ft/s，位移为 +9.39 ft.计算 $t=2$ s 时的位移、速度和加速度.

答案：$s=15.9$ ft, $v=9367$ ft/s, $a=7\ \mathrm{ft/s^2}$.

12.71 点 A 沿 x 轴做直线运动.已知 $v=x^{1/2}$，求 $t=4$ s 的位置、速度和加速度.且 $t=0$, $v=1$ m/s.

答案：$x=9$ m, $v=3$ m/s, $a=\dfrac{1}{2}\ \mathrm{m/s^2}$.

12.72 在图 12-25 所示的系统中，求此瞬时物块 3 的速度和加速度.

答案：$v_3 = 10.5$ ft/s 向上，$a_3 = 5.0$ ft/s^2 向上.

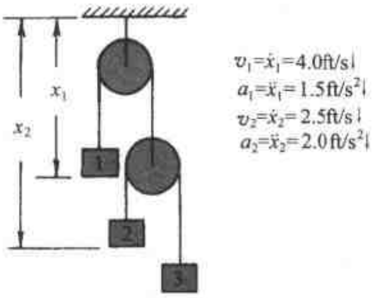


图 12-25

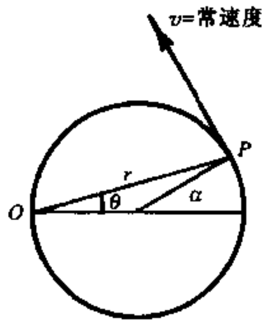


图 12-26

12.73 质点沿轨迹 $y=\frac{1}{3}x^2$ 运动，其速率为常量 8 ft/s. 求 $x=3$ ft 时速度的 x 和 y 的分量是多少？并求点的加速度是多少？

答案：$\dot{x}=3.58$ ft/s, $\dot{y}=7.16$ ft/s, $a=3.82$ ft/s^2.

12.74 质点沿曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+2$ 运动. 当 $x=2$ in 时，速度的 x 分量是 3 in/s. 问全速度是多少？

答案：$v=12.4$ in/s, $\angle 76°$.

12.75 点沿圆周轨迹运动，法向加速度是 120 ft/s^2，边缘常速度是 80 ft/s，求圆周半径是多少？

答案：$r=53.3$ ft.

12.76 点 P 沿半径为 a 的圆周，以常速度 v 逆时针方向运动，如图 12-26 所示. 选择水平直径的最左端为极点 O，写出加速度的径向和横向分量.（提示：$r=2a\cos\theta$.）

答案：$a_r=-(v^2/a)\cos\theta$, $a_\theta=-(v^2/a)\sin\theta$.

12.77 证明上题中的全加速度是 v^2/a，此即为当点以常速率作圆周运动时的法向加速度(没有切向分量).

12.78 如图 12.27 所示的曲柄滑块机构中，曲柄以 200 rpm 转动. 求 $\theta=30°$时，滑块的速度和加速度.

答案：$v=7.6$ m/s, $a=260$ m/s^2.

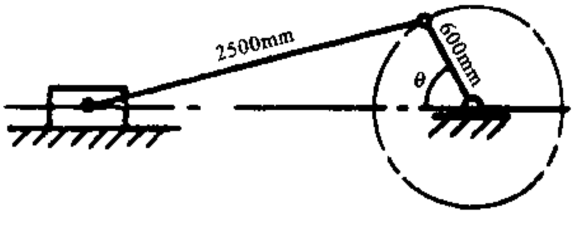


图 12-27

12.79 在题 12.78 中，当 $\theta=90°$时，求滑块的速度. 并问连杆的角速度是多少？

答案：$v=12.6$ m/s, 0.

12.80 质点振动的加速度是 $a=-kx$. 当位移 $x=0$ 时，速度 $v=2$ ft/s；$x=+2$ ft 时，$v=0$. 求 k.

答案：$k=+1$.

12.81 质点简谐运动的频率是 30 周/分，振幅是 6 mm. 求速度和加速度的最大值.

答案：$v_{max}=18.8$ mm/s, $a_{max}=59.2$ mm/s^2.

12.82 物体简谐运动的周期是 6 s，振幅是 4 ft. 求物体速度和加速度的最大值.

答案：$\frac{4}{3}\pi$ft/s, $\frac{4}{9}\pi^2$ft/s^2.

12.83 质点以常速度 15 ft/s 绕直径为 10 ft 的圆周运动. 求法向加速度是多少？

答案：45 ft/s^2.

12.84 直径为 3 m 的飞轮边缘上点的法向加速度是常量 15 m/s^2. 求飞轮的角速度.

答案：3.16 rad/s.

12.85 质点在具有直径为 3 m 的轨迹上运动，走过的距离是 $s=3t^2$. 问在 2 s 末的切向加速度为何？

答案：6 m/s^2.

12.86 质点在半径为 4 in 的圆周上运动，沿轨迹测量的距离是 $s=8t^3$ in. 求质点沿圆周轨迹运动一周后的全加速度的大小为何？

答案：$a=667$ in/s^2.

12.87 汽车飞轮在 45 s 中，获得速度 2000 rpm. 求其角加速度. 设匀加速运动.

答案：4.65 rad/s^2.

12.88 转子直径 0.592 in，安装在真空室内以 2 000 000 rpm 转动. 求轮缘上点的加速度的法向分量.

答案：$a_n=1.08\times10^9$ ft/s^2.

12.89 点在圆周轨道上运动，它的初始状态为静止，其位置从静止由 $s=t^3+5t$ 确定，其中 s 和 t 分别以米和秒计. 当 $t=0.66$ s 时，加速度的大小是 8.39 m/s^2. 求轨道的直径是多少？

答案：$d=10.8$ m.

12.90 长 1.2 m 的水平杆绕其中点的铅直轴转动. 它的角速度在 20 s 内从 0.5 rad/s 到 2 rad/s 均匀变化. 求加速 5 s 之后，杆的端点的线加速度是多少？

答案：$a_t=0.045$ m/s^2, $a_n=0.46$ m/s^2.

12.91 质点 P 沿半径为 2.5 m 的圆周轨迹运动，如图 12-28 所示. P 点的速率在研究瞬时正在减少(加速度的切向分量与速度矢量方向相反). 全加速度如图示，求此瞬时 P 点的速度和直线 OP 的角加速度.

答案：$v=6.07$ m/s, $\theta_x=135°$, $\alpha=3.4$ rad/s^2.

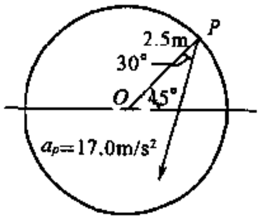


图 12-28

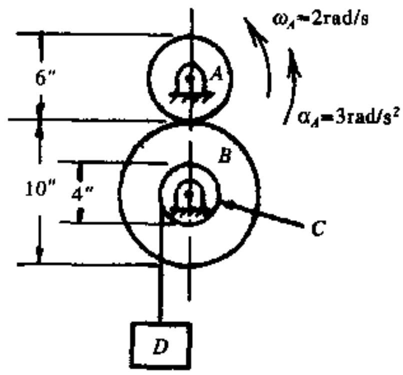


图 12-29

12.92 圆盘 A 带动圆盘 B 无滑动地转动. 试求重物 D 的速度和加速度，其中鼓轮 C 与盘 B 锁定，并由绳索连接 D，如图 12-29 所示.

答案：$v_D=2.40$ in/s 向上，$a_D=3.60$ in/s^2 向上.

12.93 转子的角加速度为 $\alpha=Kt^{-1/2}$，其中 α 用 rad/s^2、t 用 s 计. 当 $t=1$ s 时，角速度 $\omega=10$ rad/s，角位移 $\theta=3.33$ rad；当 $t=0$ s 时，角位移 $\theta=-4$ rad. 试求 $t=4$ s 时，θ, ω 和 α.

答案：$\theta=46.7$ rad, $\omega=18$ rad/s, $\alpha=2$ rad/s^2.

12.94 点的位移用 x 和 y 分量表示如下：

$$x=2t^2+5t \qquad y=4.9t^2$$

求 4 s 后，点的速度和加速度. 位移用米计.

答案：$v_x=21$ m/s, $v_y=39.2$ m/s; $a_x=4$ m/s^2, $a_y=9.8$ m/s^2.

12.95 一人骑自行车向北行驶 250 m，然后又向西北方向行驶 160 m. 求其位移是多少？并问行驶的距离是多少？

答案：$s=381$ m, 72.7°西北；$d=410$ m.

12.96 小车 A 以速度 100 km/h 向西北方向行驶. 小车 B 以速度 60 km/h 向东行驶. 求 A 相对 B 的速度和 B 相对于 A 的速度.

答案：$v_{A/B}=-131\boldsymbol{i}+70.7\boldsymbol{j}$ km/h, $v_{B/A}=131\boldsymbol{i}-70.7\boldsymbol{j}$ km/h.

12.97 物体 A 以速度 15 km/h 相对于物体 B 由西向东行驶，依次物体 B 以速度 50 km/h 相对于物体 C 由东北向西南方向行驶. 求 A 相对于 C 的速度.

答案：$v_{A/C}=10.8$ km/h，在西南 60°.

12.98　见图 12-30．旋转聚光灯离水平地面的垂直距离为 l．灯光以常量 N 周/分相对于对垂直于纸面的水平轴转动．写出光点沿水平地面运动的速度、加速度的表达式．令 θ 是垂线 l 与光柱在时刻 t 的夹角．

答案：$\dot{x}=0.105lN\sec^2\theta$，$\ddot{x}=0.022lN^2\sec^2\theta\tan\theta$．

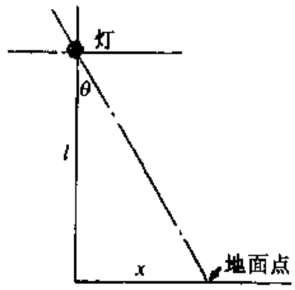


图 12-30

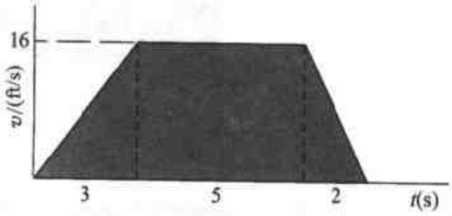


图 12-31

12.99　质点做直线运动，其 v-t 曲线如图 12-31 所示．求 10 s 后，质点运动了多远？并求 9 s 时的加速度是多少？

答案：$s=120$ ft，$a=-8$ ft/s^2．

12.100　质点做直线运动．已知 a-s 曲线如图 12-32 中所示，求质点运动 30 m 后的速度．设初速度是 10 m/s．

答案：$v=20$ m/s．

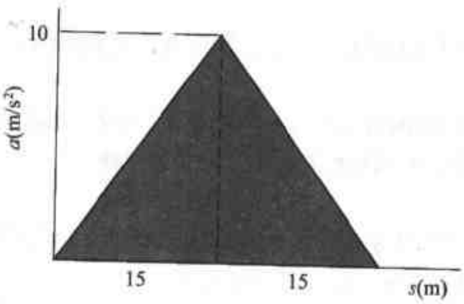


图 12-32

12.101　质点做直线运动，其 a-t 曲线如图 12-33 所示．初位移和初速度均为零．求质点再静止的时刻和位移是多少？

答案：$t=10$ s，$x=29.3$ m．

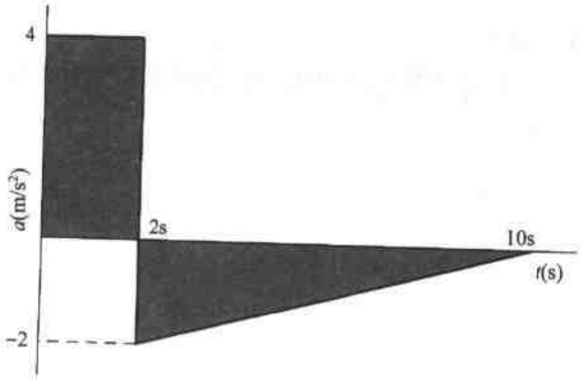


图 12-33

12.102　质点按图 12-34 所示的 a-s 曲线做直线运动．如果初瞬时，$s=0$，$v=4$ m/s，求点的位置在 8 m 和 12 m 时的速度是多少？

答案：$v=10.6$ m/s，$v=12$ m/s．

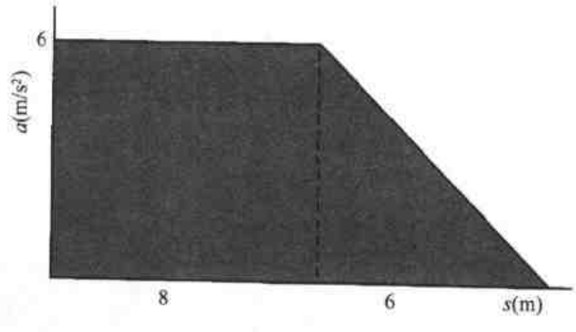


图 12-34

12.103 质点在半径为 2 ft 的圆周上由静止开始运动，其切向加速度分量是弧长的函数，当质点行走一周后其加速度由零线性增长到 10 ft/s^2，之后保持切向加速度不变．求质点转过二周后的法向加速度和速度的大小是多少？

答案：$v = 19.4$ ft/s, $a_n = 188$ ft/s^2.

12.104 发射炮弹的初速度是 1500 ft/s，高度角是 30°，忽略空气阻力，求炮弹的射程、飞行时间和最大高度．

答案：$R = 60\ 400$ ft, $t = 46.6$ s, $h = 8760$ ft.

12.105 在高 300 ft，方圆 6000 ft 的高原上，迫击炮发射炮弹．如果其初速度是 800 ft/s，迫击炮的高度角是 60°，求炮弹击中高原以外多远？

答案：$x = 11\ 000$ ft.

12.106 在题 12.105 中，求将迫击炮放在距悬崖脚下多远，才能使炮弹刚好落在悬崖边？

答案：$x = 176$ ft.

12.107 击球员击出的球的速度为 100 ft/s，并与水平夹角 40°，当又一球击出后，球速度不变，外野站在直对球的轨迹相距 250 ft 开始跑，问外野需跑多快，才能接住球？

答案：$v = 18.7$ ft/s.

12.108 质点沿轨迹运动，其位置矢量为 $\boldsymbol{r} = e^{2t}\boldsymbol{i} + 40\ e^{2t}\boldsymbol{j}$ m．求 $t = 2$ s 时，点的速度和加速度．

答案：$\boldsymbol{v} = 109\boldsymbol{i} - 5.41\boldsymbol{j}$ m/s, $\boldsymbol{a} = 218\boldsymbol{i} + 5.41\boldsymbol{j}$ m/s^2.

12.109 质点沿曲线运动，其速度为 $\boldsymbol{v} = 2\ \boldsymbol{i} + (2t + 20)\ \boldsymbol{j}$ m/s．在 $t = 2$ s，位置为 $4\boldsymbol{i} + 75\boldsymbol{j}$m．求轨迹方程．

答案：$y = \dfrac{1}{4}x^2 + 10x + 31$.

12.110 在题 12.109 中，$x = 0$，加速度是多少？

答案：$\boldsymbol{a} = 2\ \boldsymbol{j}$ m/s^2.

12.111 已知加速度矢量为 $\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ m/s^2，求 $t = 2$ s 的速度矢量是多少？ $t = 1$ s 时，速度矢量是 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ m/s.

答案：$\boldsymbol{v} = \dfrac{5}{2}\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ m/s.

12.112 在题 12.111 中，$t = 2$ s 时，沿速度矢量方向的加速度分量是多少？（提示：这是切向加速度分量．）

答案：$a_t = 5.27$ in/s^2.

第 13 章 质点动力学

13.1 牛顿运动定律

1. 任何质点如不受力作用，将继续保持其静止或匀速直线运动的状态．换句话说，只有受到非平衡力作用，质点才加速运动．

2. 质点的质量与速度的乘积对时间的变化率与作用在质点上的力成正比．质量 m 和速度 v 的乘积是动量 $\boldsymbol{G}$．则第二定律表示为

$$\boldsymbol{F} = K\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = K\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}$$

如果 m 是常量，上式变为

$$\boldsymbol{F} = Km\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = Km\boldsymbol{a}$$

选择合适的单位，使比例常数 $K=1$，则方程为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} \quad 或 \quad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

3. 对于每个作用力总有大小相等、方向相反的反作用力．换句话说，任何两个质点的相互作用力总是大小相等，指向相反，并且分别作用在这两个质点上．

13.2 单位制

(a) 单位系统．在大部分工程问题中，适当选择单位使上面公式中的 K 等于单位 1．在美国通用系统中，有两个基本单位是力，即 lb 和加速度，即 ft/s^2．质量的单位由两个基本单位导出．当质点从距地面较近的上空自由落下时，只受到重力 W 的作用，它的加速度是重力加速度 g（在美国大部分地区设为 32.2 ft/s^2）．第二定律方程可写为（因为是直线运动，不使用矢量表示）

$$W = Kma \quad 或 \quad W = (1)mg$$

$$m = \frac{W\ \mathrm{lb}}{g\ \mathrm{ft/s^2}} = \frac{W}{g}\frac{\mathrm{lbs^2}}{\mathrm{ft}}$$

质量的导出单位叫工程质量单位．

(b) 在国际单位制中，K 的值是 1，上面等式可写为，

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

其中，m 是质量用 kg；$\boldsymbol{a}$ 是加速度用 m/s^2；$\boldsymbol{F}$ 是力用 N．

13.3 加速度

质点的加速度由牛顿定律的矢量方程所决定．即

$$\sum\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$$

其中，$\sum\boldsymbol{F}$ 是作用在质点上的所有力的矢量和；m 是质点的质量；$\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}$ 是加速度．

13.4 达朗贝尔原理

在 1743 年，达朗贝尔建议，牛顿第二运动定律（见 13.3 节）可以写成

$$\sum\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = 0$$

有假想力（叫"惯性力"），与 $\sum\boldsymbol{F}$ 共线但方向相反，大小等于 $m\boldsymbol{a}$，假想其作用在质点上，并使质点处于平衡状态．则平衡方程可以应用．有些作者称为，质点是动平衡．当然质点没有平

衡，但能够应用平衡方程.

13.5 动力学问题

动力学问题的求解随力系的类型而变化. 在许多问题中，力是常量，题 13.1 至 13.16 是这种类型的例子. 在其它问题中，力随位置变化（直线或三角），题 13.17 至 13.22 是这种类型的例子. 振动物体上的作用力系，不仅随距离变化，而且随速度变化. 题 13.23 和 13.24 研究力随速度的一次方和二次方的变化问题.

弹道学的题目，在题 13.25 中有基本方法的介绍，即研究常重力作用下的射弹的运动. 为了求解还可能加上随射弹的速度变化的阻力.

如果作用在物体上的力指向总通过中心点，则称为物体的运动为向心力运动. 卫星和行星是向心力运动的例子. 这些在题 13.26 至 13.31 中讨论.

例 题

在问题求解中，矢量方程 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 由分量形式的数量方程所代替. 在图解中，当矢量的方向明显时，则其大小标注在图上.

13.1 在光滑面上的质点重 2 lb，受拉力 F 作用，如图 13-1(a)所示. 求平面作用在质点上的力和沿平面方向的加速度.

解 ☞ 隔离体图如图 13-1(b)所示. 加速度 a 用虚线矢量表示，其作用线与平面平行，方向向上. 如果所求得的值是负的，则表明加速度的方向沿斜面向下.

记住一个重要的概念，即质点上作用的力系不是平衡力系. 如果为平衡力系，则质点无加速度.

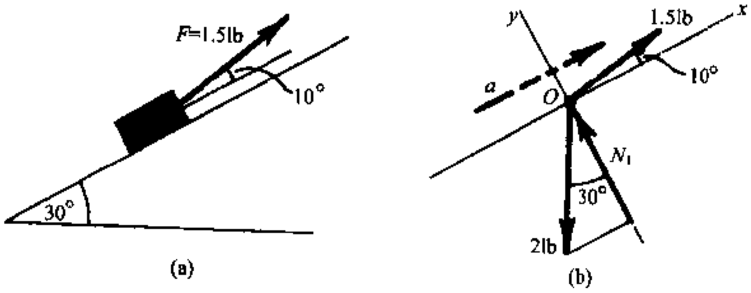


图 13-1

按照牛顿定律，选择 x 和 y 轴，即相对于平面平行与垂直的方向，分别列出两个方程. 有

$$\sum F_x=\frac{W}{g}a_x \quad 得 \quad 1.5\cos10^\circ-2\sin30^\circ=\frac{2}{32.2}a_x$$

$$\sum F_y=\frac{W}{g}a_y \quad 得 \quad 1.5\sin10^\circ-2\cos30^\circ+N_1=0$$

假设质点不离开平面，它的速度沿 y 分量为零，因此 a_y 也必须为零.

第二个方程得平面作用在质点上的力，$N_1=1.47$ lb. 从第一个方程得 $a_x=7.68\ \mathrm{ft/s^2}$.

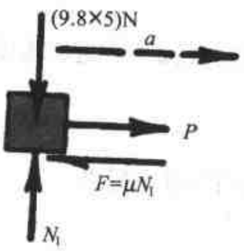


图 13-2

13.2 一质点具有 5 kg 质量，从静止开始运动. 沿水平面运动距离为 12 m 时，速度达到 4 m/s. 设摩擦系数为 0.25，并为匀加速运动. 求完成这种运动的水平常力 P 的值为何？见图 13-2.

解 ☞ 水平方向的运动方程：$\sum F=P-0.25N_1=ma$.

由观察，$N_1 = 9.8 \times 5 = 49\text{N}$.

为求加速度 a，应用运动学方程 $v^2 = v_0^2 + 2as$. 得

$$a = \frac{(4\text{m/s}^2)}{2(12\text{m})} = 0.667\ \text{m/s}^2$$

代入原始方程，得 $P = 5(0.667) + 0.25 \times 49 = 15.6$ N.

13.3 质量为 2 kg 的质点在与水平面夹角 20°的平面上以速度 3 m/s 向上运动. 见图 13-3(a). 运动 0.8 m 后质点的速度降为零. 试求摩擦系数和物块返回起点的速率.

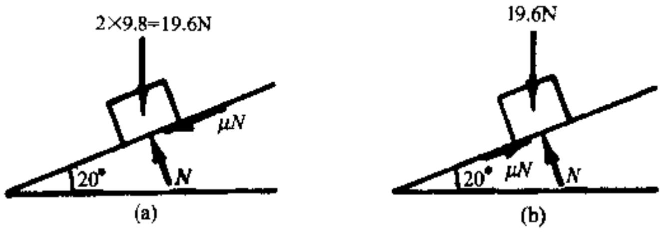


图 13-3

解 ☞ 图 13-3(a)所示的隔离体图中，摩擦力向下作用在平面上. 由法向力 $N = 19.6\cos 20° = 18.4\text{N}$. 为了确定加速度 a，应用运动学方程 $v^2 = v_0^2 + 2as$. 得

$$a = \frac{0 - (+3)^2}{2(0.8)} = -5.63\text{m/s}^2$$

沿平面平行的力求和(向上为正)，得

$$-19.6\sin 20° - \mu(18.4) = 2(-5.63)$$

得，$\mu = 0.25$.

为求返回的速度，见图 13-3(b)，摩擦力向上作用在平面上. 令向下为正，运动方程为

$$+19.6\sin 20° - 0.25(18.4) = 2(a)$$

则，$a = 1.05\ \text{m/s}^2$，在平面向下.

最后，由

$$v^2 = v_0^2 + 2as \qquad \text{即} \qquad v^2 = 0 + (1.05)(0.8)$$

解出

$$v = 1.3\ \text{m/s}$$

13.4 汽车重 1800 lb，以常速度 40 mi/h，沿半径为 2000 ft 曲线行驶. 如果路面没有倾斜，则路面与轮胎间的摩擦力为多大，才能保证仍然沿曲线运动？

解 ☞ 在图 13-4 中，O 点是曲线中心离汽车 2000 ft. 作用在汽车上的力有：重力 W；法向力 N，其大小等于 W；摩擦力 F. 设向左为正，则运动方程为

$$\sum F = \frac{W}{g}a_n = \frac{W}{g}\frac{v^2}{r} \qquad \text{得} \qquad F = \frac{1800\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\,\frac{(58.7\ \text{ft/s})^2}{2000\ \text{ft}} = 96.3\ \text{lb}$$

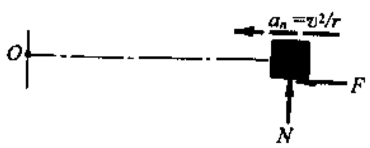


图 13-4

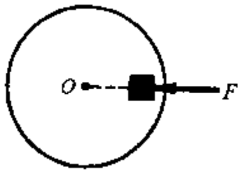


图 13-5

13.5 小物块质量为 m 在转动的圆桌上，其离中心的距离为 r，如图 13-5 所示. 设物块与圆桌之间的摩擦系数为 μ，则应具有多大的速度，才能使物块不产生滑动？

解 ☞ 作用的水平力只有 F，且 $F = \mu N$.

力沿半径方向求和为：$\sum F = ma_n$ 得 $F = ma_n$.

物块与圆桌面间的法向力 $N = mg$，并且 $a_n = \frac{v^2}{r}$，则有

$$\mu mg = \frac{mv^2}{r} \quad 得 \quad v\ \sqrt{\mu gr}$$

13.6 图 13-6 表明，质量为 m 的质点在圆弧形轨迹相对于 y 轴运动. 圆形轨迹的平面是水平的，并且垂直于 y 轴. 当角速度 ω 增大时，质点上升，表明圆形轨迹的半径也增大. 质点和绳索系统被称为球摆(有时圆锥形的). 写出常角速度 ω 与 θ 的关系，及求由 θ 表示的转动频率.

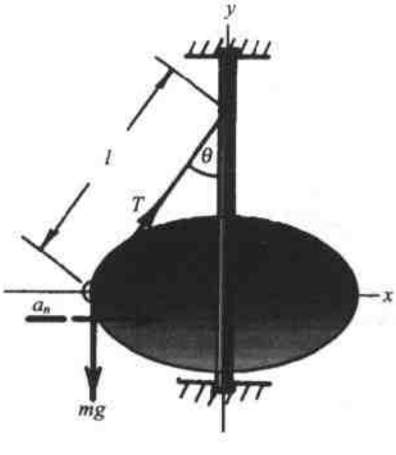


图 13-6

解 ☞ 设质点的角速度常量(或绳长 l)为 ω rad/s. 角 θ 是绳与 y 轴之间的夹角. 作用在质点上的力是重力和绳中张力 T.

由于质点以常角速度运动，因此，它的加速度只有法向加速度 a_n，指向轨迹中心(即，轨迹的水平面与 y 轴的交点).

力沿法向求和为，$\sum F_n = T\sin\theta = ma_n$.

由于 $a_n = r\omega^2 = (l\sin\theta)\omega^2$，则方程为

$$T\sin\theta = m(l\sin\theta)\omega^2 \tag{1}$$

力沿 y 方向求和为，$\sum F_y = T\cos\theta - mg = ma_y = 0$，得 $T = \frac{mg}{\cos\theta}$.

将 T 的值代入方程(1)，得

$$\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = m(l\sin\theta)\omega^2 \qquad 得\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

如果 θ 已知，则此方程可以求出满足 θ 常量的角速度 ω；如果 ω 为已知，则可求出 θ.

对于已知 θ 的 ω 常量为

$$频率\ f = \frac{\omega\ \mathrm{rad/s}}{2\pi\ \mathrm{rad/rev}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}\mathrm{Hz}$$

即为关于 y 轴的频率.

13.7 设物块 A 为质点，其重为 10 lb，静止在一个可以绕 y 轴转动的平面上. 见图 13-7(a). 绳长 $l = 2$ ft. 当平面与物块的角速度为 10 rev/min 时，绳中张力是多大？

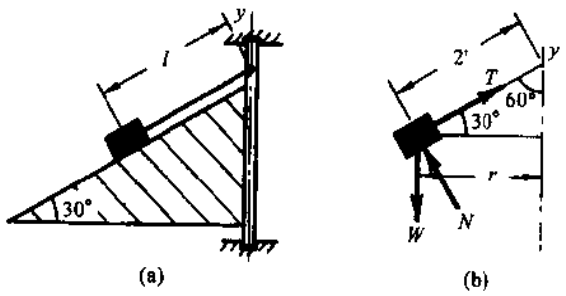


图 13-7

解 ☞ 由图 13-7(b)所示的物块隔离体图中，$r = 2\cos30° = 1.732$ ft. 其加速度只有法向加速度. 沿水平方向指向 y 轴：

$$a_n = r\omega^2 = (1.732\ \mathrm{ft})\left(\frac{10\mathrm{rev/min} \times 2\pi\ \mathrm{rad/rev}}{60\ \mathrm{s/min}}\right)^2 = 1.91\ \mathrm{ft/s^2}$$

根据沿半径 r 的水平力之和与沿 y 轴方向的力之和，得到如下方程：

$$\sum F_n = T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = \frac{W}{g}a_n = \frac{10}{32.2}\times 1.91 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N\cos 30^\circ + T\sin 30^\circ - 10 = \frac{W}{g}a_y = 0 \qquad (2)$$

解方程(2)得

$$N = \frac{10}{\cos 30^\circ} - T\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$$

代入方程(1)得

$$T\cos 30^\circ - \left(\frac{10}{\cos 30^\circ} - T\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right)\sin 30^\circ = \frac{10}{32.2}\times 1.91 \text{ 得 } T = 5.52\ \text{lb}$$

13.8 如图 13-8(a)中的 B 物块重 4 lb,在刚性杆 BC(重量不计)及绳 AB 的作用下,沿圆形水平轨迹运动.B 点瞬时速度为 6 ft/s,求支撑构件 AB 和 BC 中的力是多少?

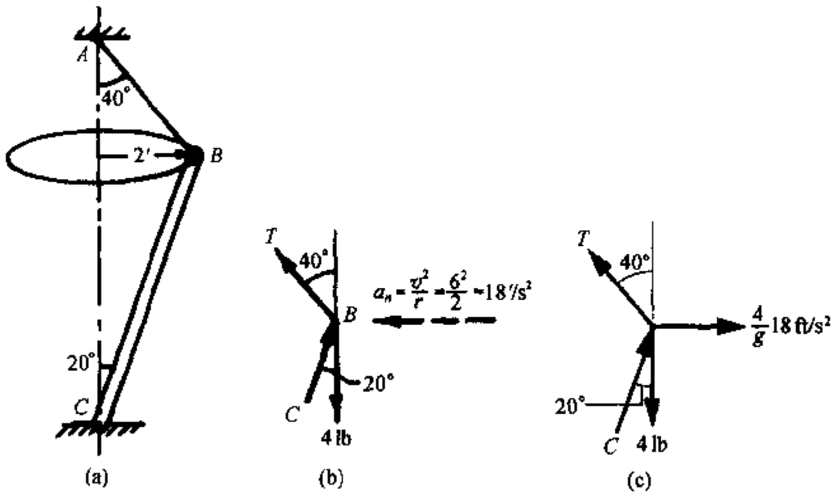


图 13-8

解 图 13-8(b)所示的物块隔离体图中,作用有重力,张力 T 和压力 C.法向加速度是 $\frac{v^2}{r} = \frac{(6)^2}{2} = 18\ \text{ft/s}^2$ 指向左.由力之和得以下方程:

$$\sum F_v = T\cos 40^\circ + C\cos 20^\circ - 4 = 0$$

$$\sum F_h = T\sin 40^\circ - C\sin 20^\circ = \frac{mv^2}{r} = \frac{4}{g}\times 18 = 2.24$$

由方程解出

$$T = 4.01\ \text{lb} \qquad \text{和} \qquad C = 0.99\ \text{lb}$$

另一种解法,使用达朗贝尔原理和"惯性力",如图 13-8(c)所示.图示为受有惯性力 $m = (4/g)(18)$ 作用的质点的隔离体图,其惯性力背离中心表示.有

$$\sum F_v = T\cos 40^\circ + C\cos 20^\circ - 4 = 0$$

$$\sum F_h = -T\sin 40^\circ + C\sin 20^\circ + \frac{4}{g}\times 18 = 0$$

由方程解出

$$T = 4.01\ \text{lb} \qquad \text{和} \qquad C = 0.99\ \text{lb}$$

在圆周运动中,惯性力被称为离心力.离心力有时被错误地认为是真实的力,实际上不是的.

13.9 在阿特伍德机中,两等质量 M 的物块由一轻绳(忽略质量)跨过无摩擦滑轮连接,如图 13-9(a)所示.一个与 M 相比质量很小的物块 m 加在一边,使得其向下运动而另一端向上运动.用绳上墨针记录时间.研究运动.

解 两个质量系统的隔离体图如图 13-9(b)和(c)所示.由于滑轮摩擦不计,相同的张力 T 通过绳子作用在每个系统上.

在两个隔离体图上,使用相同的加速度(否则绳子会断或松弛),列出运动方程

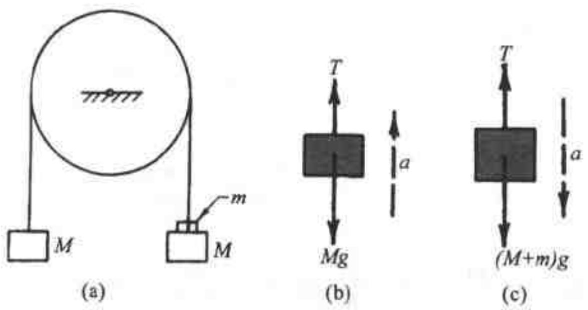


图 13-9

$$\sum F = T - Mg = Ma \tag{1}$$

$$\sum F = Mg + mg - T = (M + m)a \tag{2}$$

将方程(1)和(2)相加,消去张力 T,获得

$$mg = 2Ma + ma \qquad 得 \qquad a = \frac{m}{2M + m}g$$

这个关于重力加速度 g 与质量的加速度 a 的关系的表达式也可由测量距离和绳上的时间确定.

13.10 图 13-10 所示,一个质量 2 kg 的质量块静止在与水平面夹角 20°的光滑平面上.绳索连接质量块并与平面平行,另一端跨过无摩擦、无质量的滑轮与质量 4 kg 的质量块连接,释放后做铅直向下运动.当从静止到释放 4 s 后,求 4 kg 质量块的速度是多少?

解 ☞ 隔离体图如图 13-10(b)和(c)所示.两个物体具有相同的加速度 a.张力 T 分别作用在每个物体上其大小也相同.

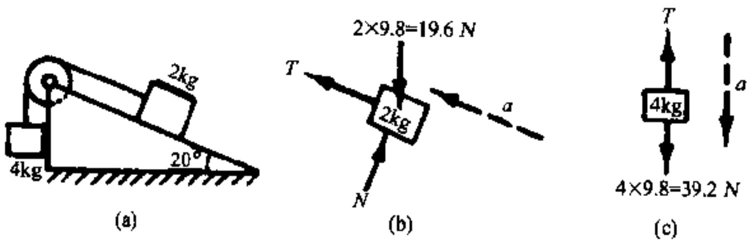


图 13-10

运动方程是

$$\sum F_b = T - 19.6\sin 20^\circ = 2a$$

$$\sum F_c = 39.2 - T = 4a$$

相加,得加速度为

$$a = 5.42 \text{ m/s}^2$$

4 s 后 4 kg 质量块的速度是

$$v = v_0 + at = 0 + 5.42(4) = 21.7 \text{ m/s}$$

13.11 物块 A 和 B,分别重 20 lb 和 60 lb,并用一轻绳跨过无摩擦滑轮连接如图 13-11(a)所示.设摩擦系数为 0.3.求系统由静止开始到 4 s 后的速度.

解 ☞ 画出物块 A 和 B 的隔离体图[见图 13-11(b)和(c)].将各力沿与平面垂直及平行方向求和,得运动方程为

$$\sum F_{\perp} = N_1 - 20\cos 30^\circ = \frac{20}{32.2}(0) = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_{\parallel} = T - 20\sin 30^\circ - 0.30N_1 = \frac{20}{32.2}a \tag{2}$$

$$\sum F_{\perp} = N_2 - 60\cos 60° = \frac{20}{32.2}(0) = 0 \tag{3}$$

$$\sum F_{\parallel} = 60\sin 60° - T - 0.30N_2 = \frac{60}{32.2}a \tag{4}$$

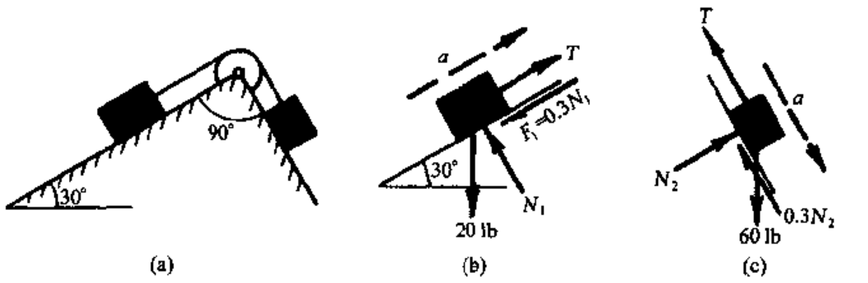


图 13-11

解方程(1)和(3)得 N_1 和 N_2，并将此值代入方程(2)和(4)之后相加消去 T. 得到加速度 $a=11.1\ \text{ft/s}^2$.

应用运动学方程 $v=v_0+at$, $v=0+11.1(4)=44.4$ ft/s.

13.12 见图 13-12(a). 试求 A 与 B 之间不相对滑动的摩擦系数的最小值. 已知 A 质量是 40 kg, B 质量是 15 kg, F 为 500 N, 平行于光滑的平面.

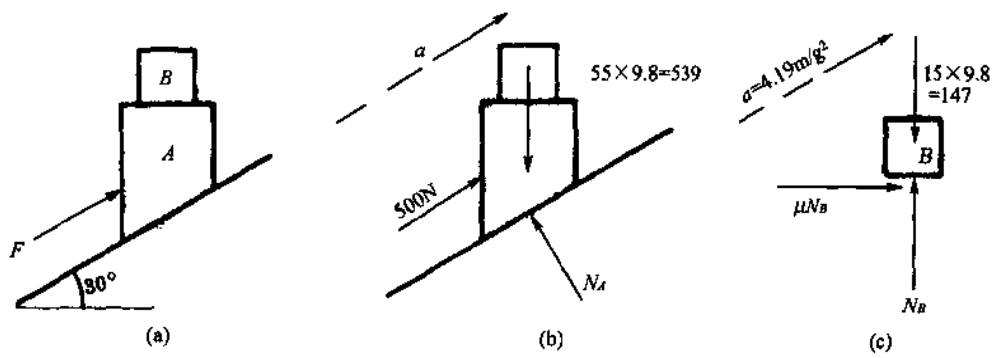


图 13-12

解 为确定系统的加速度 a，画两质量块组合体的隔离体图如图 13-12(b)所示. 将力沿平面方向求和，得 $500-539\sin 30°=55a$, $a=4.19\ \text{m/s}^2$.

画 B 块的隔离体图如图 13-12(c)所示. 力沿加速度矢量方向及与其垂直方向求和，得

$$\sum F_{\perp} = -147\cos 30° + N_B\cos 30° - \mu N_B\sin 30° = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_{\parallel} = \mu N_B\cos 30° + N_B\sin 30° - 147\sin 30° = (15)(4.19) \tag{2}$$

将第一个方程乘以 cos30°与第二个方程乘以 sin30°之后相加，得到 $N_B=178$ N. 将其代入方程(1)或方程(2)，均可解出 $\mu=0.30$.

13.13 水平力 $P=70$ N，作用在质量 $A=16$ kg 的质量块上，如图 13-13(a)所示. A 与水平面间的摩擦系数是 0.25, B 的质量是 4 kg，与平面间的摩擦系数是 0.50. 两质量块之间的绳子与水平面夹角 10°. 求绳中的张力是多大?

解 两个隔离体图的运动方程是[见图 13-13(b)和(c)]:

$$\sum F_h = 70 - T\cos 10° - 0.25N_A = 16a \tag{1}$$

$$\sum F_v = N_A 157 - T\sin 10° = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_h = T\cos 10° - 0.2N_B = 4a \tag{3}$$

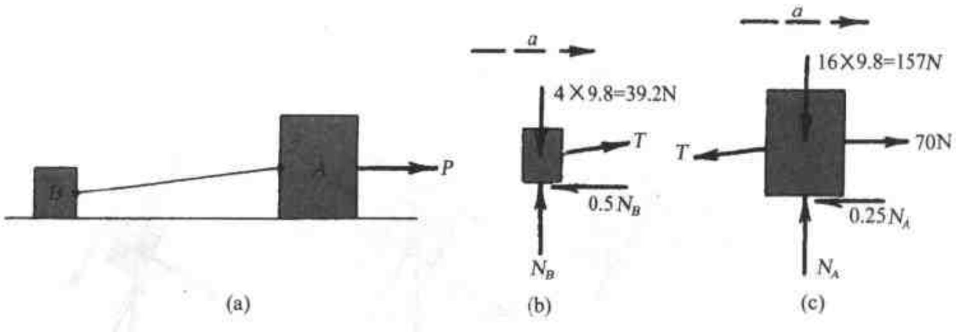


图 13-13

$$\sum F_v = N_B - 39.2 + T\sin 10^\circ = 0 \tag{4}$$

从方程(2)中解出用 T 表示的 N_A，并代入方程(1)，再从方程(4)中解出用 T 表示的 N_B，并代入方程(3)．然后新方程联立消去 a，得到 $T = 20.5$ N.

13.14 将箱子放在传送带上，此传送带与水平方向夹角 10°，运行速度 10 ft/s．如果箱子在传送带的初瞬时静止，且与带之间的摩擦系数是 1/3，求要用多长时间，箱子与带之间停止滑动．

解 ☞ 见图 13-14．得箱子的运动方程是

$$\sum F_\perp = 0 = N - W\cos 10^\circ$$

$$SF_\parallel = \frac{1}{3}N - W\sin 10^\circ = \frac{W}{g}a$$

解以上方程，得 $a = 4.98$ ft/s^2.

为了求出滑动停止前的时间，由

$$v = v_0 + at$$

$$10 = 0 + 4.98t$$

得

$$t = 2.00\text{s}$$

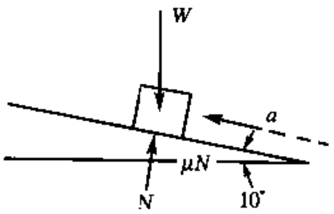


图 13-14

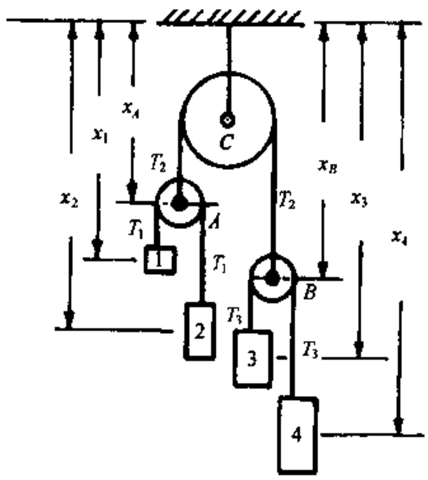


图 13-15

13.15 图 13-15 所示系统中，设滑轮是无质量、无摩擦的．各元素的质量用 kg 计．试求每个质量的加速度和与固定面连接的绳中的张力．

解 ☞ 由滑轮和绳子的连续性和无质量的假设，可得 $2T_1 = T_2$ 和 $2T_3 = T_2$．跨过 A，B 和 C 滑轮的绳子的长度是常量．则有

$$(x_1 - x_A) + (x_2 - x_A) = K_1, \quad (x_3 - x_B) + (x_4 - x_B) = K_2, \quad x_A + x_B = K_3$$

其中 K_1，K_2 和 K_3 是常量．

由二阶导数得

$$a_1 + a_2 = 2a_A \qquad a_3 + a_4 = 2a_B \qquad a_A + a_B = 0$$

设向下为正，则运动方程为

$$1 \times 9.8 - T_1 = a_1 \tag{1}$$

$$2 \times 9.8 - T_1 = 2a_2 \tag{2}$$

$$3 \times 9.8 - T_3 = 3a_3 \tag{3}$$

$$4 \times 9.8 - T_3 = 4a_4 \tag{4}$$

将 $T_1 = T_2/2$ 代入方程(1)然后×2；将 $T_1 = T_2/2$ 和 $a_2 = 2a_A - a_1$ 代入方程(2)，则方程为

$$2 \times 9.8 - \frac{2T_2}{2} = 2a_1 \tag{1'}$$

$$2 \times 9.8 - \frac{T_2}{2} = 4a_A - 2a_1 \tag{2'}$$

将两方程相加得

$$4 \times 9.8 - 1.5T_2 = 4a_A \tag{5}$$

将 $T_3 = T_2/2$ 代入方程(3)并乘以 4；将 $T_3 = T_2/2$ 和 $a_4 = 2a_B - a_3 = -2a_A - a_3$ 代入方程(4)并乘以 3．则方程为

$$4 \times 3 \times 9.8 - \frac{4T_2}{2} = 12a_3 \tag{3'}$$

$$3 \times 4 \times 9.8 - \frac{3T_2}{2} = 3[4(-2a_A - a_3)] \tag{4'}$$

将两方程相加得

$$24 \times 9.8 - 3.5T_2 = -24a_A \tag{6}$$

由方程(5)和(6)联立解出 $T_2 = 37.6$ N.

为了确定每个质量的加速度，将 $T_1 = T_3 = T_2/2 = 18.8$ 代入方程(1)(2)(3)和(4)．解出

$$a_1 = -9.0\ \mathrm{m/s^2} \qquad (向上)$$

$$a_2 = 0.4\ \mathrm{m/s^2} \qquad (向下)$$

$$a_3 = 3.53\ \mathrm{m/s^2} \qquad (向下)$$

$$a_4 = 5.1\ \mathrm{m/s^2} \qquad (向下)$$

固定面连接绳中的张力是 $2T_2 = 75.2$ N.

13.16 质量分别为 14 kg 和 7 kg 的两物块用柔软且不可伸长的绳连接，并静止放在与水平成 45°角的平面上，如图 13-16(a)所示．当释放时，求绳中张力 T 是多少？设 14 kg 质量的物块与平面间摩擦系数是 1/4，7 kg 质量物块与平面摩擦系数是 3/8.

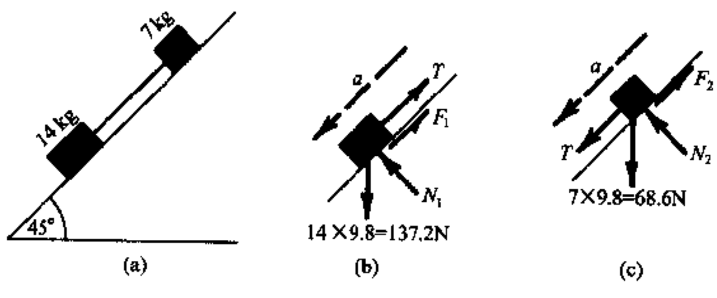


图 13-16

解 两质量块的隔离体图如图 13-16(b)和(c)所示.

14 kg 质量块的运动方程如下，沿与平面平行和垂直方向：

$$\sum F_{\parallel} = 137.2\sin45° - F_1 - T = 14a \tag{1}$$

$$\sum F_{\perp} = N_1 - 137.2\cos45° = 0 \tag{2}$$

7 kg 质量块的运动方程如下：

$$\sum F_{\parallel} = T + 68\ 6\sin 45° - F_2 = 7a \tag{3}$$

$$\sum F_{\perp} = N_2 - 68.6\cos 45° = 0 \tag{4}$$

设两质量块产生运动.当然,如果摩擦足够大,质量块可能不发生运动.

从方程(2),得 $N_1 = 137.2\times 0.707$.有 $F_1 = \frac{1}{4}N_1 = 24.3$.

从方程(4),得 $N_2 = 68.6\times 0.707$.有 $F_2 = \frac{3}{8}N_2 = 18.2$.

将这些值代入方程(1)和(3),得下面方程:

$$137.2 + 0.707 - 24.3 - T = 14a \tag{5}$$

$$T + 68.6\times 0.707 - 18.2 = 7a \tag{6}$$

方程(6)乘以 2 再与方程(5)相减,得 $T = 4.0$ N.

13.17　重为 W 的质点,由长为 l 的绳子连接,如图 13-17(a)所示.求单摆运动的周期和频率.

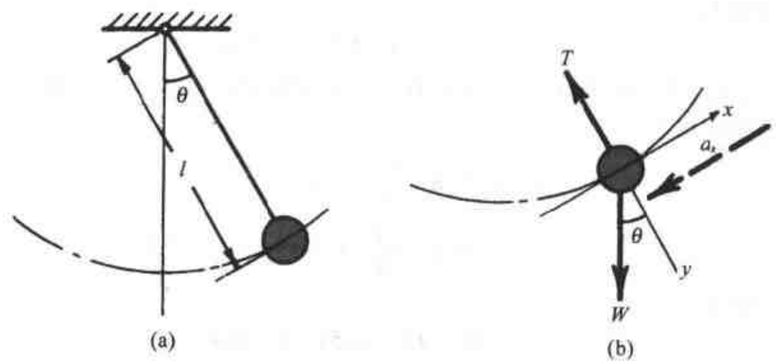


图 13-17

解　☞ 作用在质点上的力是垂直向下的重力和绳子的拉力.质点在任意时刻 t 的位置也用角 θ 表示.

选择图 13-17(b)所示的质点轨迹的切线方向为 x 轴,则运动方程为

$$\sum F_x = -W\sin\theta = \frac{W}{g}a_x$$

则,当 $\theta = 0$ 时加速度也为零,即在质点的最低位置.

注意 a_x 是沿轨迹的切线方向,因此

$$a_x = l\alpha$$

其中 α 是绳和质点角加速度.则

$$-W\sin\theta = \frac{W}{g}l\alpha = \frac{W}{g}l\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad 即 \quad -\frac{g}{l}\sin\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

微分方程的求解,可通过将 $\sin\theta$ 展成幂级数而化简.即

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

对于角位移很小时,sin 用弧度表示的.则在小位移下,运动方程写为

$$-\frac{g}{l}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

由微分方程的理论,其解可由三角函数表示:

$$\theta = A\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

常数 A 和 B 可用初始条件确定.

用 rad/s 表示的角频率 ω 等于 $\sqrt{\frac{g}{l}}$.频率 $f = (1/2\pi)\sqrt{\frac{g}{l}}$ Hz

显然,一个循环是质点从起点经过所有位置又返回到起点位置的运动.因此说,质点运动从左端点位置到右端点位置,然后又回到左端点位置是一个完整的循环.

一个循环所用的时间称为周期 T.即为频率 f 的倒数.

$$T = \frac{1}{f(\text{周}/\text{秒})} = \frac{1}{f}\ \text{秒}/\text{周}$$

13.18 研究质量为 M 的质点的运动,该质点静止放在光滑水平面上,如图 13-18(a)所示.质点系在一个劲度系数为 K 的弹簧上,K 是每单位长度的变形所需的力.使质量块产生距静平衡位置为 x_0 的位移(静平衡位置弹簧的伸长和压缩量均为零),然后释放,释放前质点速度为零.研究运动情况.

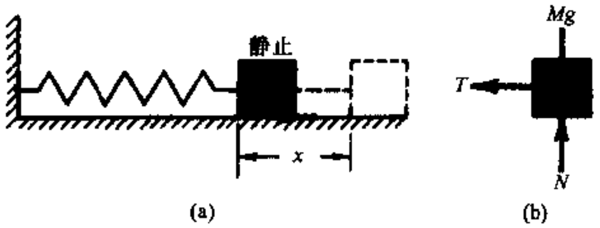


图 13-18

解 图 13-18(b)所示的隔离体图中的质点位置是相对于静平衡位置的距离 x.作用在质点水平方向的力是弹簧中的力 T,即弹簧拉长了 x 距离.

在材料的弹性极限范围内,设弹簧中的张力与弹簧原长的改变量成正比.即

$$T = Kx$$

其中,T 弹性力;K 为劲度系数;x 长度的改变量.

将质点上的力沿水平方向求和,得 $\sum F_x = -T = Ma_x$.

注意弹性力指向左,设为负.在这种情况下,距离 x 向右,a_x 是正的.张力 T 指向左,即为负.

代入 $T = Kx$ 和 $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$,则上面方程为 $-Kx = M\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)$(简谐运动).此微分方程与题 13.17 相似.因此其解为正弦和余弦形式:

$$x = A\sin\sqrt{\frac{K}{M}}t + B\cos\sqrt{\frac{K}{M}}t$$

现计算 A 和 B 的值.当 $t = 0$ 时,$x = x_0$,则

$$x_0 = A\sin\sqrt{\frac{K}{M}}0 + B\cos\sqrt{\frac{K}{M}}0 = 0 + B \quad \text{即}\ B = x_0$$

并且

$$x = A\sin\sqrt{\frac{K}{M}}t + x_0\cos\sqrt{\frac{K}{M}}t$$

为了求 A,需将 x 对时间微分,因另一个已知条件是:当 $t = 0$ 时,$v = 0$,所以有

$$v = \frac{dx}{dt}A\sqrt{\frac{K}{M}}\cos\sqrt{\frac{K}{M}}t - x_0\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\sqrt{\frac{K}{M}}t$$

当 $t = 0$ 时,$v = 0$,$\sin\sqrt{K/M}\,0 = 0$,则 $0 = A\sqrt{K/M}\cos 0 - 0$,得 $A = 0$.运动方程为 $x = x_0\sqrt{K/M}t$.当然,如果初速度不为零,设为 v_0,则有 $A = v_0/\sqrt{K/M}$.

13.19 在题 13.18 中,(a)如果质量块 M 重 10 oz,劲度系数为 2 oz/in,求系统的频率 f 和周期 T;(b)如果质量是 0.34 kg,$K = 22$ N/m,求频率.

解

(a)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2/16\ \text{lb/in} \times 12(32.2)\text{in/s}^2}{12/16\ \text{lb}}} = 1.28\ \text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.28\ \text{Hz}} = 0.782\quad \text{秒}/\text{周}$$

(b)

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{22\ \text{N/m}}{0.34\ \text{kg}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{22(\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)/\text{m}}{0.34\ \text{kg}}}=1.28\ \text{Hz}$$

13.20 质量为 m 的质点静止放在半径为 r 的圆球体的顶部，如图 13-19(a)所示．设质点从静止开始沿球面运动，求质点在球面哪点时离开球体？

解 ☞ 选 θ 为运动中的任意时刻 t 的角位移．隔离体图中表明了在质点上作用两个力，即沿半径的法向反力和重力 mg[见图 13-19(b)]．

将力沿径向和切向求和得运动方程：

$$\sum F_r=-N_A+mg\cos\theta=mr\omega^2 \tag{1}$$

$$\sum F_t=mg\sin\theta=mr\alpha \tag{2}$$

还需建第三个方程，表示 θ，ω 和 α 之间的关系，

从 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$和 $\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}$中消去 d$t$，得

$$\alpha d\theta=\omega d\omega \tag{3}$$

由方程(2)，$\alpha=(g/r)\sin\theta$，代入方程(3)，$(g/r)\sin\theta d\theta=\omega d\omega$．则

$$\int_0^{\theta}\frac{g}{r}\sin\theta d\theta=\int_0^{\omega}\omega d\omega \qquad 得\ \frac{g}{r}(1-\cos\theta)=\frac{\omega^2}{2} \tag{4}$$

从球面离去的位置，其法向反力将等于零．方程(1)成为

$$mg\cos\theta=mr\omega^2 \qquad 得\ \frac{g}{r}\cos\theta=\omega^2 \tag{5}$$

将方程(5)中的 ω^2 代入方程(4)，得

$$\frac{g}{r}(1-\cos\theta)=\frac{g}{2r}\cos\theta \qquad \cos\theta=\frac{2}{3} \quad \theta=0.841\ \text{rad}\ 或\ 48.2^\circ$$

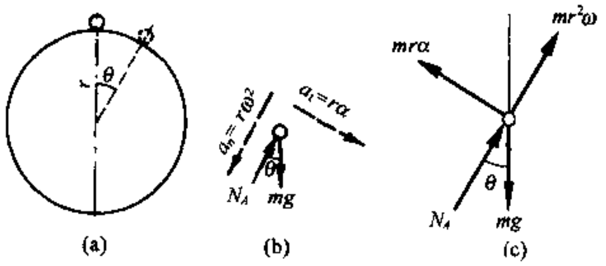


图 13-19

另一种解法，图 13-19(c)中的隔离体图画出了两个惯性力 $mr\alpha$ 和 $mr\omega^2$．则平衡方程

$$\sum F_v=N_A\cos\theta-mg+mr\omega^2\cos\theta+mr\alpha\sin\theta=0$$

$$\sum F_h=N_A\sin\theta+mr\omega^2\sin\theta-mr\alpha\cos\theta=0$$

当质点离开球面时，$N_A=0$．联立方程消去 ω^2，得 $\alpha=(g/r)\sin\theta$．从方程中消去 α，得 $\omega^2=(g/r)\cos\theta$．将 α 代入方程(3)得方程(4)．再将 ω^2 代入得

$$\frac{g}{r}(1-\cos\theta)=\frac{g}{2r}\cos\theta$$

得到 $\theta=48.2^\circ$．

13.21 质量为 m 的质点从无摩擦的滑梯滑下并进入直径为 d 的循环圈中．为了使质点在圈中能完整地运动一周，求质点在开始时的高度应是多少？

解 ☞ 质点运动中在任意时刻的位置的隔离体图如图 13-20(b)所示．沿平面平行和垂直方向的运动方程是

$$\sum F_{\parallel}=mg\sin\theta=ma \tag{1}$$

$$\sum F_{\perp}=N-mg\cos\theta=0 \tag{2}$$

由方程(1)，加速度 $a=g\sin\theta$．将 a 的值代入运动学方程 $a ds=v dv$，其中 s 为沿平面的位移．

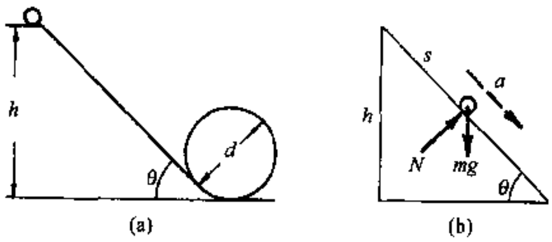


图 13-20

则 $g\ \sin\theta \mathrm{d}s = v\mathrm{d}v$，并且

$$\int_0^s g\sin\theta \mathrm{d}s = \int_0^v v\mathrm{d}v \quad 得 \quad g\sin\theta \cdot s = \frac{v^2}{2} \tag{3}$$

为求平面底部的速度，应将 $h/\sin\theta = s$ 代入方程(3)

$$g\sin\theta \frac{h}{\sin\theta} = \frac{v^2}{2} \quad 得 \quad v^2 = 2gh \tag{4}$$

证明，光滑斜面底部的速度与斜面的斜率无关，并与质点的铅垂自由落体运动相同.

再研究质点在圈顶部位置的隔离体图(见图 13-21).

作用力有重力 mg 和沿铅垂半径的作用力. 在此位置速度应为极小值，即 N_A 的值应是零. 位置稍微变化，当速率 v 增加时，法向加速度 a_n 也增加. 为提供 a_n 值的增加，则反力 N_A 也增加，因为 $\sum F_n = ma_n$.

确定圈顶部的速度其实是确定光滑轨迹的运动(例如平面和环道)与只受重力作用的铅直运动是相同的. 因此，质点在圈边向上运动消耗的速度等于在直线铅直运动中消耗的速度：

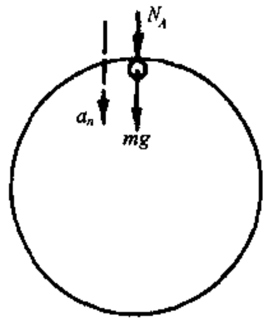


图 13-21

$$v_{顶}^2 = v_{底}^2 - 2gd$$

底部速度 $v_{底}$ 还可由方程(4)中的高度 h 表示. 即

$$v_{底}^2 = 2gh - 2gd = 2g(h-d)$$

当质点在顶部时，作用力沿铅垂半径方向求和得下面方程，由 $N_A = 0$

$$\sum F_n = mg = \frac{mv_{顶}^2}{d/2} \quad 得 \quad mg = \frac{4mg}{d}(h-d)$$

则有 $h = 5d/4$. 表明质点应具有这个高度(或更高)，才能得极小速度. 否则质点将不能到达顶部，而中途"跳过".

13.22 柔性链条长 l，静放在光滑的桌面上，其中有长 C 的部分绕过桌边垂下，如图 13-22(a)所示. 使系统处于静止后再释放，描绘运动情况. 链条重 w lb/ft. 设链条始终与桌面接触.

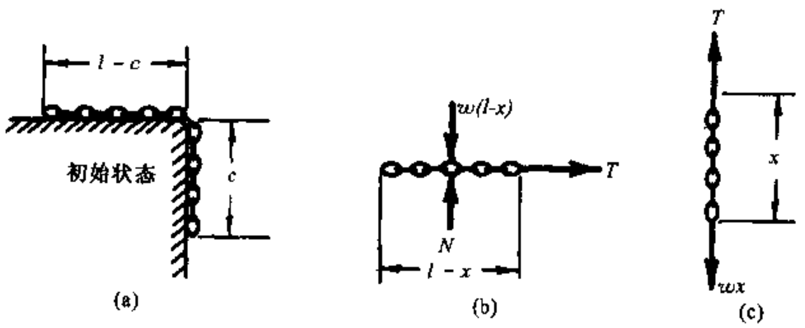


图 13-22

解 ☞ 在两段链条的隔离体图中,画上相同大小的张力 T 分别作用在各自部分. 见图 13-22(b)和(c). 运动方程是

$$T = \frac{w(l-x)}{g}a = \frac{w(l-x)}{g}\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

$$wx - T = \frac{wx}{g}a = \frac{wx}{g}\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

将方程(1)与(2)相加,得

$$wx = \frac{wl}{g}\frac{d^2x}{dt^2} \quad 得 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l}x$$

(这不是简谐运动,为什么?)

二阶微分方程的解是 $x = Ae^{\sqrt{g/l}\,t} + Be^{-\sqrt{g/l}\,t}$.

为了求解常量 A 和 B,注意初始条件,即为 $x = c$ 和 $v = 0$. 将 $t = 0$ 时,$x = c$ 代入后,得 $c = A + B$.

x 关于 t 微分:$v = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{\frac{g}{l}}e^{\sqrt{g/l}\,t} - B\sqrt{\frac{g}{l}}e^{-\sqrt{g/l}\,t}$.

将 $t = 0$, $v = 0$ 的条件代入,得 $A - B = 0$.

联立求解 $A - B = 0$ 和 $c = A + B$,得 $A = B = \frac{1}{2}c$.

方程解是:$x = \frac{1}{2}ce^{\sqrt{g/l}\,t} + \frac{1}{2}ce^{-\sqrt{g/l}\,t}$.

通过给定时间确定指数函数从而确定下垂 x 长度的问题,见附录 C 中的计算和解.

13.23 物体重 W,在介质中落下. 受到的介质阻力 R 与其速度成正比. 对于慢速运动的物体是比较精确的. 研究质点的运动规律.

解 ☞ 物体的隔离体图上,作用有重力 W 向下和阻力 R 向上,(见图 13-23). 设 x, $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 向下为正,则运动微分方程是

$$W - k\dot{x} = \frac{W}{g}\ddot{x} = \frac{W}{g}\frac{d\dot{x}}{dt}$$

改写方程并积分

$$\frac{d\dot{x}}{\frac{W}{g} - \dot{x}} = \frac{kg}{W}dt \quad 和 \quad -\ln\left(\frac{W}{k} - \dot{x}\right) = \frac{kg}{W}t + C_1$$

设 $t = 0$ 时,$\dot{x} = \dot{x}_0$, $-\ln\left(\frac{W}{k} - \dot{x}_0\right) = -C_1$ 和

$$-\ln\left(\frac{W}{k} - \dot{x}\right) = \frac{kg}{W}t - \ln\left(\frac{W}{k} - \dot{x}_0\right)$$

得

$$\frac{\frac{W}{k} - \dot{x}}{\frac{W}{k} - \dot{x}_0} = e^{-(kg/W)t}$$

由此有

$$\dot{x} = \frac{W}{k}(1 - e^{-(kg/W)t}) + \dot{x}_0e^{-(kg/W)t} \tag{1}$$

当 $t \to \infty$ 时,得到极限速度 $\dot{x}_{max}$ 为

$$\dot{x}_{max} = \frac{W}{k} \tag{2}$$

为了确定距离 x(时间的函数),将方程(1)写成

$$dx = \frac{W}{k}(1 - e^{-(kg/W)t})dt + \dot{x}_0e^{-(kg/W)t}dt$$

积分得

$$x = \frac{W}{k}t - \frac{W}{k}\left(-\frac{W}{kg}\right)e^{-(kg/W)t} + \dot{x}_0\left(-\frac{W}{kg}\right)e^{-(kg/W)t} + C_2$$

设 $t = 0$ 时,$x = 0$, $0 = 0 + W^2/k^2g - W\dot{x}_0/kg + C_2$ 并且

$$x = \frac{W}{k}t + \frac{W^2}{k^2 g}e^{-(kg/W)t} - \frac{W\dot{x}_0}{kg}e^{-(kg/W)t} - \frac{W^2}{k^2 g} + \frac{W\dot{x}_0}{kg}$$

用 $W/k = \dot{x}_{\max}$，并整理表达式得

$$x = \frac{W}{k}t + \frac{1}{g}(\dot{x}_{\max}\dot{x}_0 - \dot{x}_{\max}^2)(1 - e^{-(kg/W)t}) \tag{3}$$

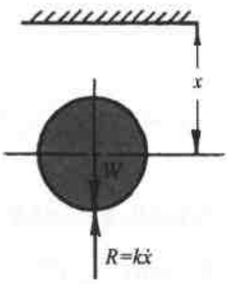


图 13-23

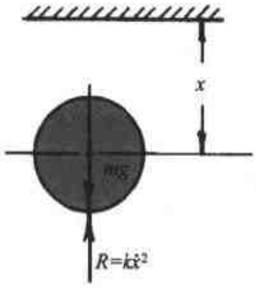


图 13-24

13.24 物块质量 m，在介质中落下.受到的介质阻力 R 与其速度的平方成正比.对于高速运动的物体是比较准确的.研究质点的运动规律.

解 ☞ 物体的隔离体图中(见图 13-24)，画出了重力 mg 作用向下和阻力 R 向上.设 x，$\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 向下为正，运动的微分方程是：

$$mg - k\dot{x}^2 = m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}$$

重写方程并积分

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{mg/k - \dot{x}^2} = \frac{k}{m}dx \quad 和 \quad -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{mg}{k} - \dot{x}^2\right) = \frac{k}{m}x + C_1$$

设当 $x = 0$ 时，$\dot{x} = \dot{x}_0$，$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{mg}{k} - \dot{x}_0^2\right) = C_1$ 和

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{mg}{k} - \dot{x}^2\right) = \frac{k}{m}x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{mg}{k} - \dot{x}_0^2\right)$$

则有

$$-\frac{2k}{m}x = \ln\frac{mg/k - \dot{x}^2}{mg/k - \dot{x}_0^2} \quad 或 \quad \frac{mg}{k} - \dot{x}^2 = \left(\frac{mg}{k} - \dot{x}_0^2\right)e^{-\left(\frac{2k/m}{m}\right)x}$$

和

$$\dot{x}^2 = \frac{mg}{k}(1 - e^{-(2k/m)x}) + \dot{x}_0^2 e^{-(2k/m)x} \tag{1}$$

当 $x \to \infty$ 时，得极限速度，即

$$\dot{x}_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tag{2}$$

13.25 质量 m 射出的初速度是 v_0，与水平面夹角是 θ.求射程，最大高度和飞行时间.在求解中略去空气阻力.

解 ☞ 选水平线为 x 轴.射程是 r.射出体如图 13-25 所示位于轨迹上的某点(x, y).只受重力作用.

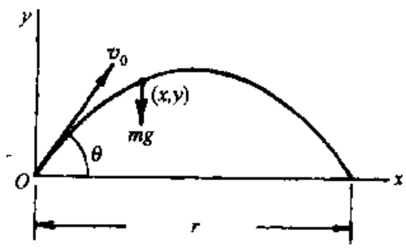


图 13-25

沿 x 和 y 方向的运动方程是：

$$\sum F_x = 0 = m\ddot{x} \quad 和 \quad \sum F_y = -mg = m\ddot{y}$$

由此得出，$\ddot{x} = 0$，$\ddot{y} = -g$

积分得，$x = C_1$ 和 $\dot{y} = -gt + C_2$，$\dot{x} = v_0\cos\theta$ 是常量；且当 $t = 0$ 时，$\dot{y} = v_0\sin\theta$.则有

$$\dot{x} = v_0\cos\theta \quad 和 \quad \dot{y} = -gt + v_0\sin\theta$$

再次积分得

$$x = (v_0\cos\theta)t + C_3 \quad 和 \quad y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + C_4$$

由于 $t=0$ 时, $x=0$, $y=0$, 则 $C_3=C_4=0$, 由此得

$$x = (v_0\cos\theta)t \quad 和 \quad y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

为了获得在笛卡尔坐标下的轨迹,将从方程中消去 t. 这是很容易的事情,即将方程用 t 表示 x,然后将 t 代入 y 方程即可.

$$y = v_0\sin\theta\frac{x}{v_0\cos\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

这就是抛物线方程.

为了求出飞行时间,令 $y=0$. 高度为零,即为开始运动和射体落地的情况.

$$y = 0 = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = t(v_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt)$$

当 $t=0$(开始飞行)到 $t=\frac{(2v_0\sin\theta)}{g}$(飞行时间),都满足方程,因此可得 $v_0\sin\theta=\frac{1}{2}gt$.

将 t 的值代入 x 的运动方程可得到射程,为

$$x = r = v_0\cos\theta\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}\sin2\theta \qquad (射程)$$

应该注意,当 $\sin2\theta=1$, 或 $2\theta=90°$时,获得射程的最大值. 即 $\theta=45°$为最大射程.

设最大高度出现在飞行时间的一半(只是理想设想),或者是 y 方向的速度分量等于零的时间. 设为飞行时间的一半时间,并代入 y 的运动方程得

$$h = v_0\sin\theta\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \qquad (最大高度)$$

13.26 质量为 m 的质点与质量为 M 的质点的相互吸引而产生运动[见图 13-26(a)]. 设质点 M 静止,研究质量 m 的质点的运动规律. 注意两质点间的距离不是常量.

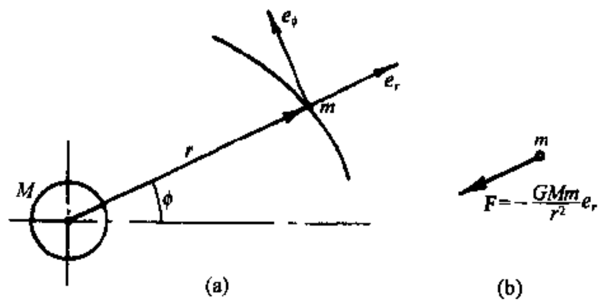


图 13-26

解 ☞ 质点 m 关于 M 的位置矢量是 $\boldsymbol{r}$. 选如图所示的极坐标的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$. m 的隔离体图只画出了引力 $\boldsymbol{F}$, 沿 $\boldsymbol{e}_r$ 的负方向[见图 13-26(b)]. 根据牛顿的万有引力定律,有

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1}$$

其中 G 为万有引力常数:

$$G = 6.658\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)} \qquad 在国际单位制中$$

$$G = 3.43\times10^{-8}\ \mathrm{lb\text{-}ft^2/(slug)^2} \qquad 在工程单位制中$$

在极坐标中加速度 $\boldsymbol{a}$ 为(见 11.6 节)

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\boldsymbol{e}_\phi \tag{2}$$

将方程(1)和(2)代入下式:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{3}$$

得

$$-\frac{GMm}{r^2}e_r = +m(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2)e_r + m(r\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi})e_\phi \tag{4}$$

令 e_ϕ 系数等于零，再比较 e_r 的系数，得

$$r\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi}=0 \tag{5}$$

和

$$-\frac{GM}{r^2}=(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2) \tag{6}$$

将方程(5)写为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\phi})=0 \tag{7}$$

积分方程(7)，$r^2\dot{\phi}=C$ 常量

注意图 13-27 中径向矢量 r 通过转角 $\mathrm{d}\phi$ 扫过的面积 $\mathrm{d}A$. 微分面积 $\mathrm{d}A$ 近似等于 $\frac{1}{2}r(r\mathrm{d}\phi)=\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\phi$，并除以 $\mathrm{d}t$ 为

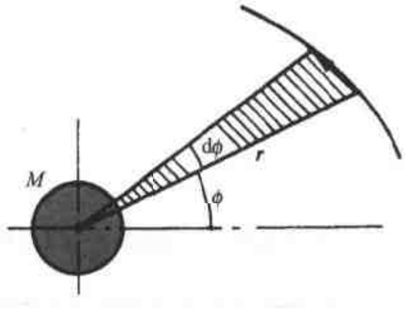


图 13-27

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}=\frac{1}{2}C \tag{8}$$

即，半径矢量在任何相等的时间内扫过的面积必然相等.

另外由方程(6)确定质点 m 的轨迹. 为了方便求解，令 $r=\frac{1}{u}$，则 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}=-\frac{1}{u^2}$ 并且

$$\dot{r}\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}$$

由方程(8)，$\dot{\phi}=\frac{C}{r^2}=Cu^2$，则

$$\dot{r}=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}Cu^2=-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}$$

并且

$$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\left(-C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}\right)Cu^2=-C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}$$

代入方程(6)，得到

$$-GMu^2=-C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}-C^2u^3$$

或者为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u=\frac{GM}{C^2} \tag{9}$$

设方程(9)的积分解的形式是：

$$u=A\cos\phi+B \tag{10}$$

将解带回方程(9)，确定积分常数，即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}=-A\sin\phi,\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}=-A\cos\phi$$

有

$$-A\cos\phi+A\cos\phi+B=\frac{GM}{C^2}$$

所以 $B=\frac{GM}{C^2}$，方程(9)的解为

$$u=A\cos\phi+\frac{GM}{C^2}\qquad 其中\ u=\frac{1}{r} \tag{11}$$

方程(11)为二次曲线，由几何分析，在轨迹上运动的点，其是相位于固定点(焦点)的距离与该点到固定线(准线)的垂直距离之比是一个常量 e(离心率). 图 13-28 中的图解所示.

$$e=\frac{r}{d-r\cos\phi} \tag{12}$$

由方程(12)可解出 $1/r$，得

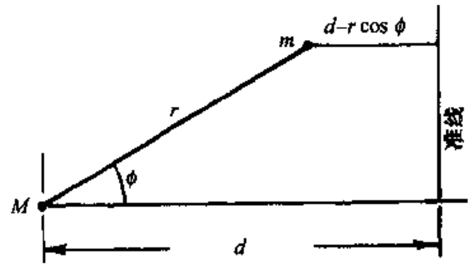


图 13-28

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos\phi + \frac{1}{ed} \tag{13}$$

下表列出了二次曲线的类型及相应的 e 值.

e	0	<1	1	>1
曲线	圆	椭圆	抛物线	双曲线

比较方程(11)和(13)得到

$$\frac{1}{ed} = \frac{GM}{C^2} \quad 即 \quad ed = \frac{C^2}{GM} \tag{14}$$

运动方程是

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos\phi + \frac{GM}{C^2} \tag{15}$$

13.27 在上述问题中,行星 m 绕太阳 M 运动的轨迹是椭圆(离心率 $e<1$).太阳是椭圆的焦点之一.证明周期 T(行星绕转完整的一周所用的时间)为 $T=\dfrac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$.其 a 是椭圆的长半轴;G 是引力常量;M 是太阳的质量.

解 用 a 表示椭圆的长半轴,b 为短半轴.如图 13-29 所示,得

$$f + g = 2a \tag{1}$$

由题 12.26 中的方程(13)有

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos\phi + \frac{1}{ed} \tag{2}$$

当 $\phi=0°$时,$r=g$;当 $\phi=180°$时,$r=f$.方程(2)写为

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{d}\cos 0° + \frac{1}{ed} = \frac{1+e}{ed} \quad 和 \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{d}\cos 180° + \frac{1}{ed} = \frac{1-e}{ed}$$

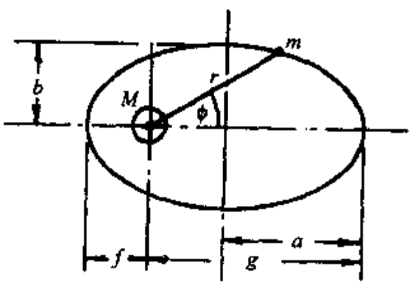


图 13-29

从方程中解出 f 和 g,并代入方程(1)中,得

$$\frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} = 2a \quad 或 \quad 1-e^2 = \frac{ed}{a} \tag{3}$$

由题 13.26 中的方程(14),$ed=\dfrac{C^2}{GM}$.因此,方程(3)写为

$$1 - e^2 = \frac{C^2}{GMa}$$

椭圆的面积 $A=\pi ab=\pi a^2\sqrt{1-e^2}$.则

$$A = \pi a^2 \frac{C}{\sqrt{GMa}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}\frac{C}{2} \tag{4}$$

方程(4)给出了在一个周期 T 内所扫过的面积.这个面积也是变化率$\dfrac{dA}{dt}$与时间 T 的乘积:$A=\left(\dfrac{dA}{dt}\right)T$.最后,代入由题 13.26 所确定的表达式$\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{C}{2}$,有

$$A = \frac{C}{2}T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}\frac{C}{2} \quad 得 \quad T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

13.28 将引力常量 $G = 6.658 \times 10^{-8}\ \mathrm{cm^3/g \cdot s^2}$ 换算成工程单位.

解

$$G = 6.658 \times 10^{-8}\frac{\mathrm{cm^3}}{\mathrm{g \cdot s^2}} = 6.658 \times 10^{-8}\frac{(3.281 \times 10^{-2}\mathrm{ft})^3}{(2.205/32.2)10^{-3}\mathrm{slug \cdot s^2}}$$

$$= 3.43 \times 10^{-8}\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{slug \cdot s^2}}$$

因为 $1\ \mathrm{slug} = 1\ \mathrm{lb \cdot s^2/ft}$,则

$$1\frac{\mathrm{ft^3}}{\mathrm{slug \cdot s^2}} = 1\frac{\mathrm{ft^3}}{(\mathrm{lb \cdot s^2/ft})\mathrm{s^2}} = 1\frac{\mathrm{ft^4}}{\mathrm{lb \cdot s^4}}$$

所以有

$$G = 3.43 \times 10^{-8}\frac{\mathrm{ft^4}}{\mathrm{lb \cdot s^4}}$$

13.29 如图 13-30 所示,在地球表面的 A 点发射卫星.所有燃料燃尽点在 P 点,离地球中心为 5000 mi.设 P 点的速度是 v_0,并且垂直于地球半径的延长线.求 v_0 的值,使卫星的轨道是(a)圆;(b)抛物线.

解 (a) 由题 13.26 中的方程(8)

$$C = r^2\dot{\phi} = r(r\dot{\phi}) = rv_0 = (5000 \times 5280)v_0 \tag{1}$$

方程(11)给出了题 13.26 中微分方程(9)的解,即

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\phi + \frac{GM}{C^2} \tag{2}$$

在同题中方程(13)的解为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos\phi + \frac{1}{ed} \tag{3}$$

因此,有

$$A = \frac{1}{d} \quad 和 \quad \frac{1}{ed} = \frac{GM}{C^2} \tag{4}$$

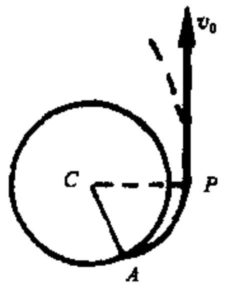


图 13-30

联立得到

$$e = \frac{AC^2}{GM} \tag{5}$$

其中,M 是地球的质量等于 4.09×10^{13} slug.

代入上面的方程(2),有

$$\frac{1}{5000 \times 5280} = A\cos0^\circ + \frac{(3.43 \times 10^{-8})(4.09 \times 10^{23})}{(5000 \times 5280v_0)^2} \tag{6}$$

得

$$A = \frac{1}{5000 \times 5280}\left(1 - \frac{5.31 \times 10^8}{v_0^2}\right) \tag{7}$$

将 $e = 0$(圆轨迹)和由方程(7)解出的 A 的值,代入方程(5),得

$$0 = \frac{1}{5000 \times 5280}\left(1 - \frac{5.31 \times 10^8}{v_0^2}\right)\frac{C^2}{GM} \tag{8}$$

当方程(8)满足时,有

$$\left(1 - \frac{5.31 \times 10^8}{v_0^2}\right) = 0$$

则

$$v_0 = 23\,000\ \mathrm{ft/s} \quad 或 \quad 15\,700\ \mathrm{mi/h}$$

(b) 如果轨迹是抛物线,则 $e = 1$.将 $e = 1$ 代入方程(5),得

$$1 = \frac{1}{5000 \times 5280}\left(1 - \frac{5.31 \times 10^8}{v_0^2}\right)\frac{C^2}{GM}$$

$$= \frac{1}{5000 \times 5280}\left(1 - \frac{5.31 \times 10^8}{v_0^2}\right)\frac{(5000 \times 5280)^2 v_0^2}{(3.43 \times 10^{-8})(4.09 \times 10^{23})}$$

化简得

$$v_0 = 32\ 500\ \text{ft/s} \qquad 或 \qquad 22\ 200\ \text{mi/h}$$

值得注意，当 v_0 值大于此值时，则有偏心率大于 1，即意味着卫星脱离抛物线轨道，不再返回地球上.

13.30 在离地球表面 500 mi 的点，卫星全部燃料燃尽，此时飞行速度是 36 000 ft/s，作用线与地球半径的延长线垂直. 求轨道的离心率. 设地球半径为 3940 mi.

解 ☞ 题 13.26 中的方程(12)，可写为 $ed - er\cos\phi = r$. 由此又得

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\phi} = \frac{C^2/GM}{1 + e\cos\phi} \tag{1}$$

初始条件是：(a) $r = 3940 + 500 = 4440$ mi 和(b) $\phi = 0$ 和 $C = r^2\dot{\phi} = r(v_0) = 4440 \times 5280 v_0$, $G = 3.43 \times 10^{-8}$, $M = 4.09 \times 10^{23}$. 因此以 $v_0 = 36\ 000$ ft/s，由方程(1)得

$$4440 \times 5280 = \frac{4440 \times 5280 \times (36\ 000)^2/(3.43 \times 10^{-8})(4.09 \times 10^{23})}{1 + e}$$

得

$$1 + e = \frac{4440 \times 5280 \times (36\ 000)^2}{(3.43 \times 10^{-8})(4.09 \times 10^{23})}$$

由此得轨道的离心率 $e = 1.17$ 和轨迹为双曲线.

13.31 已知地球绕太阳运行的周期是 $T = 1$ yr，并且其近日点离太阳 91 340 000 mi；远日点离太阳为 94 450 000 mi，试求太阳的质量 M. 设 1 yr = 365 天，并略去其它行星的影响.

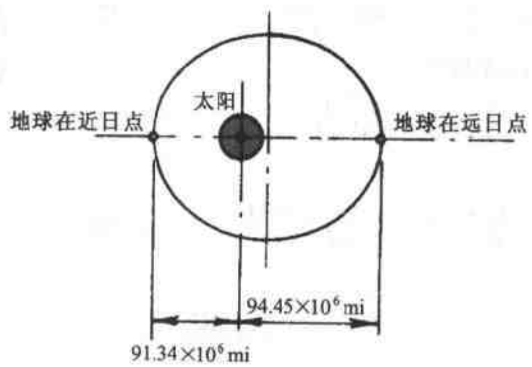


图 13-31

解 ☞ 图 13-31 中给出了地球离太阳最近与最远的两个位置(近日点和远日点). 椭圆轨迹的长半轴 a 是两个距离相加再除以 2，得 $a = 92.9 \times 10^6$ mi，使用由题 13.27 导出的公式，有

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(92.9 \times 10^6 \times 5280)^3}{(3.43 \times 10^{-8})(365 \times 24 \times 3600)^2} = 13.7 \times 10^{28}\ \text{slugs}$$

补充习题

13.32 汽车重 4000 lb，沿水平道路加速行驶，其加速度大小是 3 ft/s². 问需加多大常力 F(力的作用线与地面平行)，才能产生这个加速度？

答案：373 lb.

13.33 一物体沿倾角为 25°平面抛射出，其初速度为 15 m/s. 如果物体和平面之间的摩擦系数是 0.25，求物体沿平面向上运动多远距离？并求达到最高点所需的时间？

答案：17.7 m, 2.36 s.

13.34 陨石重 1000 lb，隐埋地下 60 ft. 设其撞击地面的速度为 1000 ft/s，求地作用在陨石上的平均阻力是多少？

答案：$F = 265\ 000$ lb.

13.35 两个相同质量的质点，放在倾斜 25°的斜面上，当它们相距 10 m 时，静止释放. 高处质点与平面之间的摩擦系数是 0.15，低处质点与平面间的摩擦系数是 0.25. 求需用多长时间高处质点追上低处质点？

答案：$t = 4.74$ s.

13.36 见图 13-32. 汽车重 2800 lb，并以行驶速度 30 mi/h，撞入洼地，此路的曲率半径是 50 ft. 求法向约束反力的合力是多少？

答案：$N = 6170$ lb.

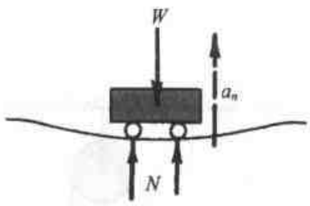


图 13-32

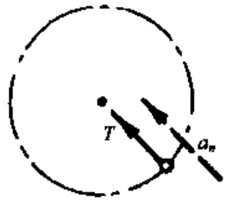


图 13-33

13.37 小振子坠质量为 25 g，用长 400 mm 的绳系住，设其在水平圆轨迹上旋转，如图 13-33 所示. 求，当转动角速度为 30 rad/s 时，绳中张力是多少？

答案：$T = 9.0$ N.

13.38 重 90 lb 的重物，以 30 ft/s 的速度在水平光滑面上运动. 求需要多大的水平力的值. 才能使重物 4 s 后停止，

答案：21.0 lb.

13.39 锥形摆的球重 10 lb，吊在长 8 ft 长绳的一端，运动轨迹是水平面内的圆周轨迹. 如果球的运动使绳与铅垂线夹角为 30°，问球的线速度是多大？

答案：8.63 ft/s.

13.40 质量分别为 40 kg 和 35 kg 的质量块，用一绳系住并绕过一无摩擦的滑轮. 如果系统从静止开始运动，求 6 s 后，其中一块质量经过的距离.

答案：11.8 m.

13.41 质量为 40 kg 的物块沿桌子表面由一绳拖曳，该绳另一端跨过桌角的无摩擦滑轮后，又系住另一质量为 12 kg 的物块. 如果 40 kg 的物块与桌面间的摩擦系数是 0.15，求系统的加速度和绳中张力.

答案：1.13 m/s^2，104 N.

13.42 物块 A 质量为 8 kg 静止放在无摩擦的水平面上. 另一质量为 4 kg 的物块 B 被绳系住，如图 13-43 所示. 求物块 B 的加速度和绳中张力. 滑轮无摩擦.

答案：$a = 3.27$ m/s^2 向下，$T = 26.2$ N.

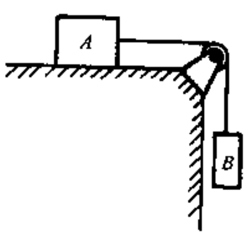


图 13-34

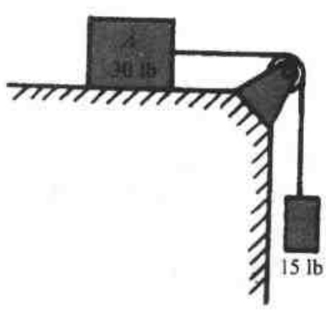


图 13-35

13.43 两物块系统如图 13-35 所示. 物块 A 与平面间的摩擦系数是 0.30. 滑轮无摩擦，求绳中张力.

答案：$T = 13.0$ lb.

13.44 物块 B 静放在物块 A 上，物块 A 沿光滑水平面受有一水平拉力 P. 如果两物块间的摩擦系数为 μ，求 A 与 B 间开始滑动时物块 A 的最大加速度.

答案：$a = \mu g$.

13.45 一只箱子重 20 lb，掉到了正在以速度 30 mi/h 的水平行驶的卡车中的物体上，如果摩擦系数是 0.5，计算卡车驶出多远，箱子才停止滑动？

答案：$s = 120$ ft.

13.46 重为 90 lb 和 80 lb 的两物体用绳系住，并绕过一滑轮组，如图 13-36 所示. 略去绳与滑轮的重，并假设无摩擦，计算绳中张力. 注意跨过滑轮组的绳子长是常量，即

$$x_2 + (x_2 - C) + x_1 = \text{绳长} - 2 \times \text{半圆周长}$$

答案：$T_1 = 52.8$ lb, $T_2 = 106$ lb.

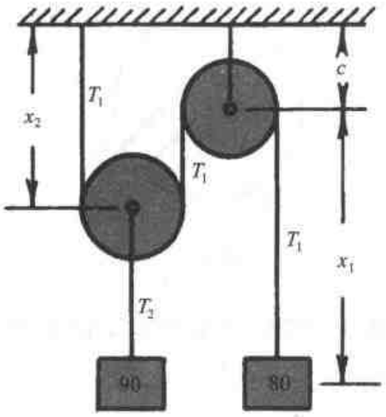


图 13-36

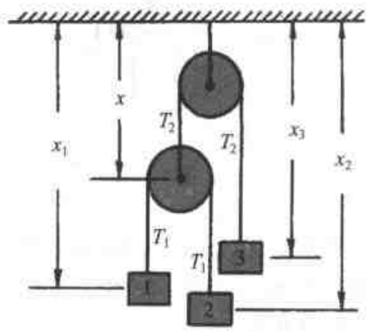


图 13-37

13.47 滑轮重物系统如图 13-37 所示. 设 x_1，x_2 和 x_3 分别表示重为 1 lb、2 lb 和 3 lb 重物的位置. 图示为系统释放后运动到的任一位置. 略去滑轮和绳的质量并假设无摩擦. 求张力 T_1 和 T_2.

答案：$T_1 = 140$ lb, $T_2 = 2.82$ lb.

13.48 见图 13-38. 重物 A 和 B 各重 15 lb 与 55 lb. 设 A 与平面间的摩擦系数是 0.25，B 与平面间的摩擦系数是 0.10. 求它们一起向下滑动时，两物块之间的相互作用力是多少？在隔离体图中，P 是 A 与 B 之间的相互作用力.

答案：$P = 1.35$ lb.

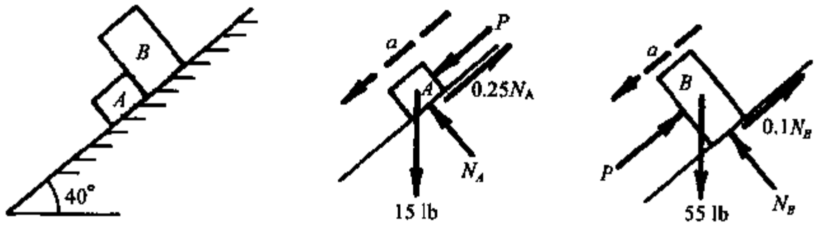


图 13-38

13.49 两立体物块静止在光滑面上，并用如图 13-39 所示的绳连接. 若绳所能承受的最大张力是 0.5 lb，求施加在 8 lb 物块上的最大的力 P 是多少？考虑物块为质点.

答案：$P = 2.35$ lb.

13.50 用达朗贝尔原理，解题 13.39.

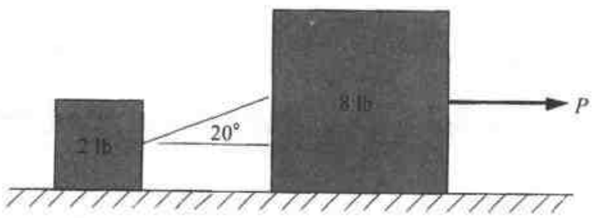


图 13-39

13.51 物块 A 和 B 用一无重柔绳连接，如图 13-40 所示，物块与转动台间的摩擦系数是 0.35. 物块 A 与 B 各重 10 lb 和 20 lb. 如果转动台相对铅直轴转动的角速度是常量，求物块开始滑动时的角速度及绳中张力.

答案：$\omega = 2.6$ rad/s, $T = 9.8$ lb.

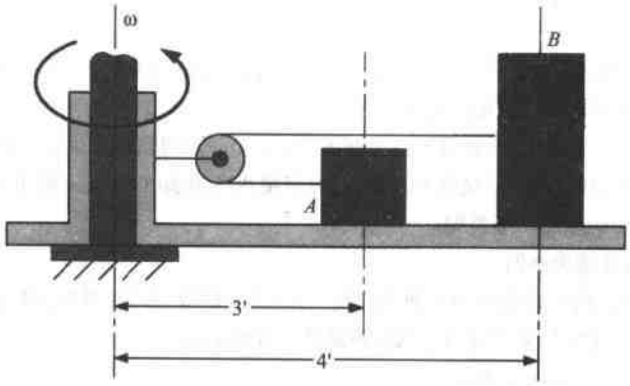


图 13-40

13.52 图 13-41 所示为两静止物块. 有 5 lb 的力作用在上面物块上，且两物块间的摩擦系数是 0.20，地面光滑. (a)求每个物块的加速度；(b)求上面物块的右边与下面物块右边对齐所用的时间.

答案：$a_A = 9.66$ ft/s^2, $a_B = 3.22$ ft/s^2, $t = 0.28$ s.

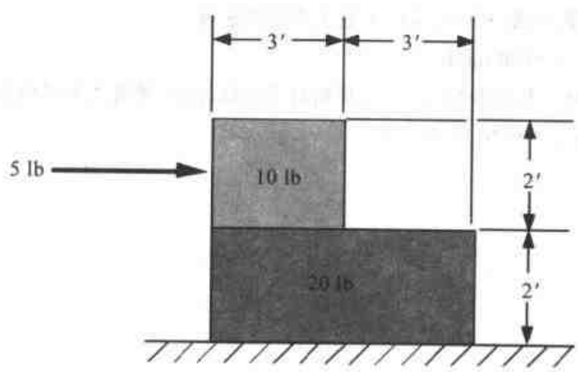


图 13-41

13.53 在题 13-52 中，如将 5 lb 的力改为 1.5 lb，求加速度.

答案：两物块的加速度为 1.61 ft/s.

13.54 在题 13.18 中，质量 M 的物块离平衡位置的距离是 x_0，并且释放的初速度为 v_0. 证明运动方程是 $x = v_0\sqrt{M/K}\sin\sqrt{K/M}t + x_0\cos\sqrt{K/M}t$.

13.55 在地面以上多高的位置，才能使 1.8 m 摆具有 2.8 s 的周期？设地面上的 $g = 9.8$ m/s^2，万有引力随离地心距离的平方变化. 取地球半径 6450 km.

答案：257 km.

13.56 在题 13.21 中，设质量是 14 kg，圈的直径是 12 m. 当质点在圈顶部时，求其受到的铅直反力，(a) $h = 15$ m；(b) $h = 18$ m.

答案：(a) $N = 0$，(b) $N_T = 137$ N.

13.57 链条长 32.2 ft，其中一半伸展在光滑水平桌面上，另一半自由吊挂. 如果链条从静止开始运动，求链条离开桌面的时间. 见图 13-22.

答案：$t = 1.32$ s.

13.58 质量为 1.5 kg 的物体在一介质中下落. 介质阻力是 $R = k\dot{x}$，且 $k = 0.71$(N·s)/m. 求最终的速度.

答案：$x_{max} = 21$ m.

13.59 质量为 m 的质点，以速度 v_0 垂直向上射入一介质中，介质阻力是 kv. 质点成为静止状态所需的时

间.

答案：$t=(m/k)\ln(1+kv_0/mg)$.

13.60 质量为 m 的质点，以速度 v_0 垂直向上射入一介质中，介质阻力是 kv^2. 求质点静止的时间.

答案：$t=\sqrt{m/kg}\arctan v_0\sqrt{k/mg}$.

13.61 火星轨道的远日点离太阳距离是 154.8×10^6 mi，近日点为 128.8×10^6 mi. 用本章的方法证明，火星运行一周的时间大约为 687 天.

13.62 苏联第一号人造地球卫星质量约为 83 kg，并在地面以上 220 和 900 km 之间绕地球的轨道旋转. 地球半径为 6340 km. 证明转一周的时间为 1.5 h.

13.63 可塑球面气球卫星 Echo Ⅰ号，在地面以上 945 至 1049 mi 之间轨道上运行. 证明运行一周时间为 2 h.

13.64 在离地面 300 mi 的地点时，卫星燃料燃尽，此时卫星速度为 30 000 ft/s，其方向垂直于地球半径的延长线. 求卫星将要运动的轨迹类型.

答案：$e=0.434$；轨迹为椭圆.

13.65 从地球向月球飞行的宇宙飞船中有两质量块. 当两质量的吸引力相等时，求飞船的位置. 月球的质量是地球质量的 0.012 倍，从地球到月球的距离是 239 000 mi.

答案：离地球中心 $d=216\ 000$ mi.

13.66 已知地球绕太阳的周期是 365 天，并且其近日点和远日点分别为 91.3×10^6 mi 和 94.4×10^6 mi，求地球轨道的离心率.

答案：$e=0.017$.

13.67 气象卫星位于圆形轨道上，其离地面的高度为 300 mi，在轨道中，其初速度与地球表面平行. 求初速度大小是多少？

答案：$v_0=17\ 000$ mi/h.

13.68 见题 13.64 中的卫星，求最大高度及位于最大高度的速度.

答案：$h=6800$ mi，$v=8100$ mi/h.

13.69 通讯卫星绕地球旋转一周的时间是 1 天，并相对于地球静止. 求通讯卫星的必需高度和速度.

答案：$h=22\ 300$ mi，$v=6870$ mi/h.

第 14 章　刚体平面运动学

14.1　刚体平面运动

刚体运动中，其上任一点到某一固定平面的距离始终保持相等，则刚体作平面运动．在图 14-1 中，设 XY 为固定参考平面，则刚体是由图示的许多平面图形组成的．当平面图形运动时，平面图形上任一点到固定参考平面 XY 的距离 Z 始终是常量．

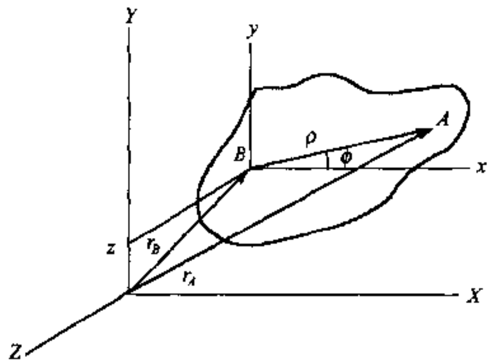


图 14-1

通常选刚体上任意点 B 作为平动坐标系 xyz 的原点．平面图形上一点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_A$ 用位置矢量 $\boldsymbol{r}_B$ 和表示为 $\boldsymbol{\rho}$ 的矢量 $\boldsymbol{BA}$ 的和表示．即

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{\rho}$$

如果对一个刚体而言，若 AB 为常量，则 $\boldsymbol{\rho}$ 对时间的变化率与 12 章的方程(20)中的 ϕ 对时间的变化率相同，则可写成：

$$\boldsymbol{v}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_B + \boldsymbol{\rho} = \dot{\boldsymbol{r}}_B + \rho\omega\boldsymbol{e}_\phi \tag{1}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{r}}_B$ 为极点 B 相对于固定轴 X, Y, Z 轴的线速度

ω 为相对于任何一条平行于 Z 轴的 $\boldsymbol{\rho}$ 的角速度的大小

$\boldsymbol{e}_\phi$ 为与 $\boldsymbol{\rho}$ 垂直的单位矢量，且方向为 ϕ 增加的方向(用右手定则，关于 Z 轴逆时针)，应用 12 章方程(21)得到加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 的解，

$$\boldsymbol{a}_A = \dot{\boldsymbol{v}}_A = \ddot{\boldsymbol{r}}_A = \ddot{\boldsymbol{r}}_B - \rho\omega^2\boldsymbol{e}_r + \rho\alpha\boldsymbol{e}_\phi \tag{2}$$

式中：$\ddot{\boldsymbol{r}}_B$　为 B 点相对于固定轴 X, Y, Z 轴的加速度；

$\boldsymbol{e}_r$　为沿 ρ 的单位矢量，方向从 B 至 A；

$\boldsymbol{e}_\phi$　如上方程(1)所定义的单位矢量；

α　$\boldsymbol{\rho}$ 对任意与 Z 轴平行的直线的角加速度的大小．

方程(1)和(2)的另一种写法为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{k} = \omega\boldsymbol{k} \quad 和 \quad \boldsymbol{\alpha} = \ddot{\phi}\boldsymbol{k} = \dot{\omega}\boldsymbol{k} = \alpha\boldsymbol{k}$$

其中，若从 Z 轴正向看去，是绕 Z 轴逆时针转动的(右手定则)，则 ω 和 α 是正的．

在方程(1)中 $\rho\omega\,\boldsymbol{e}_\phi$ 这一项可以被叉积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ 代替，这二者是完全等同的．(参看题 14.1)，同时，在方程(2)中，加速度分量 $\rho\alpha\,\boldsymbol{e}_\phi$ 和 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\rho}$ 是等价的，$-\rho\omega^2\boldsymbol{e}_r$ 分量和 $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$ 等同的．由这些替换可以得出：

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho} \tag{4}$$

方程(3)(4)亦可写为

$$v_A = v_B + v_{A/B} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{A/B} \tag{6}$$

其中$\boldsymbol{v}_{A/B}$和$\boldsymbol{a}_{A/B}$是A 绕B 旋转时的相对速度和相对加速度.而 B 相对于X, Y, Z 参考系移动.

14.2　平动(平行移动)

平动是 AB 间的连线$\boldsymbol{\rho}$ 不转动的运动.即,当刚体运动时,刚体上的任一条直线总是与其初始位置平行.

14.3　转动

转动是基点 B 固定不动.对刚体而言,在刚体上存在一条通过 B 点且与X, Y, Z 坐标系中Z 轴平行的直线,该直线固定不动.这种运动的特点是方程(1)和(2)或者方程(3)和(4)中的速度v_B 和加速度$\boldsymbol{a}_B$ 等于零.

14.4　转动的瞬时轴

转动的瞬时轴就是在作平面运动的刚体中(或在延展体中)由速度为 0 的点集合成的直线.它垂直于运动平面(与我们系统中的 Z 轴平行),在此瞬时,刚体中所有其他点都绕这条直线转动.在不断的变化的运动中知道这条零速度的线的位置是很重要的.为了求出一个具有常角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的表达式平面图形的瞬心I,以 I 为基点,写出刚体系统中任意两点 A 与C 的速度表达式(参看例 14.2),这样,

$$v_A = \boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$$

$$v_C = \boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C$$

但$\boldsymbol{v}_I = 0$,因为 I 是瞬心,因此,$v_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$, $v_C = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C$.

这些方程说明 $\boldsymbol{\rho}_A$ 是与v_A(I 在$\boldsymbol{\rho}_A$ 上)垂直的,$\boldsymbol{\rho}_C$ 是与v_C(I 在$\boldsymbol{\rho}_C$ 上)垂直的,所以瞬心 I 是与$\boldsymbol{v}_A$, v_C垂直的.

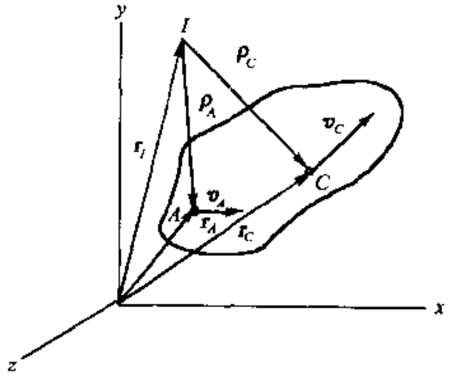


图 14-2

14.5　科氏加速度(科里奥力加速度)

在 14.1 节中,刚体上点是在相对坐标系 xyz 不转动时导出的速度和加速度.图 14-2 所示是作平面运动的平面图形.而极点 B 是平面图形对转动参考系的原点,则点 P 的加速度表示

为

$$a_P = a_{P/\text{path}} + a_M + 2\omega \times v_{/\text{path}} \tag{7}$$

其中　$a_{P/\text{path}}$为 P 点相对于动参考系 xyz 的加速度，由相对于动参考系路径上切向与法向加速度组成

a_M 为动参考系上与动点 P 重合的一点 M 的加速度

$v_{P/\text{path}}$为 P 相对于动参考系 xyz 的速度

ω 为动参考系 xyz 的角速度

$2\omega \times v_{P/\text{path}}$为科氏加速度分量. 其方向是$v_{P/\text{path}}$按 ω 转过直角的方向.

从方程(7)可看出，加速度方程中的第三项由于转动轴的运动而产生的. 速度方程是不变的. 这第三项叫科氏加速度分量. 是以法国工程师、数学家古斯塔夫·科里奥力(1792～1843)命名的. 科氏加速度的产生是由于在转动参考系中 ρ 的变化所决定的，ρ 由 ijk 的矢量确定. 由于 ijk 方向在改变，因而存在导数. 科氏定理证明如下：

平面图形与固定的 XY 平面平行，如图 14-3.

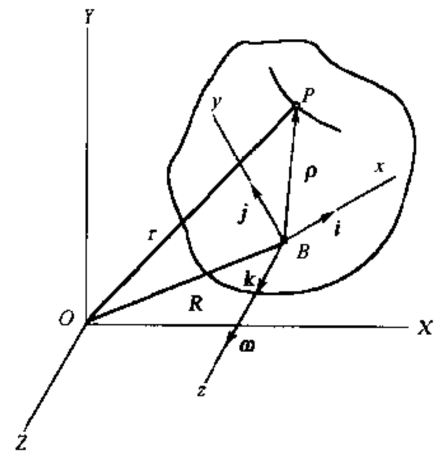


图 14-3

R 是基点 B 的位置矢量.

r 为在平面图形上运动的点 P 的位置矢量.

ρ 为 P 点相对于基点 B 的半径.

ω 为平面图形绕 Z 轴的角速度.

令矢量 i 和 j 为平面图形上的 x，y 轴方向的单位矢量，且有转动角速度 ωk（注，ω 对 z 或 Z 轴是相同的）. 由于 i 和 j 转动单位矢量中有时间的变化. 在 12.6 节中，已经证明了单位矢量对时间的变化率等于该矢量转过直角，并具有与角速度 ω 相同的大小值，即为

$$\dot{i} = \omega j = \omega \times i \quad 和 \quad \dot{j} = -\omega i = \omega \times j$$

可写成

$$r = R + \rho \tag{8}$$

方程(8)两边对时间求导数，得

$$\dot{r} = \dot{R} + \dot{\rho} \tag{9}$$

而矢量 ρ 可写成

$$\rho = xi + yj \tag{10}$$

而其导数

$$\dot{\rho} = \dot{x}i + \dot{y}j + x\dot{i} + x\dot{j} = v_{P/\text{path}} + \omega \times \rho$$

其中，$\dot{x}i + \dot{y}j = v_{P/\text{path}}$，而

$$x\dot{i} + y\dot{j} = x(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}) + y(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}) = \omega \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

这时，方程(9)可以写为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{v}_{P/\text{path}} \tag{11}$$

注意，方程(11)中的右端的前两项是瞬时与 P 点重合的动参考系上的 M 点的绝对速度[见方程(3)]. 方程(11)可写为

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_M + \boldsymbol{v}_{P/\text{path}} \tag{12}$$

为了得到 P 点的加速度，再对方程(9)两边作对时间的导数，此时 $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{r}})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{R}})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$$

即

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} &= \ddot{\boldsymbol{R}} + \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \dot{x}\dot{\boldsymbol{i}} + \dot{y}\dot{\boldsymbol{j}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \\
&= \ddot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{a}_{P/\text{path}} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \qquad (13) \\
\ddot{\boldsymbol{r}} &= \ddot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{a}_{P/\text{path}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{P/\text{path}} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{P/\text{path}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})
\end{aligned}$$

方程(13)右边的 1、4、6 项可以合成为瞬时与 P 点重合的动参考系上 M 点绝对加速度[见方程(4)]. 那么方程(13)式便可以写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}_M + \boldsymbol{a}_{P/\text{path}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{P/\text{path}}$$

该方程与方程(7)等价.

例　　题

在本章中，矢量图如明确地标注了方向，则只需确定它们的大小.

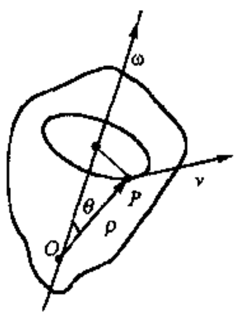


图 14-4

14.1　刚体绕如图 14-4 所示的轴转动，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，求其上任一点 P 的线速度 $\boldsymbol{v}$.

解 ☞ 在转轴上任意选择一参照点 O，P 点相对于 O 点的矢径 $\boldsymbol{\rho}$ 如图示，P 点速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与圆周相切，圆周所在的平面与转轴垂直. 速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小等于圆周半径与角速度的乘积. 圆周的半径等于 $\rho\sin\theta$. 所以 v 的大小是 $\rho\omega\sin\theta$.

根据叉乘定义，$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ 的大小等于 $\rho\omega\sin\theta$，方向与 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 所在平面垂直. 因此我们得出

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

平面图形的平面运动我们在本章一开始就介绍了，$\boldsymbol{\omega}$ 垂直于此平面，并且 $\boldsymbol{\rho}$ 在此平面内，因此 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ 在此平面内且与 $\boldsymbol{\rho}$ 垂直.

14.2　一直径为 500 mm 的飞轮在 20 s 内从静止均匀加速到 300 rpm. 计算从静止状态开始到 2 s 时轮缘上点的速度和加速度.

解 ☞ 这是关于转动方程式应用的例题. 首先计算角加速度

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi(300/60)\text{rad/s} - 0}{20\ \text{s}} = 1.57\ \text{rad/s}^2$$

再计算轮 2s 时的角速度 $\omega_1 = \omega_0 + \alpha t = 0 + (1.57\ \text{rad/s}^2)\ (2\ \text{s}) = 3.14\ \text{rad/s}$

轮缘上点的速度为 $v = r\omega = (0.25\ \text{m})\ (3.14\ \text{rad/s}) = 0.758\ \text{m/s}$

缘上点的法向加速度大小为 $a_n = r\omega^2 = (0.25\ \text{m})\ (3.14\ \text{rad/s})^2 = 2.46\ \text{m/s}^2$

轮缘上点的切向加速度大小为 $a_t = r\alpha = (0.25\ \text{m})\ (1.57\ \text{rad/s}^2) = 0.39\ \text{m/s}^2$

轮缘上点的全加速度大小为 $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(2.46)^2 + (0.39)^2} = 2.49\ \text{m/s}^2$

全加速度矢量与半径夹角为 $\theta = \arccos\frac{a_n}{a} = \arccos\frac{2.46}{2.49} = 0.155\ \text{rad}$ 或 $8.9°$，加速度大小、方向如图 14-5 所示.

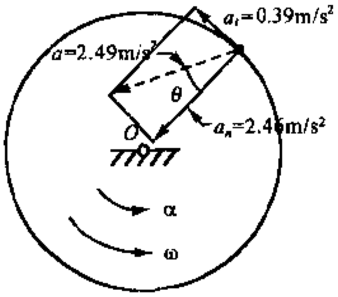


图 14-5

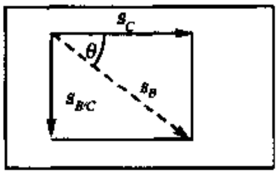


图 14-6

14.3 一小球在光滑汽车上沿与汽车运动垂直方向滚动了 2 m，在小球滚动同时，汽车沿水平直线匀速前进了 2.5 m，求小球的绝对位移？

解 ☞ 球 B 的绝对位移为 s_B，汽车绝对位移为 s_C 其矢量方程是

$$s_B = s_{B/C} + s_C$$

球 B 相对于车 C 的相对位移 $s_{B/C}$ 大小为 2 m，与车 C 的运动方向垂直. 车 C 的绝对位移是 2.5 m，方向与车运动方向相同. 如图 14-6 所示.

球 B 的绝对位移等于两已知矢量的矢量和，其大小等于：

$$|s_B| = \sqrt{(s_{B/C})^2 + (s_C)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2.5)^2} = 3.2\ \text{m}$$

矢量 s_B 与车的运动方向夹角 $\theta = \arctan(s_{B/C}/s_C) = \arctan(2/2.5) = 0.675$ 或 $38.7°$.

14.4 汽车 A 以 20 mi/h 的速度沿直线向西北方向行驶，B 以 70 mi/h 的速度沿直线向西偏南 60°方向前进，见图 14-7(a)，求 A 对 B 的相对速度及 B 对 A 的相对速度？

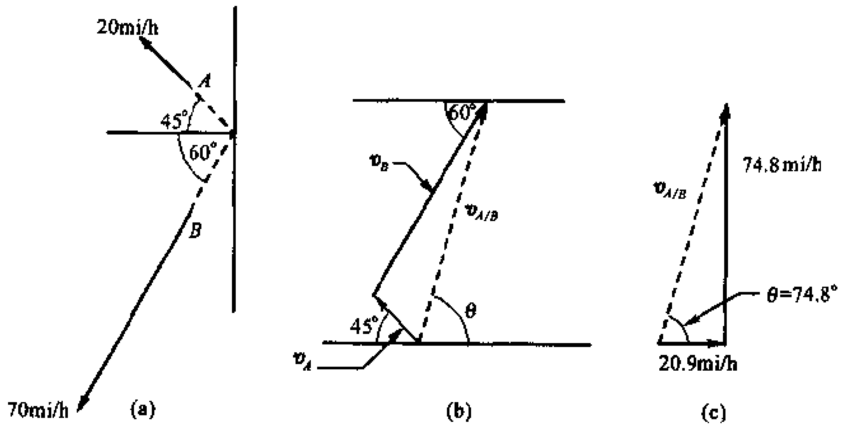


图 14-7

解 ☞ 两者速度关系的矢量方程为

$$v_A = v_{A/B} + v_B$$

等式两边同时减去 v_B，得

$$v_{A/B} = v_A - v_B$$

矢量差可通过 v_B 的负矢量与 v_A 的矢量和得到，如图 14-7(b)所示.

根据下表求出 $v_{A/B}$ 分别沿 x 轴、y 轴方向的分量.

矢 量	x 轴分量	y 轴分量
v_A	-20×0.707	$+20\times0.707$
$-v_B$	$+70\times0.500$	$+70\times0.866$

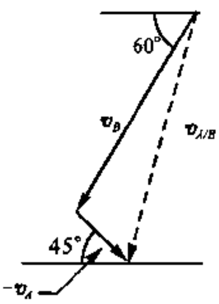


图 14-8

$v_{A/B}$沿x轴分量大小是+20.9 mi/h，沿y轴分量的大小是+74.8 mi/h. 见图 14-7(c). 则有

$$v_{A/B} = \sqrt{(20.9)^2 + (74.8)^2} = 77.7\ \text{mi/h}$$

方向为北偏东 $\theta = \tan^{-1}(74.8/20.9) = 74.4°$.

v_B 相对于v_A 的速度等于$v_B - v_A$ 的矢量差，即

$$v_{B/A} = v_B + v_A$$

图 14-8 表示相减.

根据下表.

矢　量	x 轴分量	y 轴分量
v_B	-70×0.500	-70×0.866
$-v_A$	$+20\times0.707$	-20×0.707

$v_{B/A}$沿x轴分量大小是-20.9 mi/h，沿y轴分量的大小是-74.8 mi/h. 显然$v_{B/A} = -v_{A/B}$.

14.5　飞行员从地域图上确定目的地方位应是 295°，距离为 95 mi 处，此时有速度为 20 mi/h 的南风(从南吹过来)，飞机速度(飞机相对于向北流动的空气速度)为 120 mi/h，欲到达目的方位，求飞机的航向及所用时间.

解　☞ 图 14-9 表明目的方位为与正北顺时针方向夹 295°，风速 20 mi/h，从 O 指向北. 用图解法较容易. 用始于原点 O 向北的有向线段表示风速，以风速矢量箭末为圆心，半径为 120 mi/h 画弧，交目的地方位所在直线于点 C. 由速度矢量三角形可知 $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OW} + \boldsymbol{WC}$，此表明飞机沿真航线的速度(其大小称为对地速度或绝对速度)等于飞机相对空气速度(其大小为飞机速度)及风速的矢量之和.

由图可知，飞机速度 $\boldsymbol{WC}$ 与正北方向夹角为顺时针 286°，即绝对速度 $\boldsymbol{OC}$ 的大小 127 mi/h，飞行时间为 95 mi÷127 mi/h，结果为 45 min.

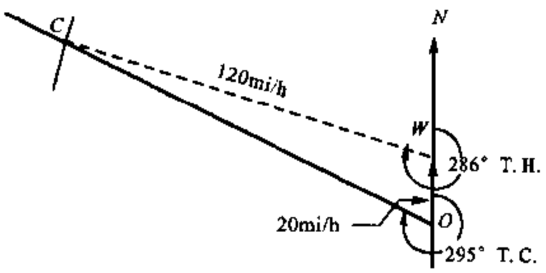


图 14-9

14.6　在修正磁偏差及变动时，飞行员计算出当前实际航向应为偏北 58°，飞行速度为 250 mi/h，然而空管站指出飞机相对地航向为 63°，绝对速度为 295 mi/h，计算风向及其大

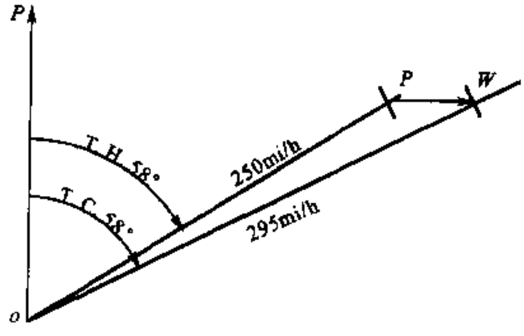


图 14-10

小.

解 ☞ 如图 14-10,画一与正北方向夹角为 58°的线段代表航向,沿该线画比例为 250 mi/h 的线段 $\boldsymbol{OP}$,过 O 点画一与正北方向夹角为 63°的表示绝对速度的方位,以该线取比例为 295 mi/h 的线段 $\boldsymbol{OW}$ 表示绝对速度,有 $\boldsymbol{OW}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PW}$,它们相交如下,绝对速度等于飞机相对空气的速度及空气的速度的矢量之和,或 $\boldsymbol{v}_{PG}=\boldsymbol{v}_{P/A}+\boldsymbol{v}_{A/G}$.

由比例可知,$\boldsymbol{PW}$ 代表西风;速度为 50 mi/h 的西风.

14.7 长为 l 的杆运动时,杆上 A 点速度大小恒定,方向向左,当杆运动到与垂直方向的夹角为 θ(如图 14-11 所示)时,求杆上此时的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 及角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$.

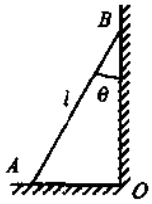


图 14-11

解 ☞ 点 A 绝对速度 $\boldsymbol{v}_A$ 应当被表示成 A 相对与 B 的速度及 B 点速度的矢量和,因为这种型式将引入要求的未知量 $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_{A/B}+\boldsymbol{v}_B$$

下面的表格表明了矢量的已知部分.

矢量	方向	大小
$\boldsymbol{v}_A$	水平	v_A
$\boldsymbol{v}_{A/B}$	垂直于杆	$l\omega$(ω 未知)
$\boldsymbol{v}_B$	竖直	未知

两个量的大小未知,以 $\boldsymbol{v}_A$ 开始作矢量三角形,它是完全已知的.过 $\boldsymbol{v}_A$ 的一个端点作一条直线正交于杆,通过 $\boldsymbol{v}_A$ 的另一端再作一条垂直线使三角形封闭.如图 14-12 所示.

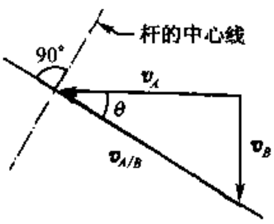


图 14-12

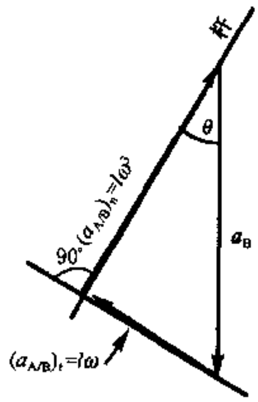


图 14-13

如图,垂直边表示 $\boldsymbol{v}_B$ 和与杆垂直的边表示 $\boldsymbol{v}_{A/B}$,在直角三角形中:$v_{A/B}=v_A/\cos\theta$,且 $v_{A/B}=l\omega$,所以,$\omega=v_{A/B}/l=v_A\cdot l\cos\theta$.

既然 $v_{A/B}$ 指向左边,A 相对于 B 必须顺时针转,即 ω 顺时针.

现在讨论角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$.A 相对于 B 的切向加速度的大小是 $l\alpha$.方程是 $\boldsymbol{a}_A=(\boldsymbol{a}_{A/B})_t+(\boldsymbol{a}_{A/B})_n+\boldsymbol{a}_B$.

下表列出了方程中矢量的方向和大小.

矢量	方向	大小
$\boldsymbol{a}_A$	无	0,因为 v_A = 常量
$(\boldsymbol{a}_{A/B})_t$	⊥杆	$l\alpha$(α 未知)
$(\boldsymbol{a}_{A/B})_n$	沿杆	$l\omega^2$($\omega=v_A/l\cos\theta$)
$\boldsymbol{a}_B$	竖直	未知

在矢量方程右边的 3 个矢量的数量和一定为零. 在图 14-13 中, 从已知量$(\boldsymbol{a}_{A/B})_n$开始通过其端点画两条线, 一条垂直于杆, 另一条竖直, 即与$(\boldsymbol{a}_{A/B})_n$成夹角θ. 注意到加速度$(\boldsymbol{a}_{A/B})_n$一定由 A 指向 B.

在直角三角形中, $a_{A/B} = l\alpha = l\omega^2\tan\theta$, 则 $\alpha = \omega^2\tan\theta = (v_A^2\tan\theta)/(l\cos\theta)^2$, $(a_{A/B})_t$ 是切向分量, 表明 A 绕 B 顺时针加速.

14.8 长 l 的梯子与竖直墙成 θ 角, 如图 14-14(a)示, 梯子靠地端点以匀速 v_A 向右运动, 试用 v_A, l, θ 表示 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$.

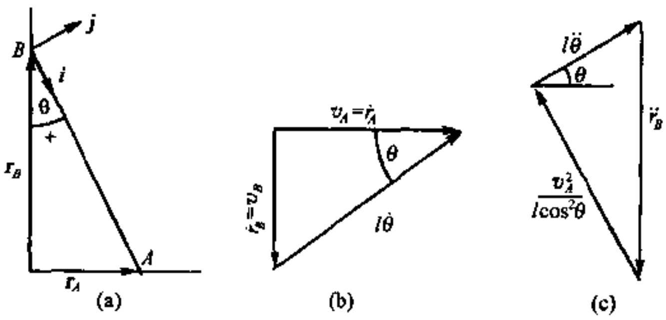


图 14-14

解 ☞ 令 i 和 j 分别表示沿梯子和垂直梯子的单位矢量, 设其随梯子运动, 矢量 $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B + l\boldsymbol{i}$, 对时间求导, 有 $\dot{\boldsymbol{r}}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_B + l\dot{\boldsymbol{i}}$.

在上面等式中, $\dot{\boldsymbol{r}}_A$ 是v_A, 是完全已知的. 同样, $\dot{\boldsymbol{i}}$ 等于 $\dot{\theta}\boldsymbol{j}$(单位矢量对时间的导数, 已在第 12 章讲过), $\dot{\boldsymbol{r}}_B$ 只能竖直. 图 14-14(b)表示了这种关系, 那么,

$$\cos\theta = \frac{v_A}{l\dot{\theta}} \quad 或 \quad \dot{\theta} = \frac{v_A}{l\cos\theta} \tag{1}$$

因为 $l\dot{\theta}\boldsymbol{j}$ 沿 $\boldsymbol{j}$ 正方向, 所以 $\dot{\theta}$ 是正的(杆逆时针运动).
等式(1)两边对时间求导得

$$\ddot{\theta} = \frac{v_A^2\tan\theta}{l^2\cos^2\theta} \tag{2}$$

$\ddot{\theta}$ 可由式子 $\dot{\boldsymbol{r}}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_B + l\dot{\theta}\boldsymbol{j}$ 的微分得到, 即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_A = \ddot{\boldsymbol{r}}_B + l\ddot{\theta}\boldsymbol{j} - l\dot{\theta}^2\boldsymbol{i} \tag{3}$$

在(3)中, $\ddot{\boldsymbol{r}}_A$ 为零, 因为 $\dot{\boldsymbol{r}}_A$ 是常量, $\ddot{\boldsymbol{r}}_B$ 是垂直的, $\boldsymbol{j}$ 方向分量(大小为 $l\ddot{\theta}$)是正的, $\boldsymbol{i}$ 方向分量(大小为 $l\dot{\theta}^2 = v_A^2/(l\cos^2\theta)$)是负的. 图 14-14(c)表示这些关系. 则

$$\tan\theta = \frac{l\ddot{\theta}}{v_A^2/(l\cos^2\theta)} \quad 或 \quad \ddot{\theta} = \frac{v_A^2\tan\theta}{l^2\cos^2\theta}$$

与式(2)一样. 当 $l\ddot{\theta}\boldsymbol{j}$ 是沿 $\boldsymbol{j}$ 的正方向, $\ddot{\theta}$ 是正的(梯子逆时针加速).

注意: $\dot{\theta}$ 在式(1)中与 14.7 题的 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小的问题相同, 在式(2)中, $\ddot{\theta}$ 相当于 14.7 题 $\boldsymbol{\alpha}$ 的大小.

14.9 一个长 2.5 m 的杆沿斜面下滑, 如图 14-15 所示, $v_A = 4$ m/s 向左, $a_A = 5$ m/s^2 向右, 求当 $\theta = 30°$, 杆角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度矢量 $\boldsymbol{\alpha}$.

解 ☞ 根据例题 14.7, 有

$$v_A = v_{A/B} + v_B$$

已知量如表所示.

矢量	方向	大小
v_A	水平	4 m/s 向左
$v_{A/B}$	与杆垂直	$l\omega$(ω 未知)
v_B	沿着 45°线	未知

根据上面的矢量方程画矢量三角形(如图 14-16).

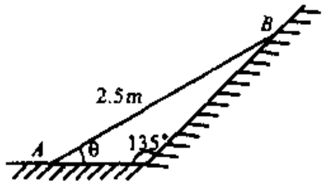


图 14-15

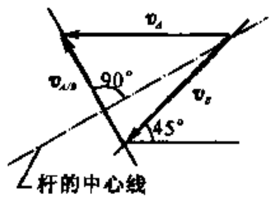


图 14-16

测量得到, $v_{A/B}=2.93$ m/s, 则 $\omega=v_{A/B}/l=1.17$ rad/s, ω 是顺时针.

为了确定 α, 利用矢量式 $a_A=(a_{A/B})_t+(a_{A/B})_n+a_B$ 和下面表格.

矢量	方向	大小
a_A	水平	5 m/s² 向右
$(a_{A/B})_t$	与杆垂直	$l\alpha$(α 未知)
$(a_{A/B})_n$	沿杆从 A 到 B	$l\omega^2=2.5(1.17)^2=3.42$ m/s²
a_B	沿 45°方向	未知

根据上表画矢量多边形. 首先画 a_A(如图 14-17), 然后通过此矢量的尾端画矢量 $(a_{A/B})_n$, 再通过矢量 a_A 头端画 45°线, 在 $(a_{A/B})_n$ 头端画一线垂直于杆.

$(a_{A/B})_t$ 的值是 2.75 m/s². 则 $\alpha=\dfrac{2.75}{2.5}=1.1$ rad/s², α 为逆时针.

注意:题 14.9 的计算机求解见附录 C.

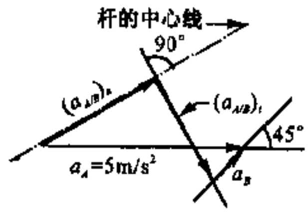


图 14-17

14.10　如图 14-18 所示的曲柄滑块机构中, 曲柄以固定的速度 120 rpm 旋转, 连杆长 24 in, 曲柄长 4 in, 求当角度为 30°时, 滑块 P 的绝对速度.

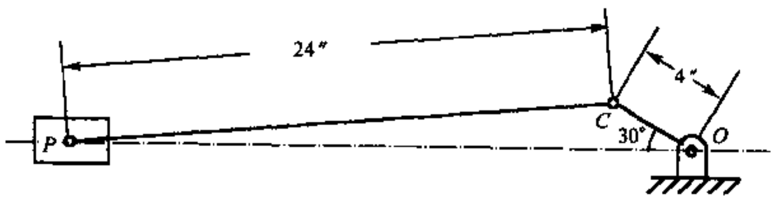


图 14-18

解　曲柄销子 C 的转速是 120 rpm. 即 $\omega=2\pi(120/60)=4\pi$ rad/s.

C 的线速度为 $v=r\omega=(4/12)(4\pi)=41.9$ ft/s.

图 14-19 表明, 该速度与曲柄垂直. 下一步再确定沿连杆 PC 的速度分量.

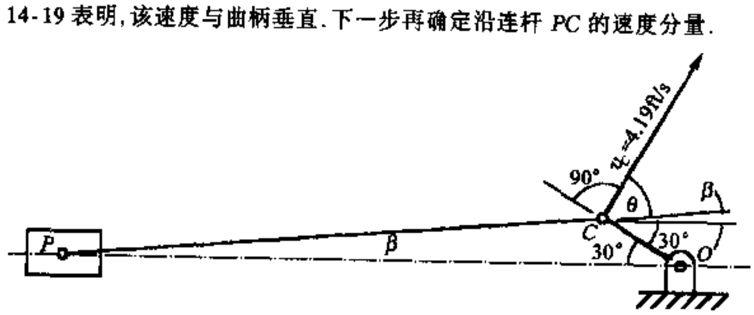


图 14-19

首先确定角度 θ. 示意图表明 $\theta = 90° - 30° - \beta$. 角度 β 可由正弦定理求出，在△PCO 中：

$$\frac{4}{\sin\beta} = \frac{24}{\sin 30°}$$

解得 $\beta = 4.8°$，并且 $\theta = 60° - 4.8° = 55.2°$. 所以 C 点沿连杆方向的速度分量是 $4.19\cos 55.2° = 2.39$ ft/s.

连杆上的所有点在连杆方向必须有同样的速度，不然连杆将可能被压或被拉. 所以连杆上的 P 点沿连杆的速度分量是 2.39 ft/s. 而它的合速度沿 OP，所以

$$v_P = \frac{2.39\ \text{ft/s}}{\cos\beta} = \frac{2.39\ \text{ft/s}}{0.9965} = 2.40\ \text{ft/s}$$

14.11　在题 14.10 中，利用作图法求滑块的速度.

解　☞ 利用矢量式 $v_P = v_{P/C} + v_C$.

在图 14-19 中，v_C 在 C 点垂直于曲柄，大小为 4.19 ft/s.

P 点的绝对速度方向沿着滑块的运动轨迹方向(图中水平方向). P 点相对于 C 点的速度 $v_{P/C}$ 方向垂直于 P, C 两点的连线(即连杆). 此题的矢量式中有 3 个矢量，每个矢量都有大小和方向. 如果 6 个量中 4 个量已知(方向和大小作为每个矢量的两个量)，则另外两个量可求.

速度	方向	大小
v_P	水平	?
$v_{P/C}$	⊥杆	?
v_C	⊥曲柄	4.19 ft/s

上表说明，因为 6 个量中 4 个已知，则 v_P 的大小可求.

先画大小，方向均已知的速度矢量 v_C，然后通过 v_C 的一端画一条水平线；通过另一端画一条垂直于连杆的直线. 结果与端点的选择无关. 见图 14-20.

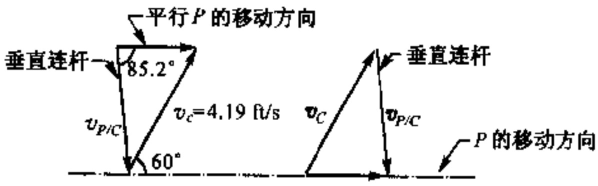


图 14-20

量得 v_P 等于 2.40 ft/s.

14.12　在题 14.10 中，利用瞬心求滑块的速度.

解　☞ 连杆的速度瞬心是相对于整个连杆而言的. 在某一瞬时，连杆上的每个点都绕某一点转动，这点被称为速度瞬心. C点即是曲柄上的点，也是连杆上的点，它的速度垂直于曲柄. 当然连杆上的C点与曲柄上的C点具有相同的速度，因此杆的速度瞬心就在曲柄的延长线上. (在旋转结构中一点的速度垂直于该点与瞬心的连线)

同样，P 点既在滑块上又在连杆上. 作为滑块上一点它的速度是水平的，所以连杆上P点它的速度也沿水平方向. 因此，杆的瞬心在垂直于滑块运动轨迹的直线上，即过点P的垂直线上.

所以速度瞬心就是过点 P 的垂线和曲柄的延长线的交点. 如图 14-21.

因为点 I 是连杆上所有点的旋转中心，所以 P 点的线速度方向就垂直于该点与 I 点的连线，速度大小就与该点到 I 点的距离成正比，I 即旋转中心.

将上述讨论用图解法表示得：以半径 IC 作圆弧，使之同 I 与所求速度点 P 的连线相交. $IC' = IC$. 在 C' 点标出垂直于 IC' 的矢量，大小为 4.19 ft/s，画一条从 I 连到 v_C 末端的线. 该线与过 P 点且垂直于 IC' 的线的交点，即为 P 点的速度矢量，大小是 2.40 ft/s.

14.13　求题 14.11 中连杆的角速度.

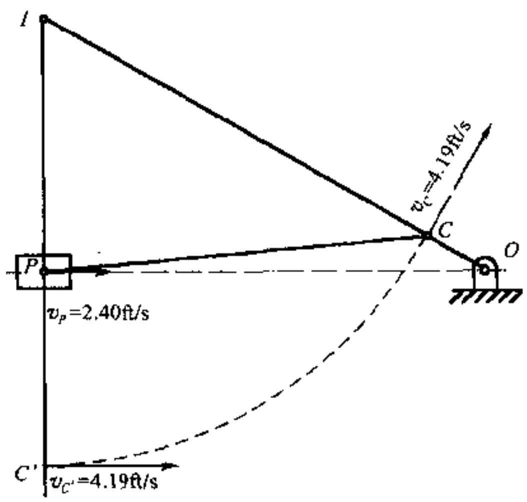


图 14-21

解 ☞ 直接由题 14.11 中图测量得 $v_{P/C}=3.68$ ft/s.

则杆的角速度等于 $v_{P/C}$除以杆长.即

$$\omega = \frac{v_{P/C}}{l} = \frac{3.68\ \text{ft/s}}{2\ \text{ft}} = 1.84\ \text{rad/s}$$

ω 方向为逆时针.

14.14 在题 14.10 中,求出曲柄滑块机构中滑块的加速度.

解 ☞ 因为曲柄的角速度是常量, C 点加速度只由法向加速度分量确定,指向 O 点,大小是 $r\omega^2$.

$$(a_C)_n = r\omega^2 = \frac{4}{12}(4\pi)^2 = 52.6\ \text{ft/s}^2$$

P 点的加速度,方向水平,由下面的矢量方程决定:

$$(\boldsymbol{a}_P) = (\boldsymbol{a}_{P/C}) + (\boldsymbol{a}_C)$$

最好把 P 点相对于 C 点的加速度 $\boldsymbol{a}_{P/C}$ 分解成垂直于杆的切向分量与平行于杆的法向分量.方程现在变为

$$(\boldsymbol{a}_P) = (\boldsymbol{a}_{P/C})_n + (\boldsymbol{a}_{P/C})_t + (\boldsymbol{a}_C)$$

其中 n 表示法向分量, t 表示切向.方程包含 8 个元素,如果未知数不超过 2 个,那么方程是可解的.把元素制成表格如下:

矢量	方向	大小
$\boldsymbol{a}_C$	沿曲柄方向	52.6 ft/s^2
$(\boldsymbol{a}_{P/C})_t$	⊥连接杆	?
$(\boldsymbol{a}_{P/C})_n$	沿连杆方向	杆长×$(\omega_{杆})^2$
$\boldsymbol{a}_P$	水平	?

注意法向分量$(a_{P/C})_t$ 的大小是

$$(a_{P/C})_n = (2\ \text{ft})\ (1.84\ \text{rad/s})^2 = 66.7\ \text{ft/s}^2$$

矢量图由已知矢量(大小、方向均已知)$\boldsymbol{a}_C$ 与$(\boldsymbol{a}_{P/C})_n$ 开始画(如图 14-22).在 $\boldsymbol{a}_C$ 始端作一水平线,在$(\boldsymbol{a}_{P/C})_n$ 箭头端作一垂直于连杆的直线,两线交于 M 点,它决定了 $\boldsymbol{a}_P$ 与$(\boldsymbol{a}_{P/C})_t$ 的大小.通过测量, $a_P=50.5$ ft/s^2.

14.15 BC 的角速度如图 14-23 中 4 连杆机构所示,求图示位置 AD 角速度与 D 点的线速度.

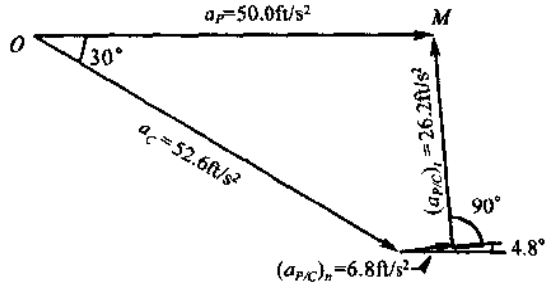


图 14-22

解 ☞ BC 上 C 点的速度垂直于 BC，且大小为：

$$v_C = BC \times \omega_{BC} = (0.15\ \mathrm{m})\ (10\ \mathrm{rad/s}) = 1.5\ \mathrm{m/s}$$

为求 D 点速度，先由图 14-23 确定其角度.

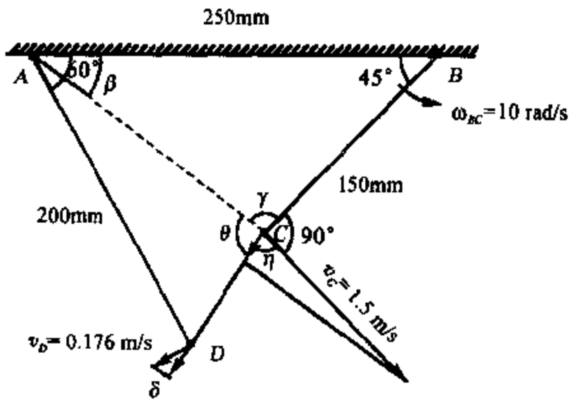


图 14-23

由余弦定理：

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 - 2AB \times BC\cos 45^\circ} \\ &= \sqrt{(250)^2 + (150)^2 - 2 \times 250 \times 150 \times \cos 45^\circ} \\ &= 179\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

由正弦定理：

$$\frac{BC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin\gamma}$$

所以

$$\sin\beta = \frac{BC\ \sin 45^\circ}{AC} = \frac{150\ \sin 45^\circ}{179}, \qquad \beta = 36.3^\circ$$

$$\sin\gamma = \frac{AB\ \sin 45^\circ}{AC} = \frac{250\ \sin 45^\circ}{179}, \qquad \gamma = 99.0^\circ$$

在三角形 ADC 中，$\angle DAC = 60^\circ - 36.3^\circ = 23.7^\circ$，对$\triangle ADC$，应用余弦定理有

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(AD)^2 + (AC)^2 - 2AD \times AC\cos 23.7^\circ} \\ &= \sqrt{200^2 + 179^2 - 2 \times 200 \times 179\cos 23.7^\circ} \\ &= 80.5\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

再由正弦定理：

$$\frac{CD}{\sin 23.7^\circ} = \frac{AD}{\sin\theta} = \frac{AC}{\sin D}$$

$$\frac{80.5}{\sin 23.7^\circ} = \frac{200}{\sin\theta} = \frac{179}{\sin D}$$

即

解此方程得：$\theta=87.0°$，$\angle D=63.4°$.

显然，CD 与速度 v_C 的夹角为 η

$$\eta=360°-(90°+\theta+\gamma)=360°-(90.0°+87.0°+99.0°)=84.0°$$

沿杆 CD 速度分量为：$1.5\cos 84.0°\approx 0.157$ m/s，注意它的速度分量方向是从 C 指向 D，这也是 D 沿 CD 方向的速度分量。设 D 点速度与 CD 杆的夹角为 δ，则

$$\delta=180°-(90°+63.4°)=26.6°.$$

D 点的速度大小是 $v_D=0.157/\cos26.26°=0.176$ m/s.

注意，这个速度表明，AD 杆的转动方向是顺时针，而 BC 杆逆时针方向.

AD 杆的角速度为：$\omega_{AD}=v_D/AD=\dfrac{0.176\ \text{m/s}}{0.2\ \text{m}}=0.88$ rad/s 顺时针.

14.16 用图解法求解题 14-15. 见图 14-24.

解 ☞ 矢量方程是：$v_D=v_{D/C}+v_C$.

列出 6 个元素.

矢量	方向	大小
v_D	$\perp AD$	未知
$v_{D/C}$	$\perp DC$	未知
v_C	$\perp BC$	1.5 m/s

因为只有 v_D, $v_{D/C}$ 的大小未知，所以本题可解. 由于 v_C 的大小、方向均已知，因此先画矢量 v_C. 过此矢量的两个端点，分别画 v_D 和 $v_{D/C}$ 的平行线，并使之相交，这样，v_D 矢量确定了，由比例关系测出：$v_D=0.176$ m/s

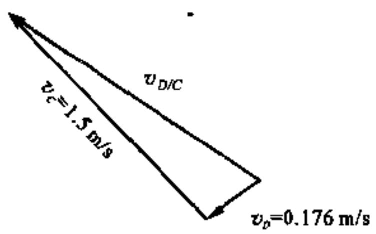


图 14-24

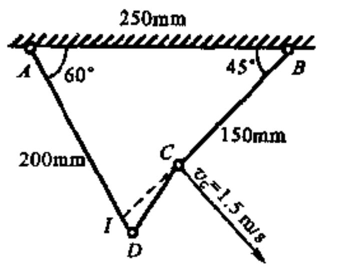


图 14-25

14.17 用速度瞬心法解 14.15 题.

解 ☞ 点 C, D 都在 CD 杆上. CD 杆的瞬心是图中 C 点和 D 点绝对速度的垂线的交点. 即 D 点的速度垂直于 AD, C 点的速度垂直于 BC, 因此，瞬心 I 就是 BC 取延长线与 AD 的交点，如图 14-25 所示.

C 点的速度垂直于 BC，大小为 1.5 m/s，在图 14-26 中，以 IC 为半径画弧，交 AD 点与 C' 点.

在 C' 点作一垂直于 AD 大小为 1.5 m/s 矢量，画标准线 IE，在 D 点作 AD 垂线，即为 D 点速度矢量，大小等于 0.176 m/s.

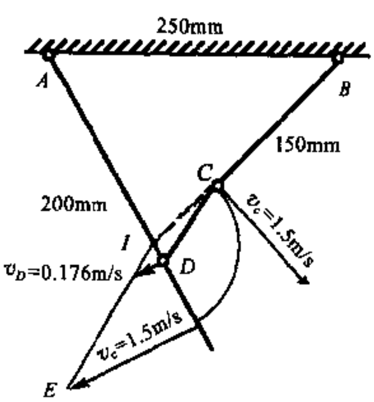


图 14-26

14.18 如图 14-27 所示为四连杆机构，杆长已给出(或由计算得出). 如果曲柄 AB 以3 rad/s角速度逆时针旋转，求 B 点 C 点线速度及

BC，DC 杆的角速度.

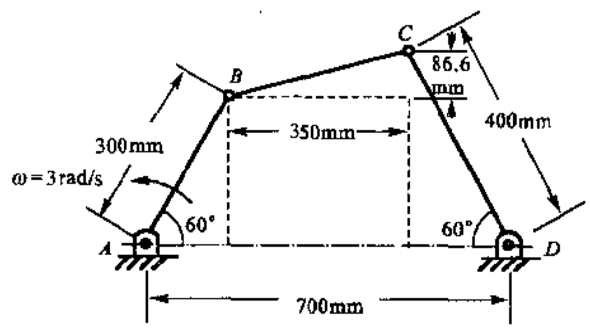


图 14-27

解 ☞ 因为点 B 在曲柄 AB 上，它的速度为

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \boldsymbol{\rho}_{AB}$$

或

$$3\boldsymbol{k} \times (300 \times 0.5\boldsymbol{i} + 300 \times 0.866\boldsymbol{j}) = 450\boldsymbol{j} - 779\boldsymbol{i} \text{ mm/s}$$

注意：v_B 的大小可以直接得到 $v_B = r\omega = 300 \times 3 = 900$ mm/s. 因为这个速度垂直于曲柄，方向为左上方，它可以被写成

$$900(-\cos30°\boldsymbol{i} + \sin30°\boldsymbol{j}) = 450\boldsymbol{j} - 779\boldsymbol{i} \text{ mm/s}$$

上述结果与用矢量的叉乘所得结果相同.

求 BC 的运动，根据

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{C/B} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \boldsymbol{\rho}_{BC} \tag{1}$$

用公式(1)，假定 DC 作逆时针转动，所以点 C 向左下方运动，其中有一个 30°角，有

$$\boldsymbol{v}_C = -v_C\cos30°\boldsymbol{i} - v_C\sin30°\boldsymbol{j} = -0.866\, v_C\boldsymbol{i} - 0.5\, v_C\boldsymbol{j}$$

下一步，假定 BC 也逆时针旋转；因此，我们得到

$$\boldsymbol{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\boldsymbol{k}$$

又注意到

$$\boldsymbol{\rho}_{BC} = 350\boldsymbol{i} + 86.6\boldsymbol{j}$$

把这些代入等式(1)中得到

$$-0.866\, v_C\boldsymbol{i} - 0.5\, v_C\boldsymbol{j} = -779\boldsymbol{i} + 450\boldsymbol{j} + \omega_{BC}\boldsymbol{k} \times (350\boldsymbol{i} + 86.6\boldsymbol{j})$$

即

$$-0.866\, v_C\boldsymbol{i} - 0.5\, v_C\boldsymbol{j} = -779\boldsymbol{i} + 450\boldsymbol{j} + 350\omega_{BC}\boldsymbol{j} - 86.6\omega_{BC}\boldsymbol{i} \tag{2}$$

令方程两边 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的系数分别相等，得

$$-0.866 v_C = -779 - 86.6\,\omega_{BC} \tag{3}$$

$$-0.5\, v_C = 450 + 350\,\omega_{BC} \tag{4}$$

用 350/86.6 乘(3)式并与(4)式相加. 求出 $v_C = 675$ mm/s，继而可求出 ω_{BC} 为 -2.25 rad/s. 这说明 BC 作顺时针旋转，而不是最初所假设的逆时针.

为了求出 ω_{DC}，我们注意到

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{DC} \times \boldsymbol{\rho}_{DC} = \omega_{DC}\boldsymbol{k} \times (-200\boldsymbol{i} + 346.4\boldsymbol{j})$$
$$= -200\omega_{DC}\boldsymbol{j} - 346.4\omega_{DC}\boldsymbol{i}$$

或

$$\boldsymbol{v}_C = -675 \times 0.866\boldsymbol{i} - 675 \times 0.5\boldsymbol{j} \tag{5}$$

使两式中的 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的系数分别相等即可求出 $\omega_{BC} = +1.69$ rad/s(假设逆时针).

注意：下面用另一种方法来解此题，它包含使用正弦定理去解决(1)式中速度关系，得

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{C/B} + \boldsymbol{v}_B$$

我们知道，v_B 以 900 mm/s 的大小、方向是指向与水平成 30°角的左上方，也知道 v_C 速度大小

是400 mm/s,在第二种解法中含有未知量 ω_{DC}.这样,v_C 应沿与水平方向成30°角的直线,但不知道它的指向.另一方面,我们能确定 $v_{C/B}$ 垂直于 BC,大小等于 ω_{BC} 与 BC 长度的乘积,BC 等于 $\sqrt{(350)^2+(86.6)^2}=361$ mm.C 对 B 的速度(因为它垂直于 BC),与垂直线的夹角已知,即 $\theta=\arctan(86.6/350)=13.9°$.

图14-28(a)中表示的 v_B,为已知量,将其画出,即从任意点 O 到点 R,长度为900 mm/s与水平夹30°角.从 R 点画一条直线,使之与铅垂线成13.9°角,然后从 O 点画直线且与水平夹30°角.这两条线交于点 S.

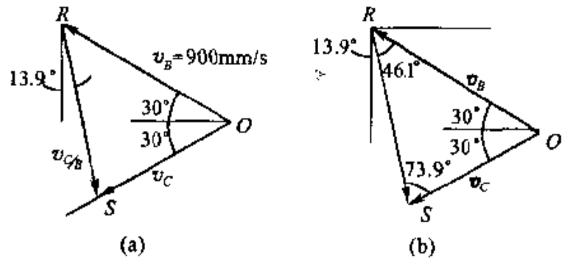


图14-28

为使正弦定理易于应用,将图改画为14-28(b)所示,在图14-28(b)中我们看到,

$$\frac{v_{C/B}}{\sin 60°}=\frac{v_C}{\sin 46.1°}=\frac{900}{\sin 73.9°}$$

由此得到 $v_C=675$ mm/s 并导出 $\omega_{DC}=1.69$ rad/s 顺时针.同样,$v_{C/B}=812$ mm/s,导出 $\omega_{BC}=2.25$ rad/s 顺时针.

14.19 在题14.18中,确定点 B 和点 C 的线加速度与 BC 和 DC 的角加速度.

解 机构如图14-29所示,图中标出已知的一些加速度分量和一些只知方向的分量,BC 上点 C 的加速度可表示为

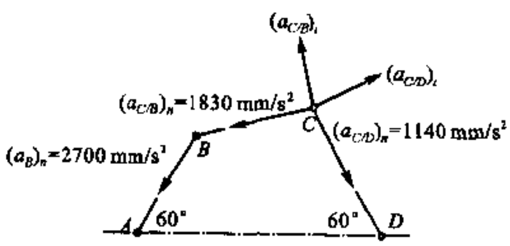


图14-29

$$\boldsymbol{a}_C=(\boldsymbol{a}_{C/B})_t+(\boldsymbol{a}_{C/B})_n+\boldsymbol{a}_B$$

注意:$\boldsymbol{a}_B$ 仅有一个法向分量,如果存在 α_{AB},则方程中应加上切向分量.

C 也是 DC 上一点,它的加速度可写为 $\boldsymbol{a}_C=(\boldsymbol{a}_{C/D})_t+(\boldsymbol{a}_{C/D})_n$.则有

$$(\boldsymbol{a}_{C/D})_t+(\boldsymbol{a}_{C/D})_n=(\boldsymbol{a}_{C/B})_t+(\boldsymbol{a}_{C/B})_n+\boldsymbol{a}_B \tag{1}$$

(1)等式中3项完全已知.它们是法向的加速度分量,因为在题14-18所有角速度都已求出.

为求 B 点法向加速度,可以用14.1节的等式(4)或 $\boldsymbol{\omega}_{AB}\times\boldsymbol{\omega}_{AB}\times\boldsymbol{\rho}_{AB}$ 或用 $\boldsymbol{AB}\times(\boldsymbol{\omega}_{AB})^2$,已知 B 的加速度为2700 mm/s²,由 B 指向 A.

同样地,

$(\boldsymbol{a}_{C/B})_n$ 从 C 指向 B,大小为 $BC\times(\omega_{BC})^2=361(2.25)^2=1830$ mm/s²;

$(\boldsymbol{a}_{C/D})_n$ 从 C 指向 D,大小为 $DC\times(\omega_{DC})^2=400(1.69)^2=1140$ mm/s²;

$(\boldsymbol{a}_{C/B})_t$ 垂直于 BC,假设方向指左上.正值表示 α_{BC} 为逆时针方向;

$(\boldsymbol{a}_{C/D})_t$ 垂直于 DC,假设方向指右上.正值表示 α_{DC} 为顺时针方向.

这5个矢量表示为

$\boldsymbol{a}_B = 2700(-\cos60°\boldsymbol{i} - \sin60°\boldsymbol{j}) = -1350\boldsymbol{i} - 2340\boldsymbol{j}$

$(\boldsymbol{a}_{C/D})_n = 1140(\cos60°\boldsymbol{i} - \sin60°\boldsymbol{j}) = 570\boldsymbol{i} - 987\boldsymbol{j}$

$(\boldsymbol{a}_{C/B})_n = 1830(-\cos13.9°\boldsymbol{i} - \sin13.9°\boldsymbol{j}) = -1780\boldsymbol{i} - 440\boldsymbol{j}$

$(\boldsymbol{a}_{C/D})_t = 400\alpha_{DC}(\cos30°\boldsymbol{i} + \sin30°\boldsymbol{j}) = 346\alpha_{DC}\boldsymbol{i} + 200\alpha_{DC}\boldsymbol{j}$

$(\boldsymbol{a}_{C/B})_t = 361\alpha_{BC}(-\sin13.9°\boldsymbol{i} + \cos13.9°\boldsymbol{j}) = -86.7\alpha_{BC}\boldsymbol{i} + 350\alpha_{BC}\boldsymbol{j}$

等式(1)化为

$$364\alpha_{DC}\boldsymbol{i} + 200\alpha_{DC}\boldsymbol{j} + 570\boldsymbol{i} - 987\boldsymbol{j}$$
$$= -86.7\alpha_{BC}\boldsymbol{i} + 350\alpha_{BC}\boldsymbol{j} - 1780\boldsymbol{i} - 440\boldsymbol{j} - 1350\boldsymbol{i} - 2340\boldsymbol{j} \tag{2}$$

在方程(2)中,令 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 系数分别相等,有

$$346\alpha_{DC} + 570 = -86.7\alpha_{BC} - 1780 - 1350 \tag{3}$$

$$200\alpha_{DC} - 987 = 350\alpha_{BC} - 440 - 2340 \tag{4}$$

化简为

$$346\alpha_{DC} + 86.7\alpha_{BC} = -3700 \tag{3'}$$

$$200\alpha_{DC} - 350\alpha_{BC} = -1790 \tag{4'}$$

则　α_{DC}大小为 10.5 rad/s^2,符号为负,逆时针方向(与假设方向相反);

α_{BC}大小为 0.87 rad/s^2,符号为负,顺时针方向(与假设方向相反).

14.20 如图 14-30 中,一个直径 3 m 的轮子在水平面内向右滚动,角速度为 8 rad/s 顺时针,角加速度 4 rad/s^2 逆时针.后者只表明轮子角速度在减小.求轮子顶点 B 点的线速度和加速度.

解 ☞ 绘制如图 14-31 的图.为了方便,取中心 O 为相对运动的基点.

首先应将滚动轮中心的速度和加速度分别用已知 ω 和 α 及从中心到轮滚动面的距离(1.5 m)表示.

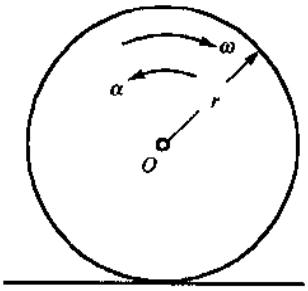


图 14-30

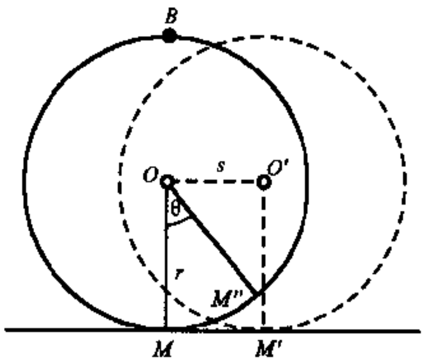


图 14-31

在图 14-31 中,O 移动了 s 到 O'.由于是滚动,则在轮上的 MM''接触上了水平表面的 MM',因此弧 MM''等于 MM',即 $r\theta = OO'$或 s.

所以,$s = r\theta$,其中 s 是中心 O 水平位移的大小,r 是轮的半径,θ 是轮转过的角位移的大小.

微分得出:

$$v_O = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega \quad 和 \quad a_O - r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha$$

将上式,用于求解本题,有

$$v_O = (1.5\ \mathrm{m})\ (8\ \mathrm{rad/s}) = 12\ \mathrm{m/s}$$

$$a_O = (1.5\ \mathrm{m})\ (4\ \mathrm{rad/s}) = 6\ \mathrm{m/s^2}$$

$\boldsymbol{v}_O$ 的方向向右,$\boldsymbol{a}_O$ 方向向左.

速度的矢量方程式是

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_{B/O} + \boldsymbol{v}_O$$

B 点相对于 O 的速度垂直与半径 OB，并指向右(因为 OB 是顺时针方向)，它的大小是

$$v_{B/O} = OB \times \omega = (1.5\ \text{m})(8\ \text{rad/s}) = 12\ \text{m/s}$$

绝对速度 $\boldsymbol{v}_B$ 是由 $\boldsymbol{v}_{B/O}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 两分量组成，每个都是水平向右且大小为12 m/s，因此，$\boldsymbol{v}_B$ 大小是 24 m/s 且方向水平向右.

要确定绝对加速度 $\boldsymbol{a}_B$，运用矢量方程式：$\boldsymbol{a}_B = (\boldsymbol{a}_{B/O})_t + (\boldsymbol{a}_{B/O})_n + \boldsymbol{a}_O$

相对加速度 $(\boldsymbol{a}_{B/O})_t$ 方向水平向左(即 OB 角加速度为逆时针)，它的大小等于 OB 乘以角加速度 α 的大小.

$$(a_{B/O})_t = (1.5\ \text{m})\ (4\ \text{rad/s}^2) = 6\ \text{m/s}^2 \quad (\text{方向向左})$$

加速度 $(\boldsymbol{a}_{B/O})_n$ 指向 O，在此瞬时认为是等于 OB 大小乘以角加速度 ω 的平方：

$$(a_{B/O})_n = (1.5\ \text{m})\ (8\ \text{rad/s}^2) = 96\ \text{m/s}^2 \quad (\text{方向向下})$$

图 14-32 可以更清楚地解释这种现象.

B 的加速度可以由图或由解析法得出. 用解析法解答，发现水平加速度分量为 $6+6=12\ \text{m/s}^2$，方向向左，竖直加速度分量为 $96\ \text{m/s}^2$，方向向下. 因此，

$$a_B = \sqrt{(a_h)^2 + (a_v)^2} = \sqrt{(12)^2 + (96)^2} = 96.7\ \text{m/s}^2$$

且

$$\tan\phi = 12/96 \text{ 则 } \phi = 0.124\ \text{rad}\ (7.12°)$$

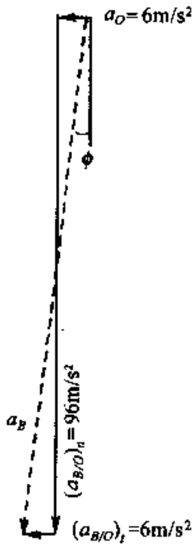


图 14-32

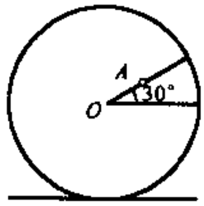


图 14-33

14.21　在题 14.20 中，A 点的速度和加速度大小为多少？A 点在与水平成 30°角的半径上，离中心 0.6 m，如图 14-33 示.

解　☞ 根据：

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{A/O} + \boldsymbol{v}_O \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}_A = (\boldsymbol{a}_{A/O})_t + (\boldsymbol{a}_{A/O})_n + \boldsymbol{a}_O \tag{2}$$

将速度等式(1)中的 6 个元素列表.

矢　量	方　向	大　小
v_A	?	?
$v_{A/O}$	$\perp OA$	$OA \times \omega = (0.6\ \text{m})(8\ \text{rad/s}) = 4.8\ \text{m/s}$
v_O	水平	12 m/s 方向向右

速度等式(1)由图 14-34 得出.

v_A 的水平速度分量大小为 $4.8\sin30° + 12 = 44.4\ \text{m/s}$；

v_A 的竖直速度分量大小为 $4.8\cos30° = 4.16$ m/s.

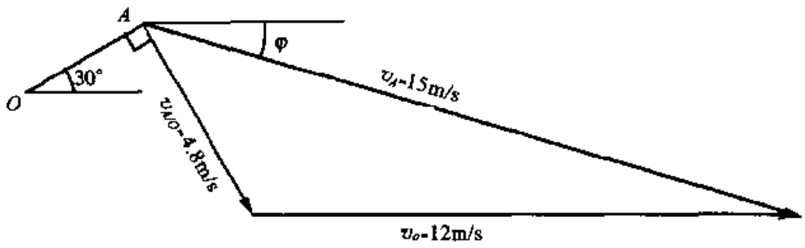


图 14-34

因此，$v_A = \sqrt{(14.4)^2 + (4.16)^2} = 15$ m/s 且

$$\phi = \arctan(4.16/14.4) = 0.281 \text{ rad}(16.1°)$$

接下来列表表示加速度等式(2)的 8 个元素.

矢　量	方　向	大　小
a_A	?	?
$(a_{A/O})_t$	$\perp OA$	$OA \times \alpha = 0.6\text{ m} \times 4\text{ rad/s}^2 = 2.4\text{ m/s}^2$
$(a_{A/O})_n$	沿 OA	$OA \times \omega^2 = 0.6\text{ m} \times (8\text{ rad/s})^2 = 38.4\text{ m/s}^2$
a_O	水平	向左 6 m/s²

图 14-35 表示等式(2).

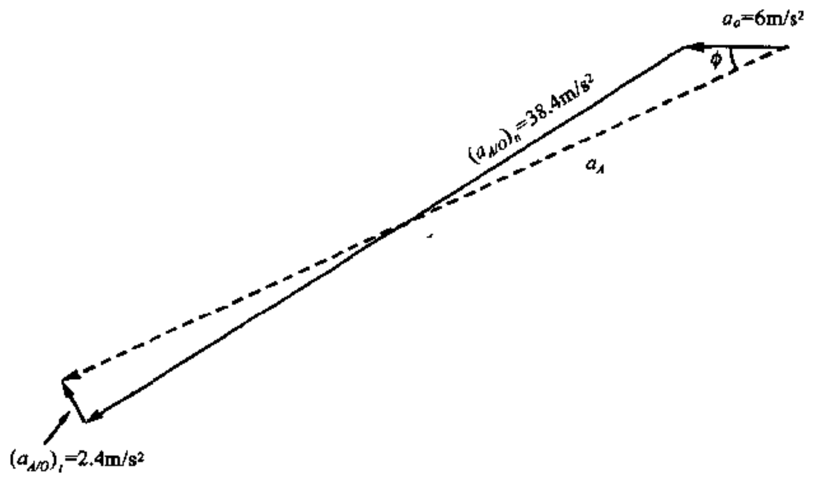


图 14-35

为了求得 a_A，写出它的水平和垂直分量大小是

$$(a_A)_h = -6 - 38.4\cos30° - 2.4\sin30° = -40.5 \text{ m/s}^2$$

$$(a_A)_v = -38.4\sin30° - 2.4\cos30° = -17.1 \text{ m/s}^2$$

所以，$a_A = \sqrt{(-40.5)^2 + (-17.1)^2} = 44.0$ m/s²

$$\phi = \arctan(-17.1/-40.5) = 0.4 \text{ rad 或 } 22.9°$$

注意到 ϕ 在 x 轴负方向下面.

14.22 如图 14-36 所示，一个滚筒和一个带轴的滑轮在 W 的作用下滚动，当重物下降 10 ft 时，滚筒中心的位移 s_O 是多少？假设滑轮与轴承无摩擦作用.

解 ☞ 圆筒在平面上滚动，接触点 I 为速度瞬心，因此，A 的绝对位移与 W 位移相等，可以表示为 5θ，半径 $AI = 5$ ft，θ 为角位移，因此 $5\theta = 10$，$\theta = 2$ rad. $s_O = 3\theta = 6$ ft(方向向右).

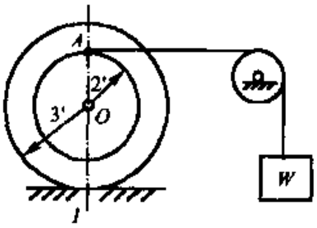


图 14-36

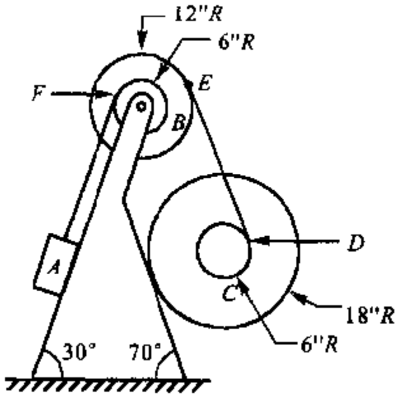


图 14-37

14.23 如图 14-37 所示，一重物 A 置于光滑面上，滑轮 B 固定于轴承上，且无摩擦，绕过滑轮 B 的小阶梯轮的绳与 A 连接，另一根细绳绕过滑轮 B 的大阶梯轮与鼓轮 C 中的小轮连接，令鼓轮 C 中心移动的速度 12 in/s，加速度 18 in/s^{2}均沿斜面向下，试确定重物 A 的速度、加速度，假设细绳与平面平行.

解 ☞ 细绳 DE 上点 E 与鼓轮上的点 D 有相同的速度，作为鼓轮上的点 D 速度为$[(18+6)/18]\times 12 = 16$in/s，滑轮 B 上对应的点 E 也具有相同的速度(16 in/s)，故点 F 的速度为 $6/12\times 16 = 8$ in/s，那么 A 重物的速度就等于 8 in/s 方向沿斜面向上.

点 D 在与斜面平行的方向上的加速度分量为 $24/18\times 18 = 24$ in/s^2，这也就是点 E 的切向加速度分量.

最后，点 F 的切向加速度分量为 $6/12\times 24 = 12$ in/s^2，因此，重物 A 的加速度大小为 12 in/s^2 方向沿斜面向上.

14.24 题 14.23 中，求当系绳 ED，不是绕过小鼓轮顶部而是绕过底部时的情形，移动滑轮使细绳 ED 平行于斜面.

解 ☞ 在新的位置上的点 D 的速度为$[(18-6)/18]\times 12 = 8$ in/s，点 F 的速度为$6/12\times 8 = 4$ in/s，因此重物 A 的速率为 4 in/s 沿斜面向上.

点 D 在新的位置上的加速度分量为 $12/18\times 18 = 12$ in/s^2，则点 F 的加速度为$6/12\times 12 = 6$ in/s^2，所以重物 A 的加速度大小为 6 in/s^2 沿斜面向上.

14.25 图 14-38 中半径为 r 的圆筒在半径为 R 的表面滚动，研究运动规律.

解 ☞ 设 OGP 为初始位置，$OG'B$ 为经过一段时间后的位置，P 点运动到了 P' 点，并假设圆筒作纯滚动，圆筒的弧长 BCP' 等于圆弧表面 PB 间的弧长.

θ 角是 $G'P'$ 相对初始位置 GP(或 GP 平行的 $G'C$)的角位移，ϕ 角是 OGP 在相同时间间隔内的角位移，因此，$(\theta+\phi)$ 角是 $G'P'$ 总的角位移

$$\widehat{BCP'} = \widehat{PB}, \quad \text{或} \quad r(\theta+\phi) = R\phi$$

解得

$$\theta = \frac{R-r}{r}\phi$$

因此

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{R-r}{r}\frac{d\phi}{dt} \quad 并且 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R-r}{r}\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

设 G 点的速度为 v_G，加速度 a_G 沿半径为 $R-r$ 的圆的切向方向，G 点的角速度$\frac{d\phi}{dt}$，角加速度

$\frac{d^2\phi}{dt^2}$为(提示 G 点的运动轨迹为半径是 $R-r$ 的圆)：

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{v_G}{R-r},\quad \frac{d^2\phi}{dt^2}=\frac{(a_G)_t}{R-r}$$

圆筒上任意一点相对中心的角速度$\frac{d\theta}{dt}$和角加速度$\frac{d^2\theta}{dt^2}$为

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{R-r}{r}\frac{d\phi}{dt}=\frac{v_G}{r},\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{(a_G)_t}{r}$$

圆筒上任意一点的绝对速度和绝对加速度可以通过任意点相对于中心点的运动和中心点的运动来确定.

例如,接触点 B 的v_B 速度等于 B 点相对中心$\left(大小为\ r\frac{d\theta}{dt}\right)$的速度与中心的速度$v_G$ 的矢量和,如果轮子沿平面滚动,$\frac{d\theta}{dt}$是顺时针方向,则 $r\frac{d\theta}{dt}$是沿圆筒切线方向指向左下方,大小为 $r\frac{d\theta}{dt}$或 $r\left(\frac{v_G}{r}\right)=v_G$,把它加到 G 点上的速度,其与 G 点的速度大小相等,作用线平行但指向右上方,B 点的绝对速度为 0;因此,B 点是速度瞬时中心.

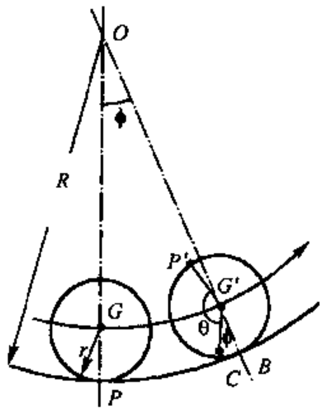


图 14-38

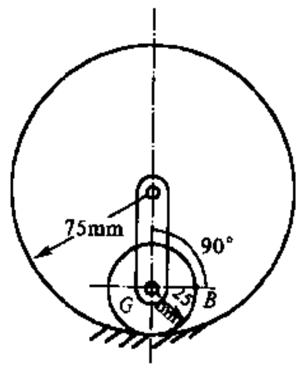


图 14-39

14.26 在过去的齿轮传动火车上,传动臂以 6 rad/s 的角速度顺时针转动,并且角加速度为 12 rad/s^2,逆时针方向,求图 14-39 所示 B 点的速度和加速度.

解 ☞ 在上题中,可以看出,轮 G 绕其中心旋转所具有的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 的大小可由下式给出：

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{R-r}{r}\frac{d\phi}{dt}\quad 和\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{R-r}{r}\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

其中 ϕ 是 OG 臂的角度改变量.因此,$\omega=[(75-25)/25]\times 6=12$ rad/s(逆时针方向),$\alpha=[(75-25)/25]\times 10=20$ rad/s^2(顺时针方向),通过验证:OG 臂顺时针的转动也即能推出小齿轮的逆时针转动.

B 点的速度v_B 是它相对于 G 的速度和 G 点的速度的矢量和,即 $v_B=v_{B/G}+v_G$,表格如下：

速度矢量	方向	大小
v_B	?	?
$v_{B/G}$	垂直向上	$r\omega=300$ mm/s
v_G	水平向左	$(R-r)6=300$ mm/s

如图 14-40 中所示矢量和为 424 mm/s.

B 点的加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 为相对于 G 点的加速度(二个分量:法向和切向)和 G(也为二分量)的加速度的矢量和,即

$$a_B = (a_{B/G})_t + (a_{B/G})_n + (a_G)_t + (a_G)_n$$

表如下：

加速度矢量	方向	大小
$(a_{B/G})_t$	垂直向下	$r\alpha = 500\ mm/s^2$
$(a_{B/G})_n$	水平向左	$r\omega^2 = 3600\ mm/s^2$
$(a_G)_t$	水平向右	$(R-r)10 = 500\ mm/s^2$
$(a_B)_n$	垂直向上	$(R-r)6^2 = 1800\ mm/s^2$

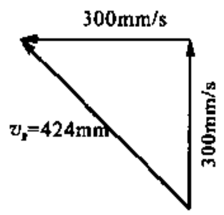


图 14-40

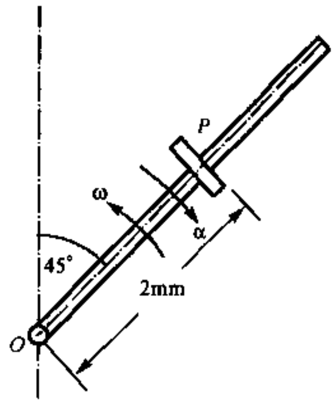


图 14-41

上面的矢量关系图不必画出．垂直方向上的总和为 $1800-500=1300\ mm/s^2$，方向向上；水平方向上的总和为 $3100\ mm/s^2$，向左．B 点的绝对加速度为向左，其大小为 $3360\ mm/s^2$．

注意：B 的绝对速度v_B 也可用它的瞬心确定两圆接触的点（见前一题），尽管瞬心的绝对速度为零，但它的绝对加速度不为零．

14.27 在图 14-41 中，在圆环离 O 点距离为 2 m 时以 4 m/s 的速度沿杆向外滑动．它沿杆滑动的加速度 3 m/s^2．杆的角速度大小是 5 rad/s 方向为逆时针；角加速度大小为 10 rad/s^2，方向为顺时针，求圆盘上点 P 的绝对加速度．

解 ☞ 根据科氏定理，P 点的绝对加速度可表示为

$$a_P = (a_{P/杆})_t + (a_{P/杆})_n + (a_M)_t + (a_M)_n + 2\omega \times v_{P/杆}$$

又由：

$(a_{P/杆})_t$ = P 点沿杆方向的加速度，即沿杆向外 3 m/s^2；

$(a_{P/杆})_n$ = P 点在与杆垂直方向的加速度，即为零．因为它是在直线轨迹上运动；

$(a_M)_t$ = 杆上瞬时与 P 点重合点 M 的切线加速度，大小 $r\alpha = 2(10) = 20\ m/s^2$，方向为右下方向；

$(a_M)_n$ = 杆上瞬时与 P 点重合点 M 的法向加速度，大小 $r\omega^2 = 2\times(5)^2 = 50\ m/s^2$，方向沿着杆指向 O 点；

$2\omega \times v_{P/杆}$ = 科氏加速度的大小和方向，方向是矢量 $v_{P/杆}$按 ω 转向转过 90°的角度（在本题中是逆时针方向）；大小是 $2\times(5)\times(4) = 40\ m/s^2$，方向指向左上角．

矢量图表示了以上加速度以及它们的矢量和 a_P（见图 14-42），由此可得：$a_P = 51\ m/s^2$，$\theta = 22°$．

14.28 风车轮上叶片某瞬时的曲率中心 C，如图 14-43 所示．一个距中心 O 点为 8 m 的质点 A，速度为 10 m/s，加速度为 20 in/s^2，方向沿叶片切线方向向外，求当车轮的角速度为 2 rad/s，逆时针方向；角加速度为 3 rad/s^2，顺时针方向时 P 点的加速度．

解 ☞ 根据科氏加速度定理，P 点的绝对加速度为

$$a_P = (a_{P/叶片})_t + (a_{P/叶片})_n + (a_M)_t + (a_M)_n + 2\omega_{叶片} \times v_{P/叶片}$$

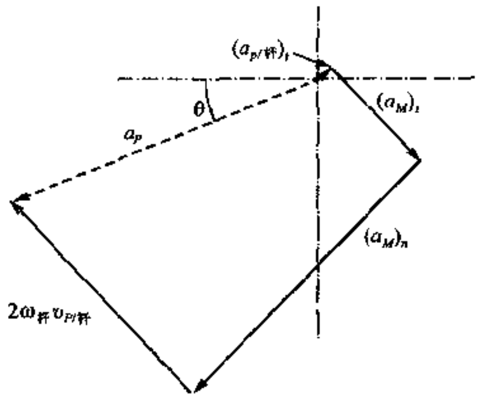


图 14-42

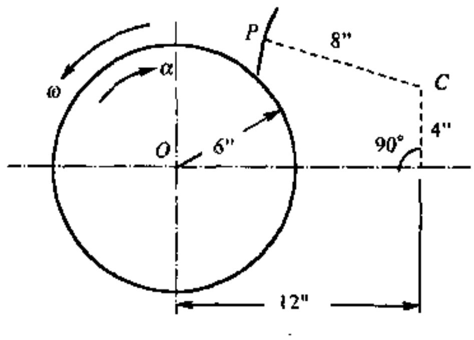


图 14-43

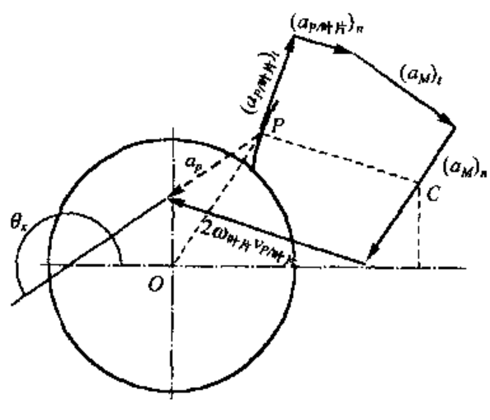


图 14-44

其中$(a_{P/叶片})_t = 20\ \text{in/s}^2$ 方向向外且垂直于 PC；

$(a_{P/叶片})_n = (v_{P/叶片})^2/PC = (10)^2/8 = 12.5\ \text{m/s}^2$ 由 P 指向C；

$(a_M)_t$ = 该瞬时与 P 重合的叶上M 点的切向加速度，其值为 $OP \times \alpha = 8 \times 3 = 24\ \text{in/s}^2$，方向指向右下，垂直于 OP；

$(a_M)_n$ 该瞬时与P 重合的叶上M 点的法向加速度，大小 $= OP \times \omega^2 = 8(2)^2 = 32\ \text{in/s}^2$，指向由 $P \to O$；

$(v_{P/叶片}) = 10\ \text{in/s}^2$，向外垂直于 PC；

$(\omega_{叶片}) = 2$ rad/s，逆时针方向；

$2\omega_{叶片} \times v_{P/叶片} = 2 \times 10 \times 2 = 40\ \text{in/s}^2$，指向由 C 到 P；其方向的确定，由指向由与 CP 垂直的相

对旋转速度$v_{P/叶片}$沿 $\omega_{叶片}$方向在平面内逆时针旋转 90°得到.

补充习题

14.29　一刚体以 12 rad/s 的角速度绕一通过原点的轴转动，与 x,y,z 轴的方向余弦值分别为 0.421，0.365，0.831.问：刚体上具有位置矢量(关于原点)$r=-2i+3j-4k$ 的点的速度为多少？

答案：$v=-47.4i+0.26j+23.94k$ m/s.

14.30　一刚体以 200 rpm 的角速度绕直线 $i-3j+4k$ 转动，原点在直线上.求点 $P(3,\ 3,\ -1)$的线速度是多少？

答案：$v=-37.0i+53.6j+49.3k$ m/s.

14.31　试求一个旧式钟表的秒针和分针的角速度是多少 rad/s？

答案：0.105 rad/s，0.0018 rad/s.

14.32　一刚体以 60 rpm 的角速度绕过原点及点(3, 0, 5)的直线转动，长度单位为 ft.求刚体上点(1, −2.2)的线速度是多少 ft/s？

答案：$10.8i-1.08j-6.47k$ ft/s.

14.33　如图 14-45 所示，两相同杆件 AB 与 CD 在平面内围绕销钉自由转动，BD 杆与 AC 等长.AB 以恒定角速度 10 rpm 逆时针旋转，求 BD 的运动状况.

答案：$v=753$ in/min 向右，$a=47.3$ in/min^2 向上.

14.34　在某一确定时刻，一旋转轴围绕一固定轴线以 50 rpm 转动，20 秒后转速为 1050 rpm，求其平均角加速度为多少 rad/s^2？

答案：$\alpha=5.23$ rad/s^2.

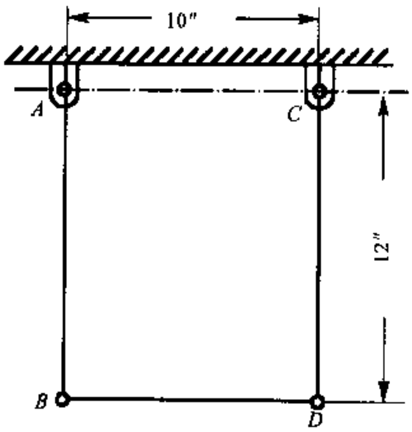


图 14-45

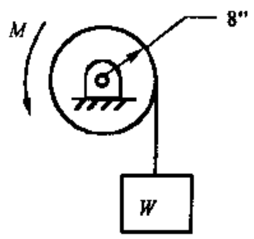


图 14-46

14.35　一个直径为 500 mm 的飞轮以 2 rad/s^2 的角加速度从静止开始做匀加速运动.求运动开始到 3 s 后的圆上一点的法向与切向加速度.

答案：$a_t=500$ mm/s^2，$a_n=9000$ mm/s^2.

14.36　一质点静止于距中心为 r 的留声机转盘上，设转盘以一恒定角加速度 C 从静止开始加速，求 t 时刻质点的切向和法向加速度大小.

答案：$a_n=C^2/rt^2$，$a_t=Cr$.

14.37　一转子从 1800 rpm(rad/min)在 320 秒均匀地减速为零，求角加速度和静止前转过的角度.

答案：$\alpha=-0.589$ rad/s^2，$\theta=30,100$ rad.

14.38　一杆件围绕其端点以 5 rad/s 旋转，且以一恒定的角加速度减速.经过一恒定时间间隔后，此杆有 8rad 的逆时针的角位移，且它转过的总角度为 20.5 rad，经过这段时间后，杆的角速度是多少？

答案：$\omega=7.58$ rad/s.

14.39　如图 14-46 所示，一鼓轮通过绳索使重物 W 提升 6 ft，鼓轮从静止开始经过 1.5 s 后均匀地加速至 15 rpm，然后以恒定的速度 15 rpm 运动，整个过程的时间为多少？

答案：$t=648$ s.

14.40　如图 14-47 所示，提升装置由直径为 1200 mm 的鼓轮及缠绕的缆绳组成. 鼓轮同轴固连了一个节圆直径为 900 mm 的齿轮，此齿轮被另一节圆直径为 300 mm 的齿轮驱动. 质量块 M 的加速度为 6 m/s^2，向上. 求小齿轮的角加速度为多少？

答案：$\alpha=30$ rad/s^2 顺时针.

14.41　雨以 5 ft/s 的速度垂直下落，一个人以 4 ft/s 的速度在水平地上行走，求雨相对人的相对速度是多少？人撑雨伞应与铅垂方向夹多大的角度？

答案：6.4 ft/s，38.6°.

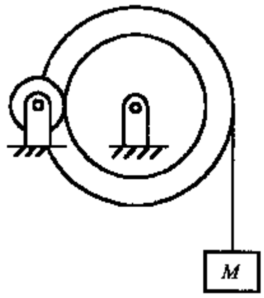


图 14-47

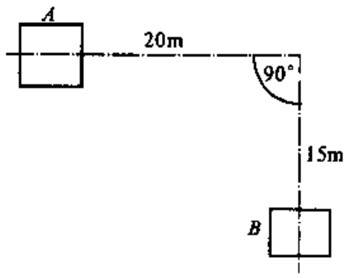


图 14-48

14.42　一个人向东以 3 km/h 的速度行走，风好像从北方吹来，当速度降到 1 km/h 时，风好像从西北方向吹，求风速？

答案：$v=3.61$ km/h.

14.43　如图 14-48 所示，物块 A 以 15 m/s 的速度从图示的位置向右移动，物块 B 在相同的时刻以 20 m/s 的速度铅直向上运动，求运动开始后 1/2 s 时 A 对 B 的相对速度.

答案：$v_{A/B}=25$ m/s，$\theta_z=307°$.

14.44　如图 14-49 所示，点 O 与点 P 是平面图形上的两点，平面图形在 xy 平面内运动. 点 O 的速度已知，如图所示. 求点 P 的绝对速度.

答案：$v_P=0$.

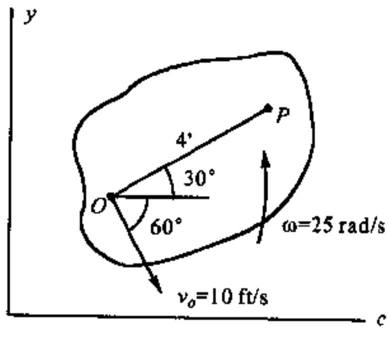


图 14-49

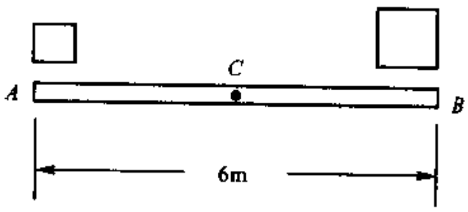


图 14-50

14.45　如图 14-50 所示，铁制的棍被大小不等的磁铁所吸引，其中 A 端以 4 m/s^2 的加速度铅直运动，B 端以 6 m/s^2 的加速度铅直运动，求棍的中心 C 点的加速度和铁棍的角加速度.

答案：$a_C=5$ m/s^2 向上，$\alpha=0.333$ rad/s 逆时针.

14.46　长为 l 的梯子斜靠在铅直墙面上，梯子的底端以恒定的速度 v_0 沿着地面运动，求梯子顶端的速度和加速度($x=v_0t$).

答案 $\dot{y}=\dfrac{-v_0t}{\sqrt{l^2-v_0^2t^2}}$，$\ddot{y}=\dfrac{-v_0^2l^2}{(l^2-v_0^2t^2)^{3/2}}$.

14.47　长为 l 的梯子，与水平地面成 θ 角并靠在铅直墙上. 证明梯子中心的运动轨迹是半径为 $\frac{1}{2}l$ 的圆周.

14.48　图 14-51 中的杆 AB，A 端以 400 mm/s 速度沿水平面向左滑动. 求图所示瞬时的杆的角速度是多少？

使用瞬时中心的方法.

答案：$\omega = 0.293$ rad/s 顺时针.

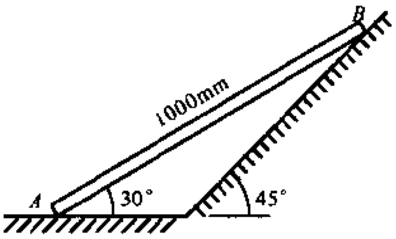


图 14-51

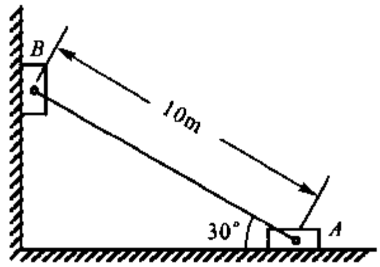


图 14-52

14.49 长为 10 ft 的梯子,顶端沿光滑墙下滑,底端沿与墙垂直的光滑平面滑动.证明,当梯子与水平面夹角为 45°时,梯子中心点的速度沿梯子的方向.

14.50 图 14-52 中,A 点的速度是 5 m/s 向右,加速度是 8 m/s^2 向右,求 B 点的速度和加速度为何?

答案：$v_B = 8.66$ m/s 向下,$a_B = 33.9$ m/s^{2}向下.

14.51 曲柄滑块中的曲柄 CB 以常角速度 30 rpm 顺时针转动.求滑块 A 在图示位置的速度,如图 14-53 所示,使用两种方法求解.

答案：$v_A = 9.68$ in/s 向右.

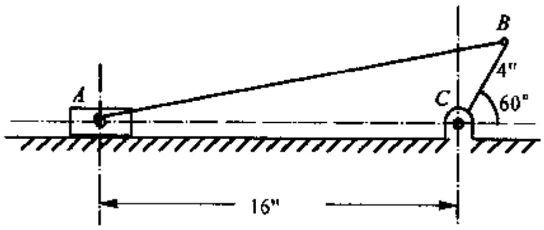


图 14-53

14.52 如图 14-54 所示的曲柄滑块机构中,曲柄以 120 rpm 顺时针转动.求当曲柄在图示位置时,滑块的速度等于多少?使用两种解题方法.

答案：10.3 ft/s 指向右.

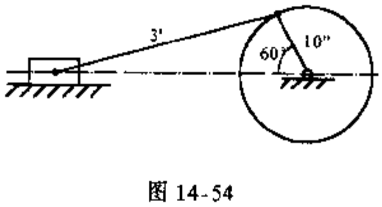


图 14-54

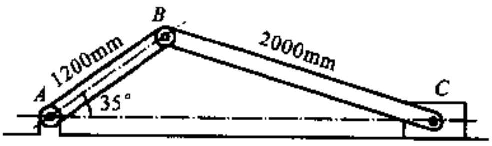


图 14-55

14.53 在图 14-55 中,滑块的线速度是 2.4 m/s,沿水平面向左.使用瞬心方法,求曲柄 AB 在图所示的瞬时角速度.

答案：$\omega = 2.44$ rad/s 逆时针.

14.54 一杆在铅直柱子上滑动,同时带动物块 A 以常速度 C 向右运动.见图 14-56.试求杆的角速度 $\dot{\theta}$.

答案：$\dot{\theta} = -\dfrac{C}{a}\sin^2\theta$.

14.55 图 14-57 的连杆装置中,销 A 和 B 固定.连杆 AD 以角速度 ω_A 转动.证明 BC 连杆的角速度 ω_B 的表达式为 $\omega_B = \omega_A(AE/BF)$,其中 AE 和 BF 垂直于 DC.

14.56 在图 14-58 所示的四连杆(四曲柄机构)中,AB 的角速度是 8 rad/s 顺时针.求 CD 和 BC 的角速度.

答案：$\omega_{CD} = 12.0$ rad/s 顺时针,$\omega_{BC} = 0$.

14.57 在图 14-59 所示瞬时,曲柄 AB 以 2 rpm 顺时针转动.求臂 CD 的角速度是多大?使用两种求解方

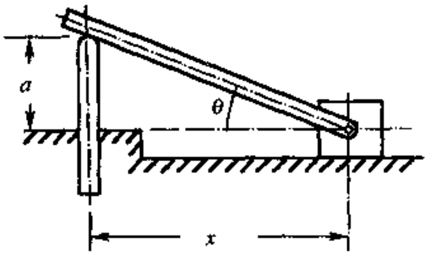


图 14-56

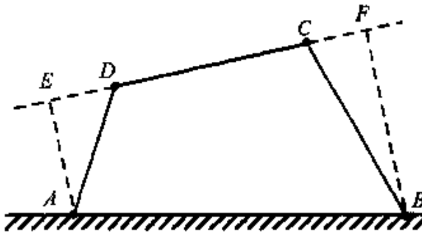


图 14-57

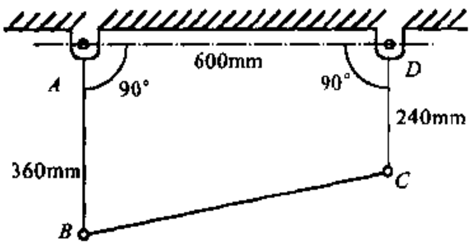


图 14-58

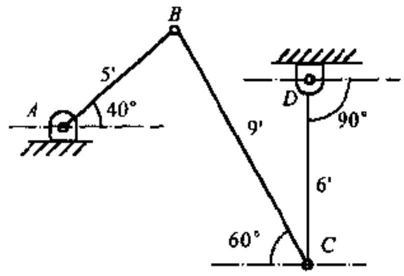


图 14-59

法.

答案：$\omega_{CD}=3.28$ rpm 逆时针.

14.58 如图 14-60 所示的连杆装置中，杆 AB 限定作水平运动，杆 CD 绕固定轴 D 转动.如果水平杆的左端点的速度为 24 in/s 指向左并且加速度为 40 in/s^2 指向右，问 CD 的角速度和角加速度是多少？

答：$\omega=5.33$ rad/s 顺时针，$\alpha=73.3$ rad/s^2 顺时针.

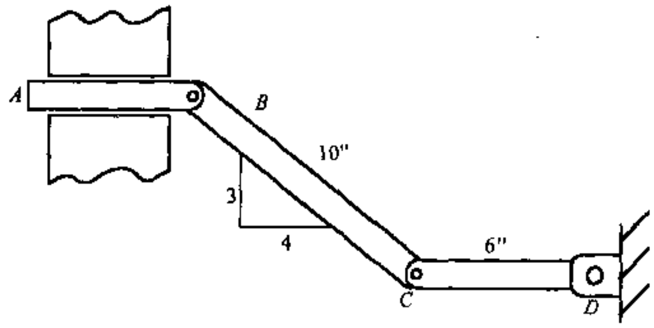


图 14-60

14.59 直径为 3 m 的轮子滚而不滑.轮心的速度和加速度分别是 8 m/s 和 5 m/s^2 指向右.则轮顶点加速度为何？

答案：$a=43.8$ m/s^2，$\theta_x=283°$.

14.60 直径为 300 mm 的轮子沿水平面滚而不滑.它的角速度是 30 rpm.求(a)顶部点和(b)水平直径正面端点的速度是多少？

答案：(a) $v=0.942$ m/s，$\theta_x=0°$；(b) $v=0.666$ m/s，$\theta_x=315°$.

14.61 物块在两个直径为 4 in 的小棍轴上运动，如图 14-61 所示.如果物块的速度为3.0 ft/s，加速度为 2.0 ft/s^2，并方向均指向右，求棍轴的中心的速度和加速度.

答案：$v=1.5$ ft/s 向右，$a=1.0$ ft/s^2 向右.

14.62 图 14-62 中的圆盘在水平面滚而不滑.其中心的加速度为 4 ft/s^2 方向水平向左.该瞬时中心的速度为 3 ft/s 指向右，求 P 点的加速度.

答案：$a=7.32$ ft/s^2，$\theta_x=183°$.

14.63 组合轮滚而不滑，其角速度为 30 rpm 顺时针.见图 14-63.求 A 和 B 两点的绝对速度.使用两种求解

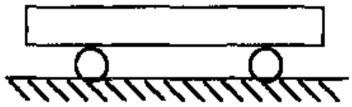


图 14-61

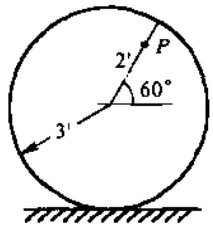


图 14-62

方法.

答案：$v_A=2.22$ m/s, $\theta_x=-45°$；$v_B=4.71$ m/s 向右.

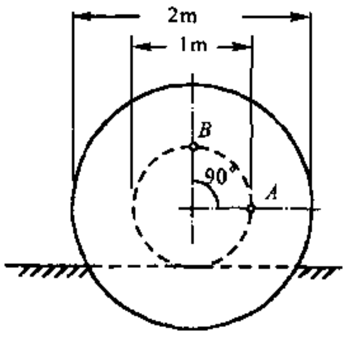


图 14-63

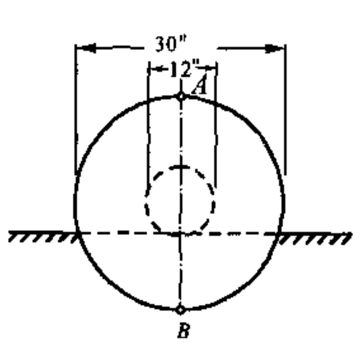


图 14-64

14.64 组合轮沿水平面滚而不滑，如图 14-64 所示. 如果轮的角速度为 20 rad/s 顺时针，求轮的顶点和底点的绝对速度.

答案：$v_A=35$ ft/s 向右，$v_B=15$ ft/s 向左.

14.65 图 14-65 中车轮，其中心具有 4 m/s 的水平速度向右运动. 车轮的角速度是4 rad/s 顺时针. 求 P 点和 Q 点的绝对速度.

答案：$v_P=5.32$ m/s, $\theta_x=25.0°$, $v_Q=0$.

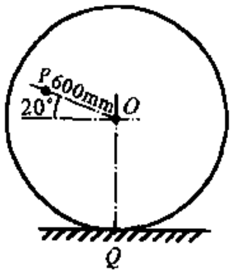


图 14-65

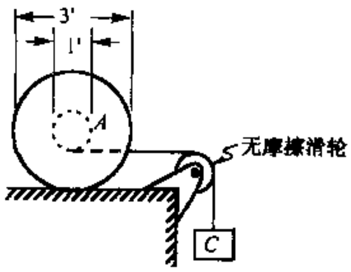


图 14-66

14.66 图 14-66 中的组合轮 A 沿水平面滚而不滑. 绳缠绕其轴并吊一重物 C 如图示. 重物 C 的速度在 2 s 内由 2 ft/s 向下均匀变化到 6 ft/s 向下. 求在此时间内 A 的角位移.

答案：$\theta=8$ rad 顺时针.

14.67 图 14-67 中所示，圆柱体 C 直径为 500 mm，在水平面上滚而不滑. 滑轮 B 无摩擦. 如果 A 向下的位移为 100 mm，求 C 的角位移是多少?

答案：$\theta=0.4$ rad 顺时针.

14.68 在上题中，A 的速度和加速度分别是 100 mm/s 和 50 mm/s^2，问圆柱体 C 的角速度和角加速度是多少?

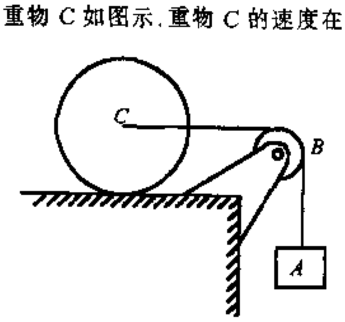


图 14-67

答案：$\omega=0.4$ rad/s 顺时针，$\alpha=0.2$ rad/s^2 顺时针．

14.69 图 14.68 中，重物 W 由无摩擦轴承中转动的滑轮吊住．当滑轮转动时，缠绕圆柱体的绳 AB 又绕在滑轮上．重物以常加速度 16 ft/s^2 从静止开始向下运动．求圆柱体中心 O，在 3 s 以后的位移、速度和加速度，绳 AB 平行于斜面．

答案：$s_0=72$ ft, $v_0=48$ ft/s, $a_0=16$ ft/s^2．

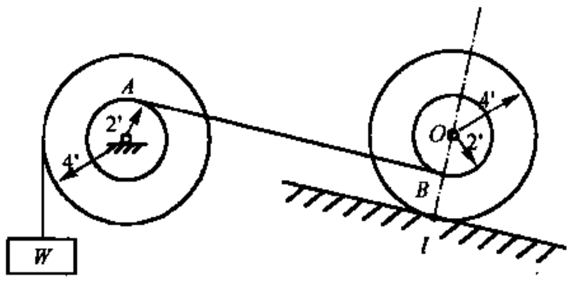


图 14-68

14.70 在题 14.69 中，如果绳 AB 不从底部缠绕而从顶部缠绕轴，并移动滑轮，使 AB 与平面平行．再求题 14.69 中问题．

14.71 图 14-69 中，偏心轮以 30 rpm 逆时针转动，并推动阀 A．试用角 ϕ 表示阀 A 的速度和加速度．

答案：$\dot{x}=7.85\sin\phi$ in/s 向左，$\ddot{x}=24.6\cos\phi$ in/s^2 向左．

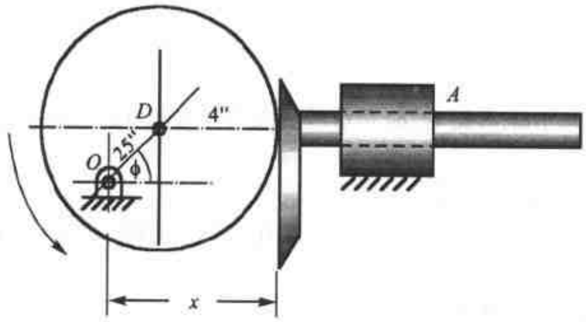


图 14-69

14.72 见图 14-70．齿条 A 固定，齿条 B 具有 600 mm/s 的速度向下和 450 mm/s^2 的加速度，方向也向下．求齿轮中心的速度和加速度，并求齿轮上的接触点 C 的加速度．

答案：$v_0=300$ mm/s 向下，$a_0=225$ mm/s^2 向下，$a_c=1000$ mm/s^2，夹角 $\theta_x=207°$．

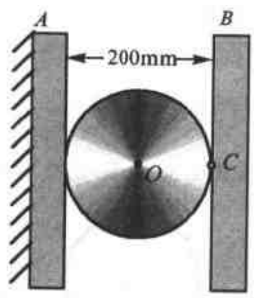


图 14-70

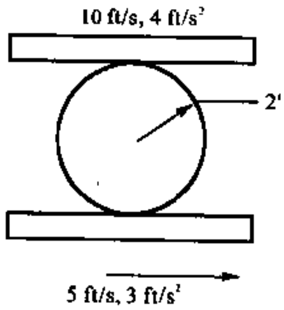


图 14-71

14.73 在图 14-71 中，上面板向右运动，其速度为 10 ft/s，加速度为 4 ft/s^2．下面板也向右运动，速度为 5 ft/s，加速度为 3 ft/s^2．则求直径为 4 ft 的圆盘角速度和角加速度是多少？圆盘与板之间无滑动．

答案：$\omega=\dfrac{5}{4}$ rad/s 顺时针，$\alpha=\dfrac{1}{4}$ rad/s^2 顺时针．

14.74　求题 14.73，设下面板向左运动，速度为 5 ft/s，加速度为 3 ft/s^2.

答案：$\omega=\frac{15}{4}$rad/s 顺时针，$\alpha=\frac{7}{4}$rad/s^2 顺时针.

14.75　在图 14-72 中，圆盘在水平面上滚动而不滑动，并有顺时针角速度为 10 rpm，逆时针角加速度为 6 rad/s^2. 杆 AB 连接如图示. OA 线水平，点 B 沿水平面运动如图示. 求图示瞬时 B 点的速度和加速度.

答案：$v_B=1.1$ m/s 向右，$a_B=7.47$ m/s^2 向左.

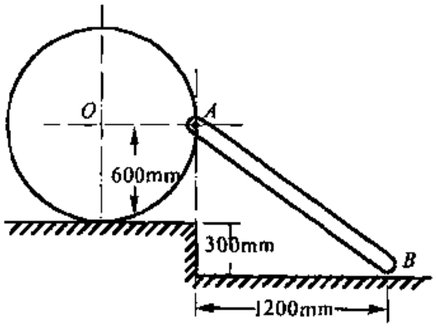


图 14-72

14.76　图 14-73 中杆 AB 长 8 ft，在 B 点用无摩擦销与直径 4 ft 的圆柱体连接. 圆柱体沿与水平成 30°角的斜面滚动，其中心具有向下的常速度 12 ft/s. A 点在无摩擦平面上滑动，此平面与水平面夹角 60°. 图示瞬时杆水平，求此瞬时杆的角速度和角加速度.

答案：$\omega=6.0$ rad/s 顺时针，$\alpha=62.4$ rad/s^2 逆时针.

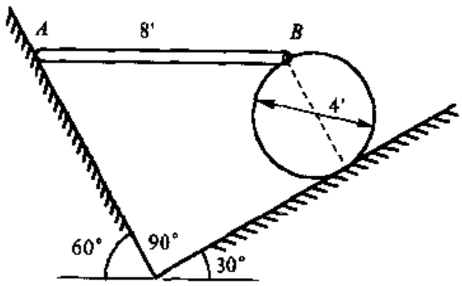


图 14-73

14.77　在图 14-74 中曲柄 OB 以常角速度 6 rad/s 顺时针转动. 圆盘 C 在固定的大圆内滚而不滑. 求(a)圆盘 C 的角速度和(b)图示瞬时 P 点的绝对加速度，此时曲柄 OB 水平且 P 点是圆盘 C 的顶点.

答案：(a)$\omega_C=18$ rad/s 逆时针；(b)$a_P=341$ ft/s^2，$\theta_x=252°$.

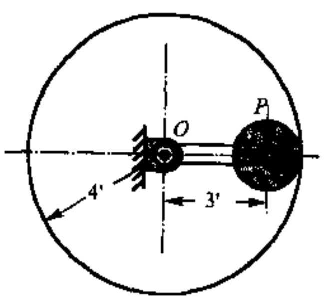


图 14-74

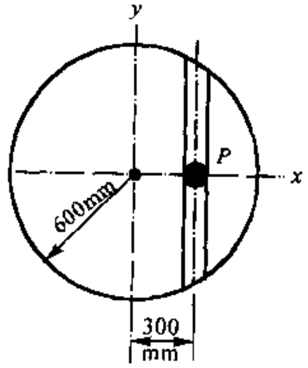


图 14-75

14.78　珠子以 $r=0.5t^2$ 的规律沿杆运动，同时杆又以 $\theta=t^2+t$ 的规律转动．求 $t=2$ s 时，珠子的速度与加速度的径向和横切向分量，设 r 的单位为米．

答案：$v_r=2$ m/s, $v_\theta=10$ m/s, $a_r=-49$ m/s^2, $a_\theta=24$ m/s^2.

14.79　杆以常速率 2 rad/s 在水平面上绕过杆一端的铅直轴顺时针转动．一垫圈沿杆以常速度 4 ft/s 滑动，求当垫圈离铅直轴 2 ft 时，垫圈的加速度的径向和横切向的分量．

答案：$a_r=-8$ ft/s^2, $a_\theta=16$ ft/s^2.

14.80　如图 14-75 所示．球 P 以常速度 2 m/s 沿圆盘的光滑槽向下运动，圆盘又以顺时针角速度 3 rad/s 和逆时针角加速度 8 rad/s^2 转动．求图示圆盘上的 P 点的加速度．

答：$a=14.9$ m/s^2, $\theta_x=171°$.

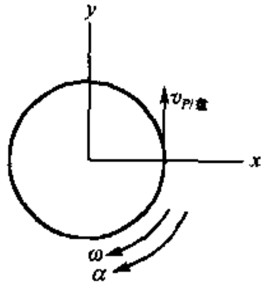


图 14-76

14.81　质点的速率 600 mm/s 绕直径 1200 mm 的圆盘的圆周运动，圆盘以相反方向的角速度 2 rad/s 顺时针转动．见图 14-76．圆盘的角加速度为 4 rad/s^2 顺时针．求图示瞬时，质点的加速度．

答案：$a=2.47$ m/s^2, $\theta_x=256°$.

14.82　小虫沿着半径为 r ft 的圆周以常速度 v ft/s 运动．圆盘在相反方向以常角速度 ω 转动．求小虫的绝对加速度是多少？

答案：$(v-r\omega)^2/r$.

14.83　小虫以常速度 v 沿圆盘半径 r 的方向运动，盘以常角速度 ω 转动．问小虫达到圆盘边缘时的绝对加速度是多少？

答案：$a=\omega\sqrt{r^2\omega^2+4v^2}$.

14.84　如图 14-77 中，AD 在与 PC 销接的套筒 P 内滑动，PC 距离不变．在研究瞬时，如果 M 点是构件 AD 上并与 P 重合的点，则 P 相对于 M 点的速度和加速度是水平的．试求构件 CP 的角速度和角加速度．

答案：$\omega_{CP}=10$ rad/s 逆时针，$\alpha_{CP}=75$ rad/s^2 逆时针．

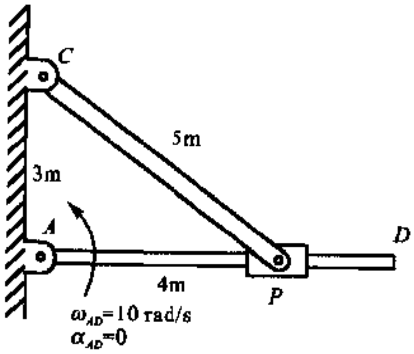


图 14-77

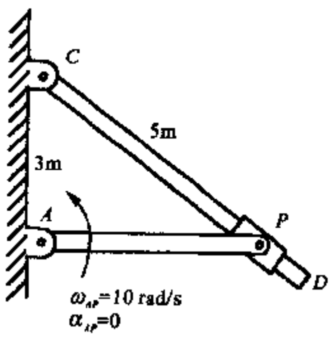


图 14-78

14.85　图 14-78 中，构件 CD 在与 AP 销接的套筒 P 内滑动，且 AP 距离不变．在本题中，M 是 CD 上的并与 P 重合的点，则 P 点相对于 M 的速度和加速度沿 CD 方向．试求构件 CD 的角速度和角加速度．

答案：$\omega_{CD}=6.4$ rad/s 逆时针，$\alpha_{CP}=13.4$ rad/s^2 逆时针．

14.86　图 14-79 中，杆 AB 在 B 端销接，并静置在半径为 8 in 的轮子上．轮子滚而不滑，且角速度为 12 rad/s

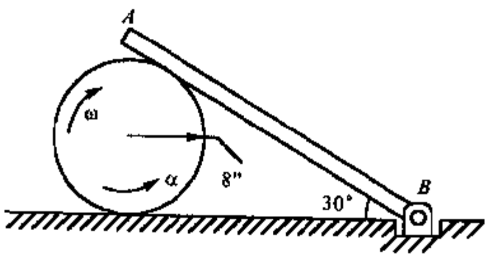


图 14-79

顺时针，角加速度为 3 rad/s^2 逆时针．求 AB 杆的角速度与角加速度？

答案：$\omega = 1.6$ rad/s 顺时针，$\alpha = 19.7$ rad/s^2 逆时针．

14.87 在图 14-80 中，杆 AB 和 CD 分别绕 A 和 D 轴转动．长 30 in 的杆在 C 点销接，并又插在 B 套筒中自由滑动．如果 AB 以常角速度 10 rad/s 顺时针转动，CD 以常角速度 8 rad/s 逆时针转动，求 30 in 长杆的角速度和角加速度是多少？

答案：$\omega = 0.353$ rad/s 顺时针，$\alpha = 0.78$ rad/s^2 逆时针．

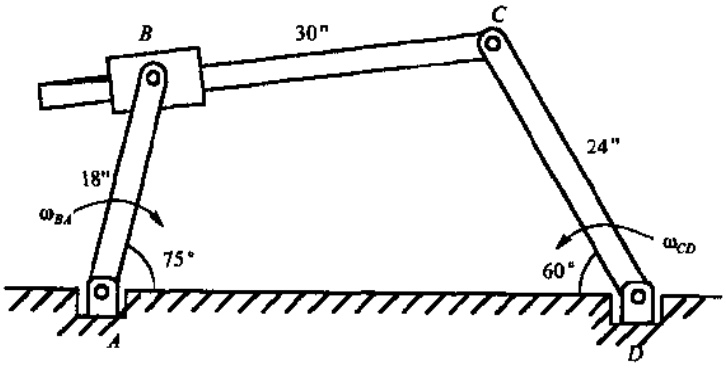


图 14-80

第 15 章　惯性矩

15.1　面积元的轴向惯性矩

面积元关于位于同一平面的轴向惯性矩 I 等于面积元与其离轴的距离的平方的乘积.惯性矩也称为面积的二次矩.

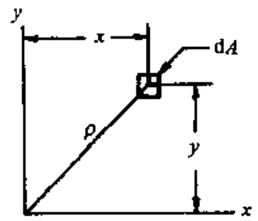


图 15-1

在图 15-1 中,惯性矩是

$$dI_x = y^2 dA, \qquad dI_y = x^2 dA$$

15.2　面积元的极惯性矩

面积元关于对垂直于该平面的轴的极惯性矩 J 等于面积元与其离轴的距离的平方的乘积.也认为是关于对 z 轴的惯性矩.

图 15-1 中,极惯性矩是

$$dJ = \rho^2 dA = (x^2 + y^2) dA = dI_y + dI_x$$

15.3　面积元的惯性积

在图中,面积元的惯性积定义如下:

$$dI_{xy} = xy\,dA$$

15.4　面积的轴惯性矩

面积的轴惯性矩是面积元的轴向惯性矩的和:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

15.5　面积的回转半径

面积关于对轴的回转半径由方程 $k = \sqrt{\dfrac{I}{A}}$ 给出.

15.6　面积的极惯性矩

面积的极惯性矩是面积元极惯性矩之和:

$$J = \int \rho^2 dA$$

15.7　面积的惯性积

面积的惯性积是面积元的惯性积之和:

$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

15.8　平行轴定理

平行轴定理表明,面积关于任意轴的轴惯性矩或极惯性矩等于该面积关于与此轴的且过面积形心的轴向轴惯性矩或极惯性矩加上面积与两平行轴之间的距离的平方的乘积.

在图 15-2 中,任意轴 x 和 y,过 O 点,而 x' 和 y' 与之共面平行并通过形心.

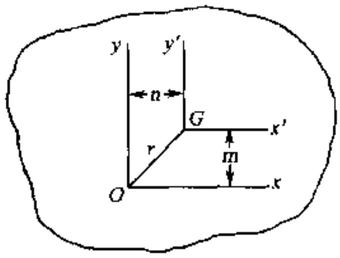


图 15-2

$$I_x = \overline{I}_{x'} + Am^2$$
$$I_y = \overline{I}_{y'} + An^2$$
$$I_O = \overline{J} + Ar^2$$

关于任意二轴的面积的惯性积等于通过形心的两个轴的惯性积加上面积与各自平行轴之间的距离的乘积：

$$I_{xy} = \overline{I}_{x'y'} + Amn$$

其中 m 和 n 是 G 点关于在过 O 点坐标轴上的坐标 (x, y)，或者是 O 点关于在过 G 点坐标轴上的坐标 (x', y'). 在第一种情况，m 和 n 是正的，而在第二种情况，它们是负的. 在这两种情况下，它们相乘是正的. 见图 15-2.

15.9 组合面积

组合面积的轴惯性矩、极惯性矩和惯性积分别是其各组成部分对于同一轴的轴惯性矩、极惯性矩和惯性积之和.

以上各项的单位是长度的 4 次方. 在美制单位制中，使用 in^4 的单位. 在国际单位制中用 m^4 或 mm^4. 在使用 mm^4 时，方便使用 $10^6 mm^4$(在国际单位制有列表).

15.10 转轴公式

任意面积关于对旋转坐标轴 (x', y') 的惯性矩可以用关于对 (x, y) 轴的惯性矩和惯性积表示如下：

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

其中 I_x, I_y 是关于对 (x, y) 轴向惯性矩；

$I_{x'}, I_{y'}$ 是关于对 (x', y') 轴向惯性矩，该轴与 (x, y) 轴有相同的原点，但旋转一角度 θ.

I_{xy} 是关于 (x, y) 的轴向惯性积；

$I_{x'y'}$ 是关于 (x', y') 的轴向惯性积.

证明参见题 15.21.

任意面积的惯性矩的最大值出现在关于其主轴的惯性矩；这一专门的坐标轴系 (x', y')，其角度 $2\theta' = \arctan[-2I_{xy}/(I_x - I_y)]$，

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_x - I_y)^2 + I_{xy}^2}$$
$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(I_x - I_y)^2 + I_{xy}^2}$$

对于此问题,参见题 15.22.

15.11　莫尔圆

莫尔圆表示截面惯性积、惯性矩随旋转轴的变化规律,而不需记住转轴公式.

参见题 15.23 和 15.24.

15.12　质量元的轴向惯性矩

质量元的轴向惯性矩是质量元与其离轴的距离的平方的乘积.

15.13　质量的轴向惯性矩

质量的轴向惯性矩是它的所有质量元的轴向惯性矩之和.即,dm 是一个质量元,位于坐标(x, y, z)则质量的轴向惯性矩如下(见图 15-3):

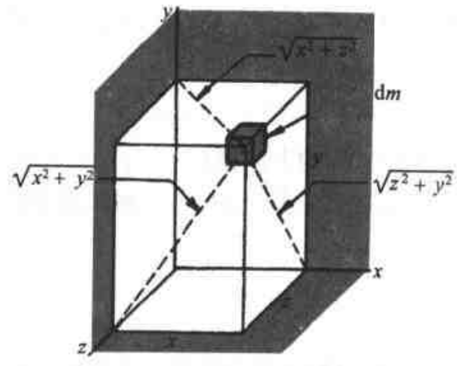


图 15-3

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m$$

其中 I_x, I_y, I_z 是轴向惯性矩(分别关于对 x, y 和 z 轴).

对于位于 xy 平面的薄板,其关系如下(见图 15-4):

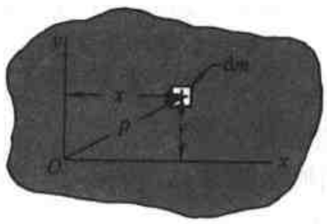


图 15-4

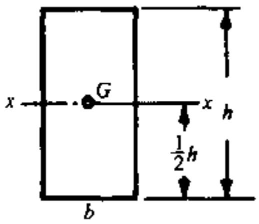
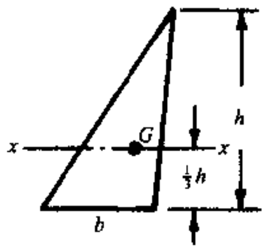
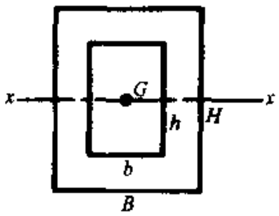
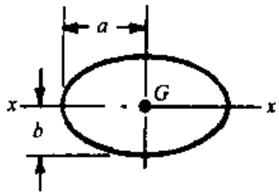
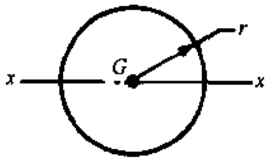
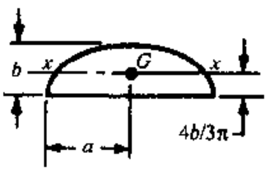
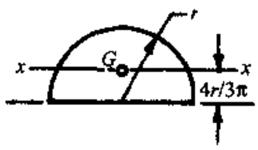
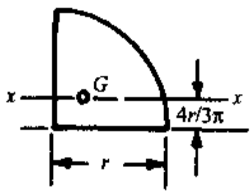
$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m$$

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m$$

$$J_O = \int \rho^2 \mathrm{d}m = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = I_x + I_y$$

其中 I_x, I_y 是分别关于 x 和 y 轴的轴向惯性矩；J_O 是关于 z 轴的轴向惯性矩.

表 15-1　面积的惯性矩

图　形	面积及惯性矩	图　形	面积及惯性矩
矩形 	$A = bh$ $I_x = \frac{1}{2}bh^3$ $I_b = \frac{1}{3}bh^3$	三角形 	$A = \frac{1}{2}bh$ $I_x = \frac{1}{36}bh^3$ $I_b = \frac{1}{12}bh^3$
空心矩形 	$A = BH - bh$ $I_x = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)$	椭圆形 	$A = \pi ab$ $I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$
圆形 	$A = \pi r^2$ $I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$	半椭圆形 	$A = \frac{1}{2}\pi ab$ $I_x = 0.11ab^3$
半圆形 	$A = \frac{1}{2}\pi r^2$ $I_x = 0.11r^4$	$\frac{1}{4}$圆形 	$A = \frac{1}{2}\pi r^2$ $I_x = 0.055r^4$

15.14　质量的回转半径

物体关于对轴的回转半径 $k = \sqrt{\frac{I}{m}}$，即其惯性矩与质量比值的平方根.

15.15　质量的惯性积

质量的惯性积是所有质量元的惯性积之和(见图 15-4)

$$I_{xy} = \int xy\mathrm{d}m$$

如果其中有一个或两个轴是对称轴，则惯性积为零.

15.16　质量的平行轴定理

平行轴定理表明，物体关于轴的惯性矩等于该物体关于对与此轴平行的且过物体质心的

轴向惯性矩加上物体的质量与两平行轴之间距离的平方的乘积.

15.17　组合质量

组合质量的轴向惯性矩、极惯性矩和惯性积分别是其各组成部分的质量对同一轴的惯性矩、极惯性矩和惯性积之和.

以上各项的单位是质量和长度平方的乘积.在美制单位制中,单位是 slug-ft² 或lb-s²-ft.在国际单位制(SI)中,单位是 kg·m².

例　　题

15.1　求矩形面积关于平行于底边的形心轴的轴向惯性矩.矩形的底为 b,高为 h.见图15-5.

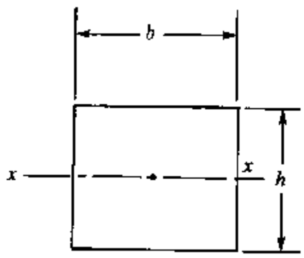


图 15-5

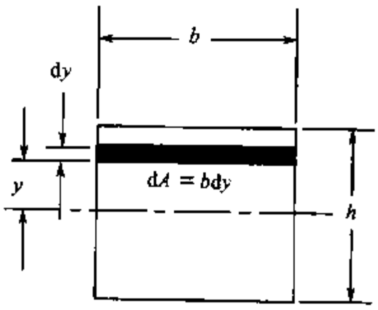


图 15-6

解　选面积元 dA 平行于底边,并离形心轴的距离为 y,如图 15-6 所示:

$$I_x = \bar{I} = \int y^2 \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \mathrm{d}y = \frac{1}{12} b h^3$$

15.2　在题 15.1 中,求矩形面积关于底边轴的轴向惯性矩.见图 15-7.

解

$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}A = \int_0^h y^2 b \mathrm{d}y = \frac{1}{3} b h^3$$

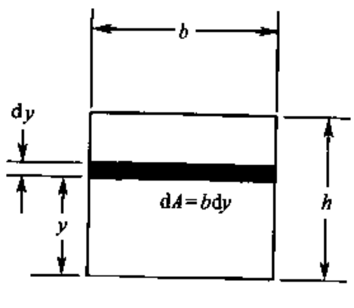


图 15-7

图 15-8

15.3　利用平行移轴定理,求矩形面积关于底边轴的惯性矩.见图 15-8.已知题 15.1 得出的结果.

解

$$I_x = \bar{I} + A\left(\frac{1}{2}h\right)^2 = \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{1}{4}h^2\right) = \frac{1}{3}bh^3$$

15.4　求三角形面积关于平行底边的形心轴的惯性矩.三角形底为 b,高为 h,如图15-9.

解 ☞

$$I_{mn}=\int y^2\mathrm{d}A=\int_{-h/3}^{2h/3}y^2z\mathrm{d}y=\int_{-h/3}^{2h/3}y^2\left(\frac{2}{3}h-y\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{36}bh^3$$

由三角形的相似性，$\dfrac{b}{h}=\dfrac{z}{\dfrac{2}{3}h-y}$ 得 $z=\left(\dfrac{b}{h}\right)\left(\dfrac{2}{3}h-y\right)$.

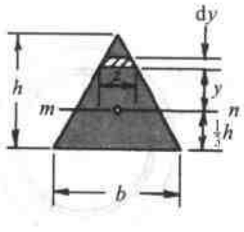


图 15-9

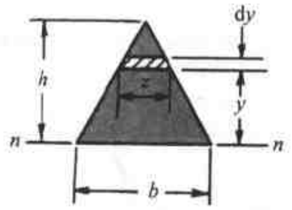


图 15-10

15.5　求三角形面积关于底边轴的轴向惯性矩.三角形底为 b，高为 h，见图 15-10.

解 ☞

$$I_b=\int y\mathrm{d}A=\int_0^h y^2z\mathrm{d}y=\int_0^h y^2\,\frac{b}{h}(h-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{12}bh^3$$

由相似三角形，$\dfrac{z}{h-y}=\dfrac{b}{h}$ 得 $z=\left(\dfrac{b}{h}\right)(h-y)$.

15.6 已知图 15.5 的结果(简单积分问题)，利用平行移轴定理求三角形面积关于对平行底边的形心轴的惯性矩.见图 15.11.

解 ☞ 应用平行轴定理得

$$\overline{I}=I_b-A\left(\frac{1}{3}h\right)^2=\frac{1}{12}bh^3-\left(\frac{1}{2}bh\right)\left(\frac{1}{3}h\right)^2=\frac{1}{36}bh^3$$

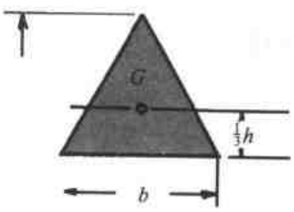


图 15-11

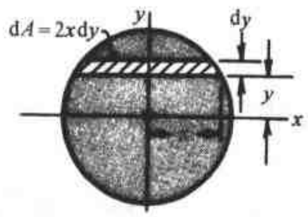


图 15-12

15.7　求半径为 r 的圆形面积关于直径的轴惯性矩.见图 15.12.

解 ☞

$$\begin{aligned}I_x&=\int y^2\mathrm{d}A=2\int_0^r y^2(2x\mathrm{d}y)=4\int_0^r y^2\sqrt{r^2-y^2}\mathrm{d}y\\&=4\left[-\frac{1}{4}y\sqrt{(r^2-y^2)^3}+\frac{1}{8}r^2\left\{\sqrt{r^2-y^2}+r^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right\}\right]_0^r\\&=4\left[0+\frac{1}{8}r^2(0+r^2\sin^{-1}1)+0-\frac{1}{8}r^2(0+0)\right]\\&=4\left(\frac{1}{8}r^4\right)\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{1}{4}\pi r^4\end{aligned}$$

注意：在此积分中，应将积分域限定在 $-r$ 到 r，是本解将积分区间从零到 r 的 2 倍.这是由于一半面积的 2 倍的惯性矩与全部面积的惯性矩相等.

15.8　使用图 15-13 所示的微元面积，求半径为 r 的圆面积关于对其直径的轴惯性矩.

解 ☞

$$I_x=\overline{I}=\int y^2\mathrm{d}A$$

其中 $y=\rho\sin\theta$ 和 $\mathrm{d}A=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$. 则有

$$I_x=\bar{I}=\int_0^{2\pi}\int_0^r\rho^3\mathrm{d}\rho\sin\theta^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^4$$

$$=\frac{1}{4}r^4\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{4}r^4\left(\pi-\frac{1}{4}\sin4\pi-0+\frac{1}{4}\sin0\right)=\frac{1}{4}\pi r^4$$

当选定面积的微元形式后,则由题目的图解很容易地解出惯性矩.

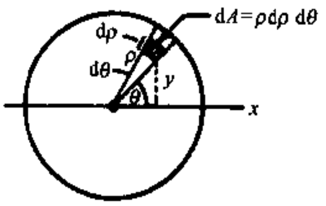


图 15-13

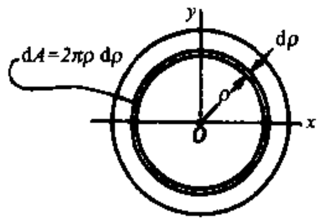


图 15-14

15.9　试求半径为 r 的圆面积对于过其中心并垂直于圆平面轴的极惯性矩. 见图 15-14.

解

选择微元面积为半径是 ρ 的圆环,环的厚度为 $\mathrm{d}\rho$. 因此 $\mathrm{d}A$ 等于周长 $2\pi\rho$ 乘以厚度 $\mathrm{d}\rho$.

$$\bar{J}=\int\rho^2\mathrm{d}A=\int_0^r\rho^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^r=\frac{1}{2}\pi r^4$$

注意,由此可以导出对于直径的轴向惯性矩. 因为 $\bar{J}=I_x+I_y$ 并且 $I_x=I_y$, 所以 $I_x=\frac{1}{2}\bar{J}=\frac{1}{4}\pi r^4$.

15.10　求图 15-15 所示的椭圆面积的轴向惯性矩和极惯性矩.

解

$$I_x=\int y^2\mathrm{d}A=\int_{-b}^{b}y^2(2x\mathrm{d}y)$$

其中　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　得　$x=\left(\frac{a}{b}\right)\sqrt{b^2-y^2}$

则

$$I_x=\int_{-b}^{b}y^2\left(2\frac{a}{b}\right)\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\left(2\frac{a}{b}\right)\left[-\frac{1}{4}y\sqrt{(b^2-y^2)^3}+\frac{1}{8}b^2\left\{y\sqrt{b^2-y^2}+b^2\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right\}\right]_{-b}^{b}=\frac{1}{4}\pi ab^3$$

由相似的积分,可得 $I_y=\frac{1}{4}\pi a^3b$. 当然 $\bar{J}=I_x+I_y=\frac{1}{4}\pi ab(a^2+b^2)$.

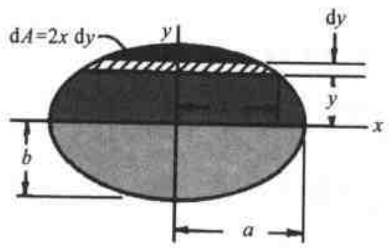


图 15-15

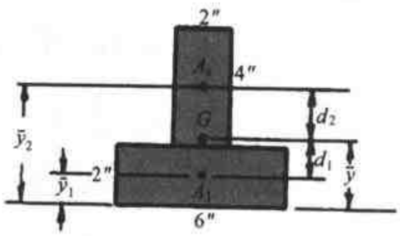


图 15-16

15.11　求图 15-16 所示的 T 形截面对于平行底边的形心轴的轴向惯性矩.

解　第一步,使用图示划分的两部分面积确定总面积形心 G,列于下表.

分面积	面积	分面积相对于形心的距离
A_1	12	1
A_2	8	4

有 $(A_1+A_2)\overline{y}=A_1\overline{y}_1+A_2\overline{y}_2$，$(12+8)\overline{y}=12\times1+8\times4$，得 $\overline{y}=2.2$ in.

再确定每个分面积关于对底边平行且过自身轴的 I，并利用 $I=\frac{1}{12}bh^3$：

$$I_1=\frac{1}{12}(6)(2^3)=4\ \text{in}^4 \qquad I_2=\frac{1}{12}(2)(4^3)=10.7\ \text{m}^4$$

最后一步为了求全部面积的 $\overline{I}$，将分部分面积的形心轴移到过 G 点. 由平行移轴定理（$d_1=2.2-1=1.2$；$d_2=4-2.2=1.8$），得

$$\overline{I}=(I_1+A_1d_1^2)+(I_2+A_2d_2^2)=(4+12\times1.44)+(10.7+8\times3.24)=57.9\ \text{in}^4$$

15.12　求图 15-17 所示的组合面积对平行底边的形心轴的惯性矩.

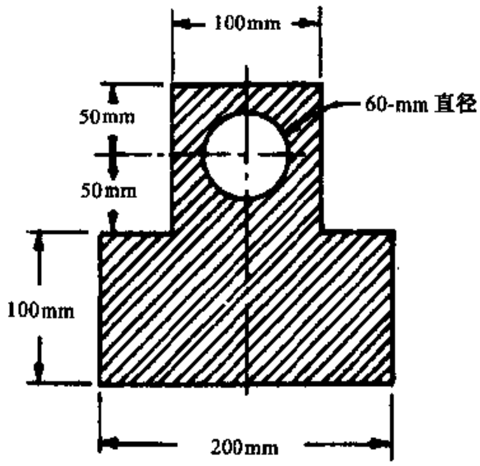


图 15-17

解　☞ 第一步，确定组合面积的形心. 令 T 代表上部矩形面积，B 代表下面矩形面积，C 代表圆面积. 以底边为参考线，有

$$\overline{y}=\frac{A_T\overline{y}_TA_B\overline{y}_B-A_C\overline{y}_C}{A_T+A_B-A_C}$$

$$=\frac{(100\times100)(150)+(200\times100)(150)-[\pi(60)^2/4](150)}{(100\times100)+200\times100-\pi(60)^2/4}=76.4\ \text{mm}$$

令 d_T 表示上部面积的形心到总面积形心的距离. 则有

$$d_T=150-76.4=73.6\ \text{mm}$$

同样地

$$d_B=76.4-50=26.4\ \text{mm}$$

$$d_C=150-76.4=73.6\ \text{mm}$$

各分面积对平行于组合面积底且过自身形心的轴的 I 值如下：

$$I_T=\frac{1}{2}b_Th_T^3=\frac{1}{12}(100)(100)^3=8.33\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_B=\frac{1}{2}b_Bh_B^3=\frac{1}{12}(200)(100)^3=16.67\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_C=\frac{1}{4}\pi r^4=\frac{1}{4}\pi(130)^4=0.64\times10^6\ \text{mm}^4$$

最后

$$I=(I_T+A_Td_T^2)+(I_B+A_Bd_B^2)-(I_C+A_Cd_C^2)$$

$$= [8.33 \times 10^6 + (100)(100)(73.6)^2] + [16.67 \times 10^6 + (200 \times 100)(26.4)^2]$$
$$- \left[0.64 \times 10^6 + \frac{\pi(60)^2}{4}(73.6)^2\right]$$
$$= 77.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

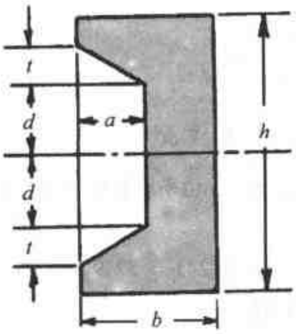


图 15-18

15.13 求图 15-18 所示的槽型面积对平行于 b 的形心轴的轴向惯性矩.

解 ☞ 在本题中,由于对称性,形心轴位于离底 1/2 高处.

可认为槽型面积是由底为 b、高为 h 的矩形面积中减去两个底为 a、高为 t 的三角形及一个底为 a、高为 $2d$ 的矩形所组成.见图 15-19.

为了确定槽型面积的 I_x,应将两个三角形面积和小矩形面积的惯性矩从矩形面积的惯性矩中减去.即

$$I_x = I_1 - (I_2 + I_3 + I_4)$$

则

$$I_1 = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{36}at^3 + \frac{1}{2}at\left(d + \frac{1}{3}t\right)^2 = \frac{1}{36}at^3 + \frac{1}{2}atd^2 + \frac{1}{3}at^2d + \frac{1}{18}at^3$$

$$I_4 = \frac{1}{36}a(2d)^3 = \frac{2}{3}ad^3$$

和

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 - atd^2 - \frac{2}{3}at^2d - \frac{1}{6}at^3 - \frac{2}{3}ad^3$$

当然,当采用数值时,结果可化简.

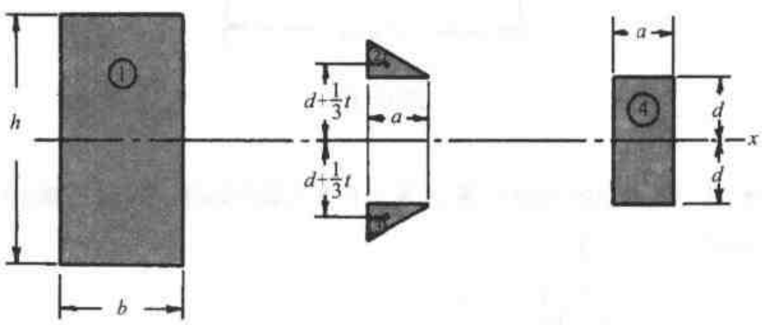


图 15-19

15.14 框子由 2 in 厚板组成(实际尺寸),如图 15-20 所示.求其对平行边的形心轴的轴向惯性矩.

解 ☞ 由观察其形心位于中点.$\bar{I}$ 即为面积 1 和面积 2 关于对过中点轴的轴惯性矩之和的 2 倍.有

$$I_1 = \frac{1}{12}b_1h_1^3 - \frac{1}{12}(2)(8)^3 = 85.3 \text{ in}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12}b_2h_2^3 + A_2d_2^2 = \frac{1}{12}(4)(2^3) + (8)(3^2) = 74.7 \text{ in}^4$$

$$\bar{I} = 2(85.3 + 74.7) = 320 \text{ in}^4$$

另一种求法是由外面的正方形的轴向惯性矩减去里面正方形的惯性矩:

$$\bar{I}_1 = I_0 - \bar{I}_i = \frac{1}{12}b_0h_0^3 - \frac{1}{12}b_ih_i^3 = \frac{1}{12}(8)(8^3) - \frac{1}{12}(4)(4^3) = 320 \text{ in}^4$$

15.15 求图 15-21 所示的 Z 截面对水平中心轴的轴向惯性矩,并求回转半径是多少?

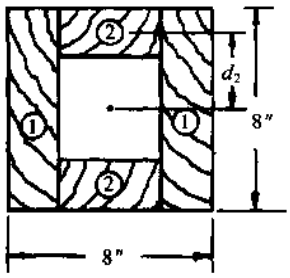


图 15-20

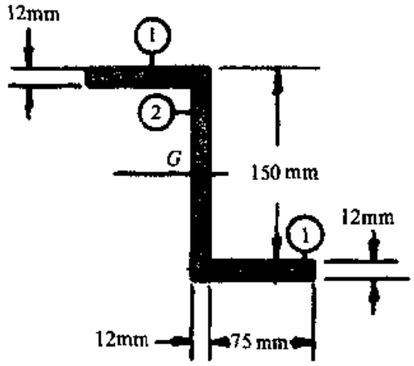


图 15-21

解 本题中，形心轴即是对称轴．则轴向惯性矩 $\overline{I}$ 等于面积 2 和两个面积 1 的轴向惯性矩之和．

$$A = (162)(12) + 2(75 \times 12) = 3.74 \times 10^3\ \mathrm{mm}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{12}b_1h_1^3 + A_1d_1^2 = \frac{1}{12}(75)(12)^3 + (75 \times 12)(75)^2 = 5.07 \times 10^6\ \mathrm{mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12}b_2h_2^3 = \frac{1}{12}(12)(162)^3 = 4.25 \times 10^6\ \mathrm{mm}^4$$

$$\overline{I} = 2I_1 + I_2 = 14.4 \times 10^6\ \mathrm{mm}^4$$

$$k = \sqrt{\frac{\overline{I}}{A}} = \sqrt{\frac{14.4 \times 10^6}{3.74 \times 10^3}} = 62.1\ \mathrm{mm}$$

15.16　高为 h、底边为 b 的矩形，对其邻边的惯性积是多少？

解　由图 15-22(a)，x 和 y 轴分别沿两邻边．

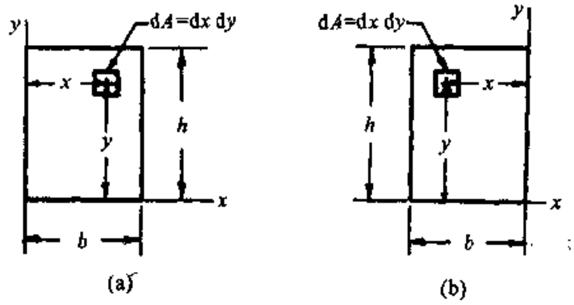


图 15-22

取惯性积为 I_{xy}．则

$$I_{xy} = \int xy\mathrm{d}A = \int_0^h\int_0^b xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^b\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h = \frac{1}{4}b^2h^2$$

另外，选 y 轴沿矩形的右边[见图 15-22(b)]．则

$$I_{xy} = \int_0^h\int_{-b}^0\int xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-b}^0\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h = \left(0 - \frac{1}{2}b^2\right)\left(\frac{1}{2}h^2 - 0\right) = -\frac{1}{4}b^2h^2$$

表明，惯性积的正或负，与面积与轴的相对位置有关．

15.17　求矩形对分别平行于底 b 和高 h 的两形心轴的惯性积．

解 在图 15-23 中，x' 的积分限是 $-\frac{b}{2}$ 到 $\frac{b}{2}$．y' 的积分限是 $-\frac{h}{2}$ 到 $\frac{h}{2}$．则有

$$I_{x'y'} = \int x'y'\mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{h/2}\int_{-b/2}^{b/2} x'y'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = 0$$

此值也可应用惯性积的平行轴定理，从题 15.16 的结果中得到，有

$$I_{xy}=I_{x'y'}+A\left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}h\right)$$

其中$\frac{1}{2}b$和$\frac{1}{2}h$是x,y与x',y'的垂直距离.

$$I_{x'y'}=\frac{1}{4}b^2h^2-bh\left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}h\right)=0$$

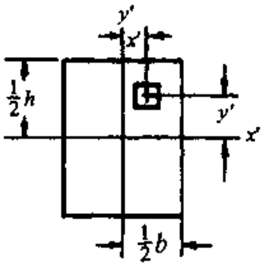


图 15-23

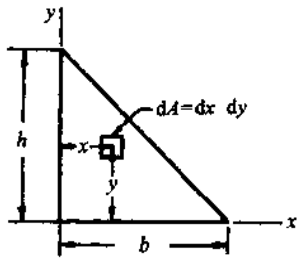


图 15-24

15.18 求直角三角形对其底与高的惯性积,见图 15-24.

解 ☞ 由定义

$$I_{xy}=\int_0^h\int_0^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分的上限 x 依赖 y. 因此它由斜率方程得出,即

$$y=-\frac{h}{b}x+h \quad 得 \quad x=-\frac{b}{h}(y-h)$$

$$I_{xy}=\int_0^h\int_0^{-(b/h)(y-h)}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^h\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{-(b/h)(y-h)}y\mathrm{d}y=\int_0^h\frac{b^2}{2h^2}(y^2-2yh+h^2)y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{24}b^2h^2$$

15.19 求半径为 r 的四分之一圆对两半径轴的惯性积. 使用(a)图 15-25 所示中的微元,(b)图 15-26 所示的微元.

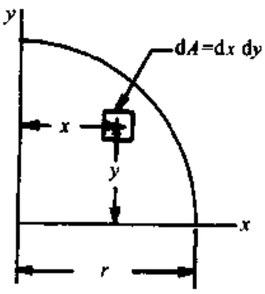


图 15-25

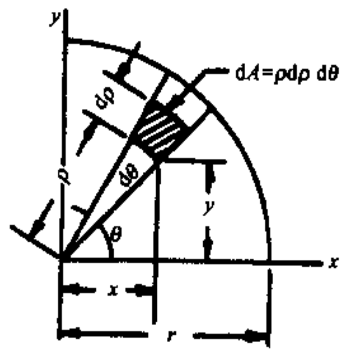


图 15-26

解 ☞ (a) 由定义

$$I_{xy}=\int_0^r\int_0^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里第一个积分的含义是对变量 x 求和,x 依赖 y, 由方程 $x^2+y^2=r^2$. 代入得

$$I_{xy}=\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^r\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{r^2-y^2}}y\mathrm{d}y=\int_0^r\frac{1}{2}(r^2-y^2)y\mathrm{d}y=\frac{1}{8}r^4$$

(b) 同上

$$I_{xy}=\iint xy\mathrm{d}A=\int_0^r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^r\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{4}r^4\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}r^4$$

15.20 在题 15.19 中,当 $r=50$ mm 时,求惯性积.

解 ☞

$$I_{xy} = \frac{1}{8}r^4 = \frac{1}{8}(50)^4 = 7.81\times10^5 \text{ mm}^4$$

15.21 证明面积对其旋转坐标轴(x', y')的惯性矩可以表示为

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos2\theta - I_{xy}\sin2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos2\theta + I_{xy}\sin2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin2\theta + I_{xy}\cos2\theta$$

其中 I_x, I_y 是对(x, y)轴的惯性矩;
$I_{x'}$, $I_{y'}$ 是对(x', y')轴的惯性矩;
I_{xy} 是对(x, y)轴的惯性积;
$I_{x'y'}$ 是对(x', y')轴的惯性积.

解 ☞ 图 15-27 表明,面积的微元是 dA. 由定义

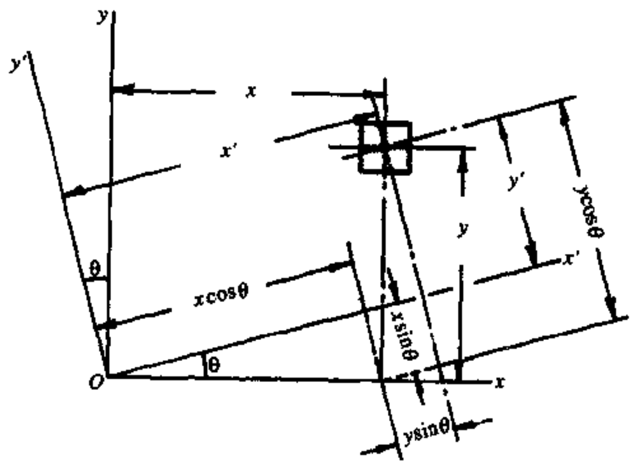


图 15-27

$$I_{x'} = \int y'^2 dA \quad I_{y'} = \int x'^2 dA \quad I_{x'y'} = \int x'y' dA \tag{1}$$

由图得, $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ 和 $y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$. 分别平方得

$$x'^2 = x^2\cos^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\sin^2\theta$$

$$y'^2 = x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2\cos^2\theta$$

及

$$x'y' = -x^2\cos^2\theta\sin^2\theta - xy\sin^2\theta + xy\cos^2\theta + y^2\cos\theta\sin\theta$$

代入方程(1),得

$$I_{x'} = \int x^2\sin\theta dA - \int xy\sin2\theta dA + \int y^2\cos^2\theta dA$$

$$I_{y'} = \int x^2\cos\theta dA + \int xy\sin2\theta dA + \int y^2\sin^2\theta dA$$

$$I_{x'y'} = \int -x^2\cos\theta\sin\theta dA + \int y^2\sin\theta\cos\theta dA + \int xy(\cos^2\theta - \sin^2\theta)dA$$

由于在面积上的积分不依赖于 θ,则上面方程可写为(用 $I_x = \int y^2 dA$, $I_y = \int x^2 dA$ 和 $I_{xy} = \int xy dA$)

$$I_{x'}=I_y\sin^2\theta-I_{xy}\sin2\theta+I_x\cos^2\theta$$

$$I_{y'}=I_y\cos^2\theta+I_{xy}\sin2\theta+I_x\sin^2\theta$$

$$I_{x'y'}=\frac{1}{2}(I_x-I_y)\sin2\theta+I_{xy}\cos2\theta$$

利用 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)$和 $\sin2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)$，最后得到

$$I_{x'}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)+\frac{1}{2}(I_x-I_y)\cos2\theta-I_{xy}\sin2\theta$$

$$I_{y'}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)-\frac{1}{2}(I_x-I_y)\cos2\theta+I_{xy}\sin2\theta$$

$$I_{x'y'}=\frac{1}{2}(I_x-I_y)\sin2\theta+I_{xy}\cos2\theta$$

15.22 求题 15.21 中对主轴(这些轴可得 I 的最大值或最小值)的 $I_{x'}$和 $I_{y'}$之值.

解 ☞ 为了求出 $I_{x'}$最大值时的 θ 角，取 $I_{x'}$对于 θ 的导数等于零.即

$$\frac{\mathrm{d}I_{x'}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2}(I_x-I_y)(-2\sin2\theta)-I_{xy}(2\cos2\theta)=0$$

得

$$\tan2\theta'=\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}$$

这个 θ'的值，即为 $I_{x'}$取得极大值(或极小值)时的 θ 角.应先解出 $\sin2\theta'$和 $\cos2\theta'$，从图 15-28 中可容易得到为

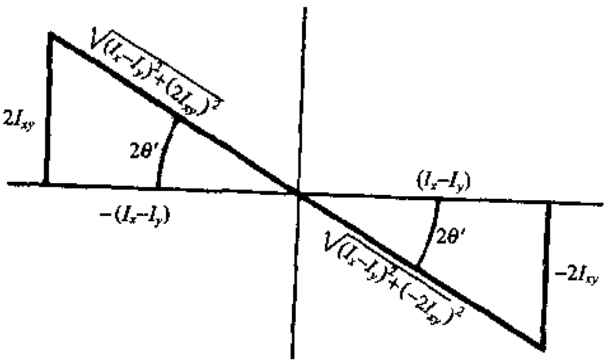


图 15-28

$$\cos2\theta'=\pm\frac{I_x-I_y}{\sqrt{(I_x-I_y)^2+4I_{xy}^2}},\qquad \sin2\theta'=\mp\frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_x-I_y)^2+4I_{xy}^2}}$$

代入这些值并且化简得到

$$I_{x'}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)\pm\sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x-I_y)^2+4I_{xy}^2\right]}$$

由 $I_{y'}$对 θ 的导数等于零，得到使 $I_{y'}$为极大值(或极小值)时的相同的 θ'值.代入 $\sin2\theta'$和 $\cos2\theta'$之值得

$$I_{y'}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)\mp\sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x-I_y)^2+4I_{xy}^2\right]}$$

由 $I_{y'}$对应的 θ'值的根号前为负号，$I_{x'}$对应 θ'之值的根号前为正号，因此，总结关于主轴的结果是：$I_{x'}$是极大值，而 $I_{y'}$是极小值.注意到在这个特殊的 θ'之(主轴)时，有

$$I_{x'y'}=\frac{1}{2}(I_x-I_y)\sin2\theta+I_{xy}\cos2\theta=0$$

15.23 已知面积对(x,y)轴的 I_x, I_y 和 I_{xy}. 可以用莫尔圆，由图解方法确定出，关于(x,y)坐标轴逆时针转动 θ 角时的(x',y')坐标轴所对应的 $I_{x'}$, $I_{y'}$和 $I_{x'y'}$.

解 ☞ 图 15-29(a)画出了定位轴.在图 15-29(b)中画出一套对应直线.对应任意轴的惯性矩 I

都落在垂直线的右边；而惯性积都落在水平线以上或以下.

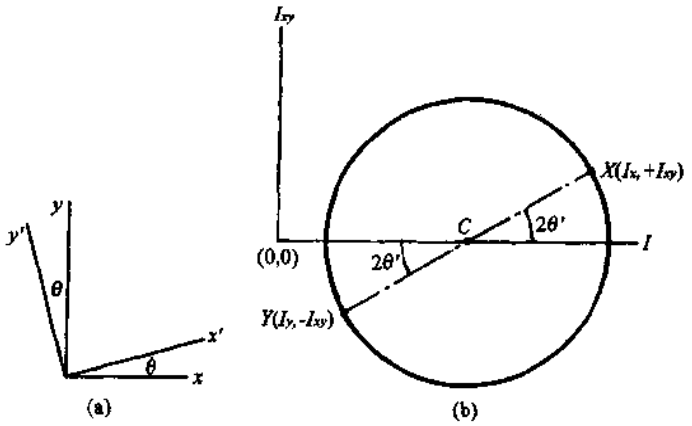


图 15-29

设 $I_x > I_y$ 和 I_{xy} 都是正的，X 点位置坐标(I_x, $+I_{xy}$)，Y 点位置的坐标(I_y, $-I_{xy}$). 作连线 XY 与水平线交于 C 点如图示. 以 C 为圆心画圆且 X 和 Y 在圆上(见图 15-30).

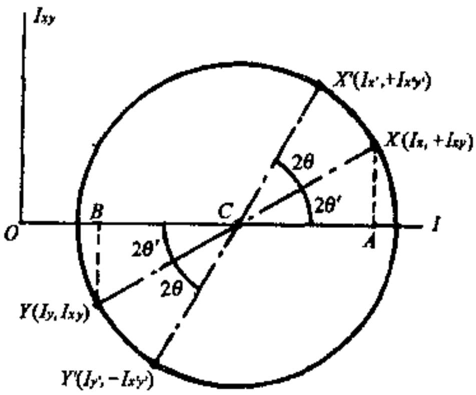


图 15-30

再画一直线，该线是 XY 直线逆时针转方向旋转 2θ 的位置. 则坐标 X' 和 Y' 即是 $I_{x'}$, $I_{y'}$ 和 $I_{x'y'}$ 之值.

这些值求出如下. 画铅垂线 XA 和 YB，距离 $BC = CA = \frac{1}{2}(I_x - I_y)$.

距离 XA 是 I_{xy}. 圆的半径 CX 是直角三角形 ACX 的斜边，因此，对任意半径都等于 $\sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$.

X' 的 I 坐标等于 O 到中心 $\frac{1}{2}(I_x + I_y)$ 的距离加上 CX' 区在水平轴上的投影. CX'(半径)与水平 I 轴的夹角是($2\theta + 2\theta'$). $2\theta'$ 是题 15.22 求出的对应极大值 $I_{x'}$ 的角.

$$CX' \text{ 的投影} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}\,[\cos(2\theta + 2\theta')]$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}\,[\cos2\theta\cos2\theta' - \sin2\theta\sin2\theta'] \qquad (1)$$

将 $\cos2\theta' = \frac{CA}{CX} = \frac{\frac{1}{2}(I_x - I_y)}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}}$ 和 $\sin2\theta' = \frac{AX}{CX} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}}$ 代入方程(1)并化简，得到

$$CX' \text{ 区的投影} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos2\theta - I_{xy}\sin2\theta$$

因此有

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

同样地，

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

注意到，最大值 I 出现在圆的直径的右端，其值等于圆心到 O 的距离加上半径. 即有

$$I_{\max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$$

最小值在直径的左端为

$$I_{\min} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \sqrt{\frac{1}{2}(I_x - I_y)^2 + I_{xy}^2}$$

15.24 求图 15-31 所示不等角面积的主形心惯性矩.

解 ☞ 首先在图示坐标(x'', y'')中确定角的形心的位置. 将角分解为 A 和 B 两部分.

$$\bar{x}'' = \frac{5(1)(3.5) + 8(1)(0.5)}{5(1) + 8(1)} = 1.65 \text{ in}$$

$$\bar{y}'' = \frac{5(1)(0.5) + 8(1)(4)}{13} = 2.65 \text{ in}$$

其次，通过形心 G 作(x, y)轴(如图). 利用平行移轴定理，分别与 A 和 B 的中心轴平行，确定 I_x 和 I_y.

$$I_x = \frac{1}{12}(5)(1)^3 + 5(2.15)^2 + \frac{1}{12}(1)(8)^3 + 8(1.35)^2 = 80.8 \text{ in}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(1)(5)^3 + 5(1.85)^2 + \frac{1}{12}(8)(1)^3 + 8(1.15)^2 = 38.8 \text{ in}^4$$

为了求主惯性矩，需先求出惯性积 I_{xy}. 求 I_{xy} 也需利用平行移轴定理，分别与 A 和 B 的中心轴平行. 但要注意到，面积 A 和 B 关于对其形心的惯性积应等于零，这是由于形心轴是对称的原因. 因此，表示出平移的距离，I_{xy} 得，

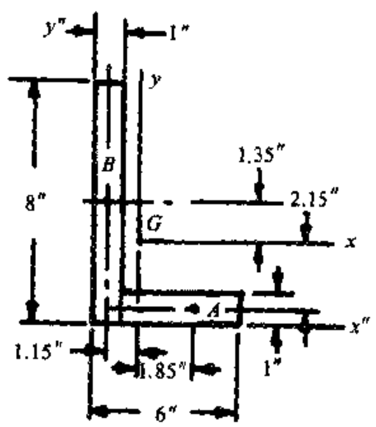


图 15-31

$$I_{xy} = 0 + (8 \times 1)(-1.15)(+1.35) + 0 + (5 \times 1)(+1.85)(-2.15)$$
$$= -32.3 \text{ in}^4$$

注意：平移距离的正、负号对于求解惯性积是重要的. 在上面方程中，数值 1.85 和 −2.15 是 A 的形心关于(x, y)轴上的坐标；数值 −1.15 和 +1.35 是 B 的形心关于(x, y)轴上的坐标.

用莫尔圆的分析可以确定主惯性矩的数值和它们的轴. 点 x 和 y 的位置如图 15-32 所示，用 xy 作为直径画一个圆.

圆的中心的位置是 $\frac{1}{2}(I_x + I_y) = 59.8$，圆的半径是 $\sqrt{(21)^2 + (32.3)^2} = 38.5$. 这样，惯性矩 I 的最大值是 $59.8 + 38.5 = 98.3$ in^4，其出现在 y 轴顺时针转过 θ' 角上，其 $\theta' = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{32.3}{21}\right) =$

28.5°，惯性矩 I 的最小值 $59.8-38.5=21.3\ \text{in}^4$，位于 x 轴顺时针转动的 θ' 角上，如图 15-33 所示.

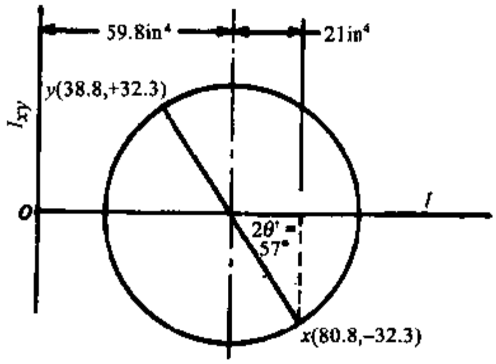


图 15-32

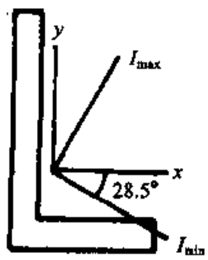


图 15-33

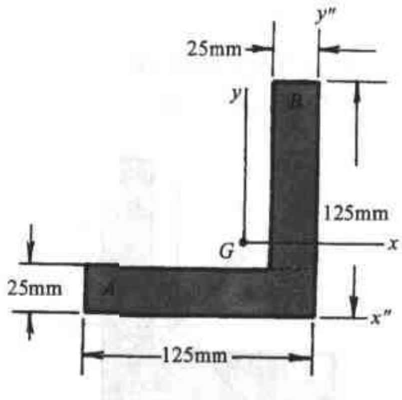


图 15-34

15.25 计算 L 截面的主形心惯性矩，见图 15-34.

解 ☞ 首先确定 L 截面的形心. 将其分为 A 和 B 两部分面积.

$$\bar{x}'' = \frac{-(25)(125)(125/2)-(25)(100)(125/2)}{(25)(125)+(25)(100)} = -40.3\ \text{mm}$$

$$\bar{y}'' = \frac{-(25)(125)(125/2)+(25)(100)(125/2)}{5625} = +40.3\ \text{mm}$$

形心为底边之上 40.3 mm，右边界之左 40.3 mm.

其次，需确定总面积关于对过形心轴 (x, y) 的 I_x，I_y 和 I_{xy} 之值. 这将利用平行移轴定理，分别与 A 和 B 部分的形心轴平行：

$$I_x = \frac{1}{12}(125)(25)^3 + 125\times 25(40.3-12.5)^2 + \frac{1}{12}(125)(100)^3 + 25\times 100(75-40.3)^2$$
$$= 7.67\times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(125)(25)^3 + 125\times 25(62.5-40.3)^2 + \frac{1}{12}(125)(25)^3 + 100\times 25(40.3-12.5)^2$$
$$= 7.67\times 10^6\ \text{mm}^4$$

第二个方程可校核第一个方程. 因为 L 截面的各边也相等.

$$I_{xy} = 0 + (125)(25)(+22.2)(+27.8) + 0 + (100)(25)(-27.8)(-34.7)$$
$$= 4.43\times 10^6\ \text{mm}^4$$

使用画出的莫尔圆，则点 X 对应 I_x 和 I_{xy}，即 7.67×10^6 和 $+4.34\times 10^6$；点 Y 对应 I_x 和 $-I_{xy}$，即有 7.67×10^6 和 -4.34×10^6. 很明显半径是 4.34×10^6. 见图 15-35. 因此，有

$$I_{max} = 7.67\times 10^6 + 4.34\times 10^6 = 12.0\times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_{min} = 7.67\times 10^6 - 4.34\times 10^6 = 3.33\times 10^6\ \text{mm}^4$$

在莫尔圆上主轴是 $2\theta = 90°$，在原图上在 45°位置. 莫尔圆上的最大值是 X 点顺时针转 90°的点；在原

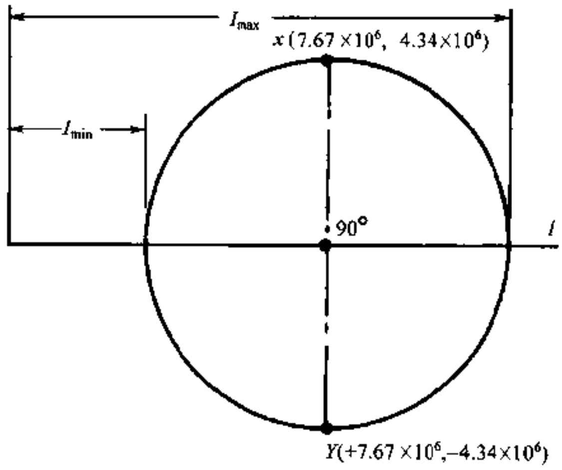


图 15-35

图上则位于 x 顺时针转 45°上．同样地，其最小值是 Y 点顺时针转 90°；在原图上是 y 顺时针转 45°上，如图 15-36 所示．

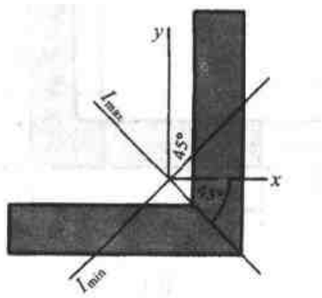


图 15-36

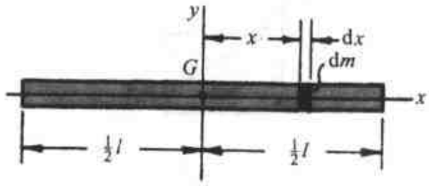


图 15-37

15.26　杆长为 l，质量为 m，及分隔的小段如图 15-37 所示．试写出该杆关于垂直于形心轴的惯性矩的表达式．并求回转半径．

解　由定义

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m$$

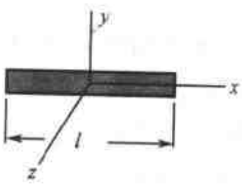
其中 $\mathrm{d}m$ 是杆 $\mathrm{d}x$ 长的部分的质量．质量 $\mathrm{d}m$ 是全部质量 m 的 $\frac{\mathrm{d}x}{l}$ 倍，即 $\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}x}{l}m$．
因此，有

$$I_y = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{12}ml^2$$

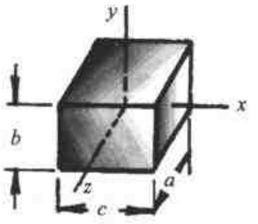
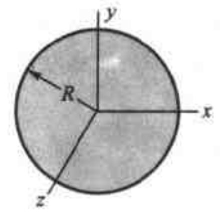
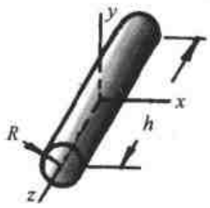
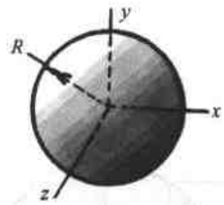
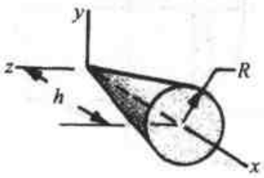
回转半径 $k = \sqrt{I_y/m} = l/\sqrt{12}$．

简单形状的质量的中心轴惯性矩列表如下，表中列出的结果可为相关例题用于参考．

表 15-2　质量的中心惯性矩

例题	图形	名称	I_x	I_y	I_{xy}
15.26		细长杆	—	$\frac{1}{2}ml^2$	$\frac{1}{12}ml^2$

续表

例题	图形	名称	I_x	I_y	I_{xy}
15.28		长方体	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$	$\frac{1}{12}m(a^2+c^2)$	$\frac{1}{2}m(b^2+c^2)$
15.29		薄圆盘	$\frac{1}{4}mR^2$	$\frac{1}{4}mR^2$	$\frac{1}{2}mR^2$
15.32 15.33		圆柱体	$\frac{1}{12}m(3R^2+h^2)$	$\frac{1}{2}m(3R^2+h^2)$	$\frac{1}{2}mR^2$
15.34		球	$\frac{2}{3}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$
15.36		正圆锥	$\frac{3}{10}mR^2$	$\frac{2}{5}m\left(\frac{1}{4}R^2+h^2\right)$	$\frac{3}{5}m\left(\frac{1}{4}R^2+h^2\right)$

15.27 试写出长为 l 的杆关于对其端点并垂直于杆的轴的惯性矩.设杆质量为 m,并且分割长度为 dx.见图 15-38.

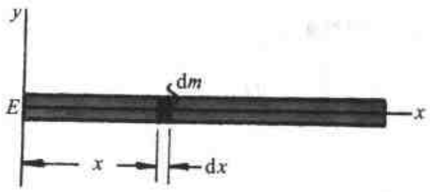


图 15-38

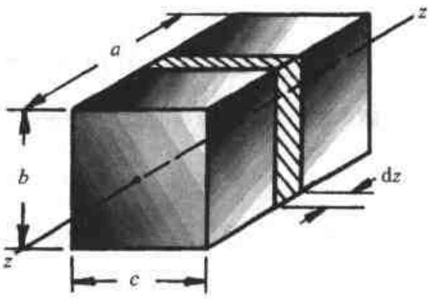


图 15-39

解 ☞ 由题 15.26 写出

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \int_0^l x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}ml^2$$

使用平行移轴定理，可得到相同的结果.

$$I_E = \bar{I} + m\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

15.28 求矩形六面体(物块)对于过垂直正面形心轴的惯性矩.

解 ☞ 由图 15-39 可以看到，物块对于 z 轴的惯性矩等于系列厚度为 $\mathrm{d}z$，横截面为 $b\times c$，质量为 $\mathrm{d}m$ 的薄板惯性矩之和.

首先求具有截面为 $b\times c$，厚度为 $\mathrm{d}z$ 并且质量是 $\mathrm{d}m$ 的薄板的 I_z(见图 15-40).

由于 $I_z = I'_x + I'_y$，因此应先求 I'_x 和 I'_y，才能求 I_z. 而 I'_x 是一系列质量为 $\mathrm{d}m'$、高为 b，并略去截面尺寸($\mathrm{d}x'\times\mathrm{d}z$)的杆的形心惯性矩之和. 根据题 15.26，可写成

$$I'_x = \int \frac{1}{12}\mathrm{d}m' b^2 = \frac{1}{12}b^2\mathrm{d}m$$

同样理由得到

$$I'_y = \int \frac{1}{12}\mathrm{d}m' c^2 = \frac{1}{12}c^2\mathrm{d}m$$

质量为 $\mathrm{d}m$ 的薄板的 I_z 等于 $I'_x + I'_y$，即 $I_z = \frac{1}{12}\mathrm{d}m(b^2+c^2)$.

对于整个物块，应得到

$$I_z = \int \frac{1}{12}\mathrm{d}m(b^2+c^2) = \frac{1}{12}m(b^2+c^2)$$

更严密些，应是 $\mathrm{d}m = (\mathrm{d}z/a)\mathrm{d}m$，则有

$$I_z = \int_0^a \frac{1}{12}\frac{m}{a}(b^2+c^2)\mathrm{d}z = \frac{1}{12}m(b^2+c^2)$$

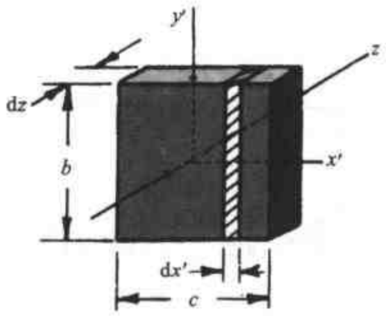


图 15-40

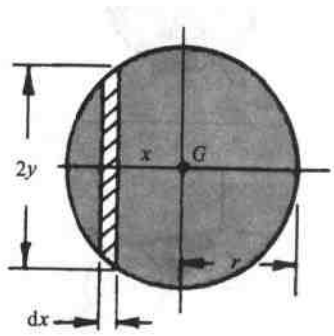


图 15-41

15.29 求半径为 r，密度为 δ 的均质薄圆盘对于直径轴的惯性矩.

(a) 认为圆盘是由横截面是 $\mathrm{d}x\times t$，并具有变化高度 $2y$ 的薄杆组成，如图 15-41 所示.

(b) 研究的微元体如图 15-42 所示.

解 ☞ (a) 选择条的质量是 $\mathrm{d}m = 2\delta ty\mathrm{d}x$. 由题 12.26 得惯性矩是 $\frac{1}{12}\mathrm{d}m(2y)^2$. 对于整个盘有

$$I_x = \int_{-r}^{r} \frac{1}{12}(2)\delta ty\mathrm{d}x(2y)^2 = \int_{-r}^{r} \frac{2}{3}\delta ty^3\mathrm{d}x$$

由 $y = \sqrt{r^2-x^2}$ 并代入，得到

$$I_x = \int_{-r}^{r} \frac{2}{3}\delta t\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\delta t\left[\frac{1}{4}x\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3 - \frac{3}{8}r^2x\sqrt{\sqrt{r^2-x^2}} + \frac{3}{8}r^4\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r}$$

结果是

$$I_x = \frac{2}{3}\delta t\frac{3}{8}r^4\left[\frac{1}{2}\pi - \left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right] = \frac{1}{4}(\pi r^2\delta t)r^2 = \frac{1}{4}mr^2$$

(b)

$$I_x = \int\rho^2\sin\theta\mathrm{d}m = \int_0^{2\pi}\int_0^r\rho^2\sin^2\theta\delta t\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \delta t\int_0^{2\pi}\int_0^r\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \delta t\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \delta t\left(\frac{1}{4}r^4\right)\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \delta t\left(\frac{1}{4}r^4\right)\left(\frac{1}{2}\times 2\pi\right) = \frac{1}{4}(\delta t\pi r^2)r^2 = \frac{1}{4}mr^2$$

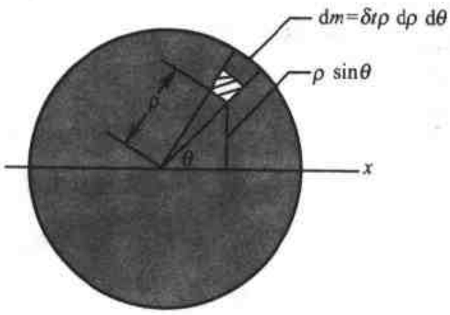


图 15-42

15.30 设题15.29中的圆盘是由钢制成的，其比重是490 lb/ft^3. 圆盘厚度为0.02 in, 直径为4 in. 求其对于直径的惯性矩.

解 圆盘重是

$$\pi r^2 t\delta = \frac{\pi(2)^2(0.02)\times 490}{1728} = 0.071\ \mathrm{lb}$$

它的质量是0.071/32.2=0.0022 slugs, 其惯性矩是

$$\frac{1}{4}mr^2 = \frac{1}{4}(0.0022)\left(\frac{2}{12}\right)^2 = 15\times 10^{-6}\ \mathrm{slug\cdot ft^2}$$

15.31 证明题15.29中的薄圆盘的极惯性矩是$\frac{1}{2}mr^2$. 并求它的回转半径是多少? 见图15-43.

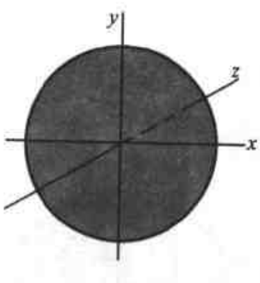


图 15-43

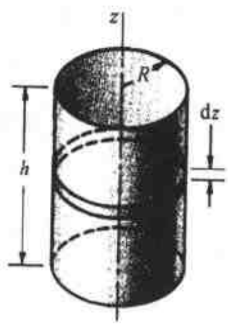


图 15-44

解 由于 $I_y = I_x = \frac{1}{4}mr^2$, 则极惯性矩 I_z 是

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{2}mr^2$$

回转半径是

$$k=\sqrt{\frac{I_z}{m}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2}{m}}=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

15.32　求半径为 R，质量为 m 的正圆柱体对于几何轴的惯性矩．见图 15-44．

解　☞ 认为圆柱体是由许多高为 $\mathrm{d}z$ 的薄圆盘组成，如图示．

对于薄圆盘(题 15.31)有

$$I_z=\frac{1}{2}(\mathrm{d}m)R^2=\frac{1}{2}\left(m\frac{\mathrm{d}z}{h}\right)R^2$$

对于整个圆柱体有

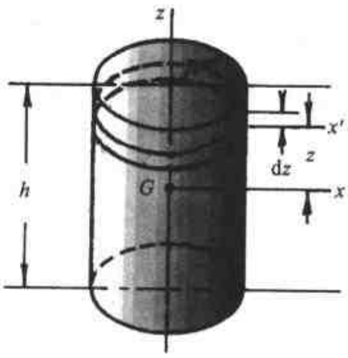


图 15-45

$$I_z=\int_0^h\frac{1}{2}\frac{m\mathrm{d}z}{h}R^2=\frac{1}{2}mR^2$$

15.33　求半径为 R，质量为 m 的正圆柱体对于形心 x 轴的惯性矩，如图 15-45．并求回转半径是多少？

解　☞ 由题 15.32，认为圆柱体是由许多高 $\mathrm{d}z$，质量是 $m\frac{\mathrm{d}z}{h}$的薄圆盘组成．薄圆盘关于对平行于 x'轴的惯性矩由题 15.29 可知，$I_{x'}=\frac{1}{4}\left(m\frac{\mathrm{d}z}{h}\right)R^2$．由平行轴定理

$$I_x=I_{x'}+\frac{m\mathrm{d}z}{h}z^2=\frac{1}{4}\frac{m\mathrm{d}z}{h}R^2+\frac{m\mathrm{d}z}{h}z^2$$

为了求出整个圆柱体的 I_x，将所有圆盘的惯性矩求和，得

$$I_x=\frac{mR^2}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\mathrm{d}z+\frac{m}{h}\int_{-h/2}^{h/2}z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}mh^2$$

$$=\frac{1}{12}m(3R^2+h^2)$$

$$k=\sqrt{\frac{I_x}{m}}=\sqrt{\frac{1}{12}(3R^2+h^2)}$$

15.34　求质量为 m，半径为 R 的球对于直径的惯性矩．并求回转半径是多少？

解　☞ 选择薄盘平行于 xz 平面如图 15-46 所示．设密度为 δ．

半径为 x 的薄圆盘关于对 y 轴的惯性矩是$\frac{1}{2}(\mathrm{d}m)x^2$．为求整球的 I_y，应将薄圆盘的惯性矩求和，其中 $\mathrm{d}m=\delta\mathrm{d}V=\delta(\pi x^2\mathrm{d}y)$，得到

$$I_y=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(\delta\pi x^2\mathrm{d}y)x^2=\frac{1}{2}\pi\delta\int_{-R}^{R}x^4\mathrm{d}y$$

球体在 xy 平面中的横截面(圆)方程是 $x^2+y^2=R^2$，则有

$$I_y=\frac{1}{2}\pi\delta\int_{-R}^{R}(R^2-y^2)^2\mathrm{d}y=\frac{8}{15}\delta\pi R^5$$

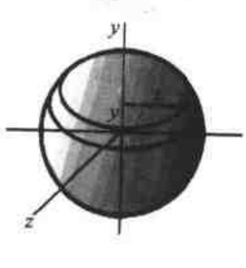


图 15-46

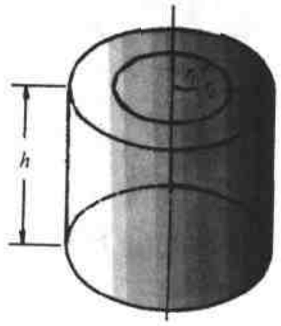


图 15-47

因为质量是 $m=\frac{4}{3}R^2\delta$，得到

$$I_y=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\delta\right)\left(\frac{2}{5}R^2\right)=\frac{2}{5}mR^2$$

回转半径 $k=\sqrt{I_y/m}=\sqrt{2/5}R$.

15.35 求空心均质圆柱体对于几何轴的惯性矩. 见图 15-47.

解 ☞ 对于外面圆柱体，$(I_z)_o=\frac{1}{2}m_o r_o^2=\frac{1}{2}(\pi r_o^2 h\delta)r_o^2$

对于里面圆柱体，$(I_z)_i=\frac{1}{2}m_i r_i^2=\frac{1}{2}(\pi r_i^2 h\delta)r_i^2$

对于管子，$(I_z)=(I_z)_o-(I_z)_i=\frac{1}{2}\pi\delta h(r_o^2+r_i^2)(r_o^2-r_i^2)$

整理得

$$I_z=\left(\frac{1}{2}h\pi\delta r_o^2-\frac{1}{2}h\pi\delta r_i^2\right)(r_o^2+r_i^2)$$

$$=\left(\frac{1}{2}m_o-\frac{1}{2}m_i\right)(r_o^2+r_i^2)=\frac{1}{2}m(r_o^2+r_i^2)$$

其中 m 表示管子的质量.

15.36 求正圆锥体对于 x 和 y 轴的惯性矩. 尺寸如图 15-48 所示. 如果圆锥质量是500 kg，半径 $R=250$ mm，高 $h=500$ mm，证明 $I_x=9.38\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ 和 $I_y=79.7\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

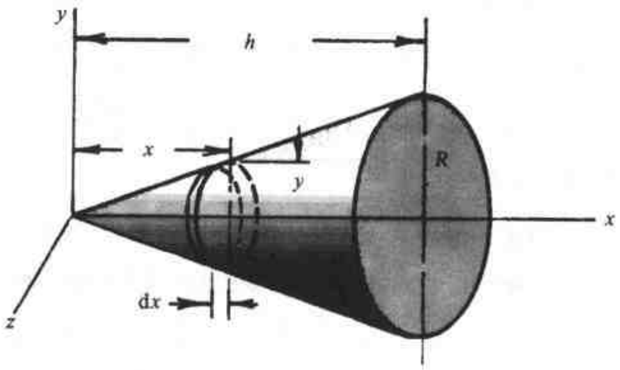


图 15-48

解 ☞ 为求 I_x，选择分割出的垂直于 x 轴的薄片如图 15-48 所示. 设密度为 δ.

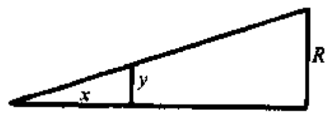


图 15-49

半径为 y 的薄片关于对 x 轴的惯性矩是 $\frac{1}{2}(dm)y^2$，可将分成薄片的惯性矩求和，得到整个圆锥的 I_x. 应注意到 $dm=\delta dV=\delta(\pi y^2 dx)$. 由 $y=\frac{Rx}{h}$（见图 15-49），得

$$I_x=\int_0^h\frac{1}{2}\delta(\pi y^2dx)y^2=\int_0^h\frac{1}{2}\delta\pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^4dx=\frac{1}{10}\delta\pi R^4h$$

整个圆锥的质量是 $\frac{1}{3}\pi\delta R^2h$. 则可写成

$$I_x=\left(\frac{1}{3}\pi R^2h\delta\right)\left(\frac{3}{10}R^2\right)=\frac{3}{10}mR^2$$

为求 I_y，且 $I_y=I_z$，应利用平行轴定理，得到薄片关于对 y 轴的惯性矩. 再由 $y=\frac{Rx}{h}$，得

$$I_y=\int\left(\frac{1}{4}dmy^2+dmx^2\right)=\int_0^h(\delta\pi y^2dx)\left(\frac{1}{4}y^2+x^2\right)$$

$$=\int_0^h\frac{1}{4}\pi\delta\left(\frac{R^4}{h^4}\right)x^4dx+\int_0^h\pi\delta\left(\frac{R^2}{h^2}\right)x^4dx=\frac{1}{20}\pi\delta R^4h+\frac{1}{5}\pi\delta R^2h^3$$

由 $m=\frac{1}{3}\pi\delta R^2h$，表达式变为 $I_y=\frac{3}{20}mR^2+\frac{3}{5}mR^2=\frac{3}{5}m\left(\frac{1}{4}R^2+h^2\right)$.

对于数值部分有

$$I_x = 0.3(500)(0.25)^2 = 9.38\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

和

$$I_y = \frac{3}{5}(500)\left[\frac{1}{4}(0.25)^2 + (0.5)^2\right] = 79.7\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

15.37　计算图 15-50 所示的铸铁飞轮的惯性矩. 铸铁重 450 lb/ft^3.

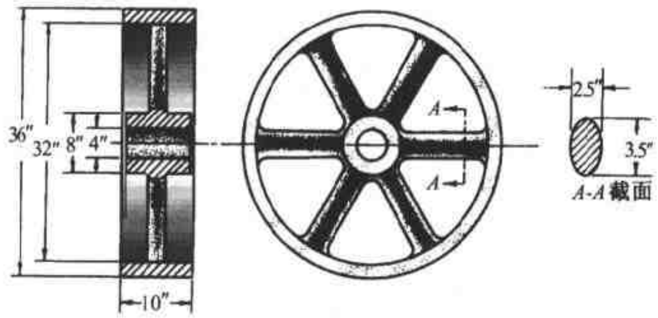


图 15-50

解　在问题分析中, 认为轮毂和轮缘是空心圆柱, 轮辐则是细杆. 首先计算各部分重:

$$W_{毂} = (\pi r_o^2 - \pi r_i^2)h\delta = \pi\left[\left(\frac{4}{12}\right)^2 - \left(\frac{2}{12}\right)^2\right]\left(\frac{9}{12}(450)\right) = 88.2\ \mathrm{lb}$$

$$W_{缘} = (\pi r_o^2 - \pi r_i^2)h\delta = \pi\left[\left(\frac{8}{12}\right)^2 - \left(\frac{16}{12}\right)^2\right]\left(\frac{10}{12}(450)\right) = 556\ \mathrm{lb}$$

对于轮辐, 设为椭圆截面, 有

$$W_{辐} = \pi abl\delta = \pi\left(\frac{2.5}{24}\right)\left(\frac{3.5}{24}\right)\left(\frac{2}{12}\right)(450) = 21.5\ \mathrm{lb}$$

再计算各部分关于轴的 I. 对于轮辐, 需应用移轴定理, 即平行中心轴移动.

$$I_{毂} = \frac{1}{2}m(\pi r_o^2 + \pi r_i^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{88.2}{32.2}\right)\left[\left(\frac{4}{12}\right)^2 + \left(\frac{2}{12}\right)^2\right] = 0.19\ \mathrm{lb\text{-}s^2\text{-}ft}$$

$$I_{缘} = \frac{1}{2}m(\pi r_o^2 + \pi r_i^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{556}{32.2}\right)\left[\left(\frac{18}{12}\right)^2 + \left(\frac{16}{12}\right)^2\right] = 34.8\ \mathrm{lb\text{-}s^2\text{-}ft}$$

$$I_{辐} = 6\left(\frac{1}{12}ml^2 + md^2\right) = 6\left[\frac{1}{12}\left(\frac{21.5}{32.2}\right)\left(\frac{12}{12}\right)^2 + \left(\frac{21.5}{32.2}\right)\left(\frac{10}{12}\right)^2\right] = 3.11\ \mathrm{lb\text{-}s^2\text{-}ft}$$

$$I_{轮} = (0.19 + 34.8 + 3.11)\ \mathrm{lb\text{-}s^2\text{-}ft} = 38.1\ \mathrm{lb\text{-}s^2\text{-}ft}$$

补充习题*

15.38　矩形底是 2 in, 高是 6 in. 计算其对于平行于底边过重心的轴的惯性矩.
答案: 36 in^4.

15.39　求底为 150 mm, 边为 125 mm 的等腰三角形对于其底的惯性矩.
答案: 12.5×10^6 mm^4.

15.40　求半径为 2 ft 的圆对于直径的惯性矩.
答案: 12.6 ft^4.

15.41　求抛物线 $y = 9 - x^2$ 与 x 轴围成的面积对于 y 轴的惯性矩.
答案: 324/5.

15.42　求曲线 $y = \cos x$ 从 $x = 0$ 到 $x = \frac{1}{2}\pi$ 和 x 轴围成面积对于每个坐标轴的惯性矩.
答案: $I_x = \frac{2}{9}$, $I_y = \frac{1}{4}\pi^2 - 2$.

15.43　求曲线 $y = \sin x$ 从 $x = 0$ 到 $x = \pi$ 和 x 轴围成面积对于每个坐标轴的惯性矩.

* 表 15.1 可用于数值计算问题.

答案：$I_x=\frac{4}{9}$，$I_y=\pi^2-4$.

15.44　见图 15-51. 求组合图形对于平行于底边的重心轴的惯性矩. 求回转半径是多少?

答案：46.3 in^4, 2.24 in.

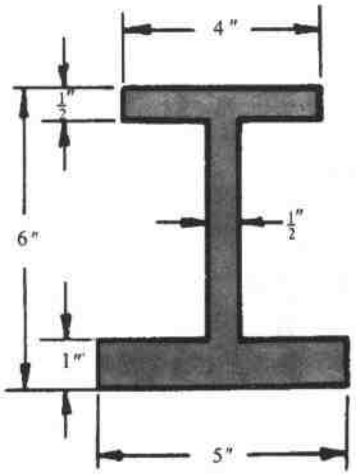


图 15-51

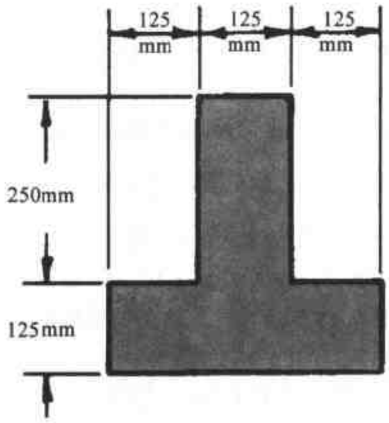


图 15-52

15.45　求图 15-52 中组合图形对于水平形心轴的惯性矩.

答案：883×10^6 mm^4.

15.46　求图 15-53 中组合图形对于平行于 250 mm 边的形心轴的惯性矩. 并求回转半径是多少?

答案：1.35×10^6 mm^4, 21.1 mm.

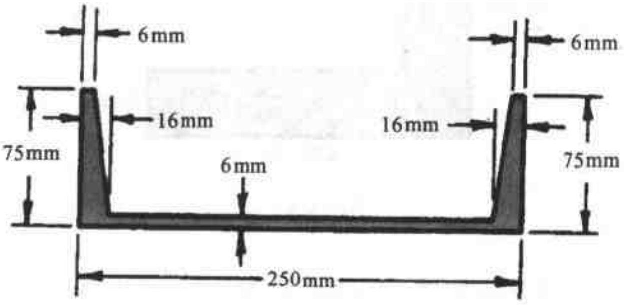


图 15-53

15.47　求图 15-54 中组合图形对于水平形心轴的惯性矩.

答案：12.8 in^4.

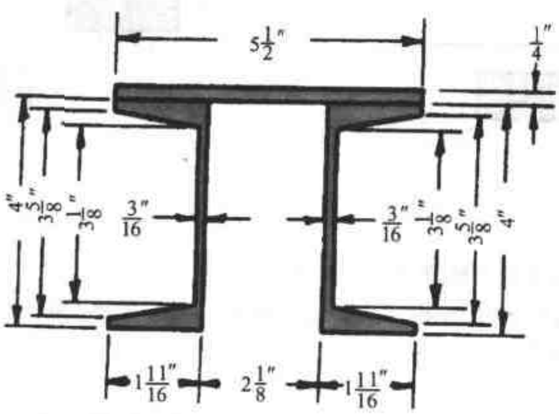


图 15-54

15.48 直径 80 mm 的圆对于垂直于自身平面的重心轴的极惯性矩是多少？
答案：$4.02\times10^6\ \mathrm{mm}^4$.

15.49 计算底为 100 mm，高为 80 mm 的矩形关于两邻边的惯性积.
答案：$16\times10^6\ \mathrm{mm}^4$.

15.50 计算底为 150 mm，高为 100 mm 的矩形关于两邻边的惯性积.
答案：$56.3\times10^6\ \mathrm{mm}^4$.

15.51 求由 x 轴、直线 $x=a$ 和曲线 $y=(b/a^n)x^n$ 围成面积的 I_x，I_y 和 I_{xy} 之值.
答案：$I_x=ab^3/3(3n+1)$，$I_y=a^3b/(n+3)$，$I_{xy}=a^2b^2/2(2n+2)$.

15.52 在上题中，当 $n=1$ 时面积成为三角形. 利用直接积分查验其值.
答案：$I_x=\dfrac{1}{12}ab^3$，$I_y=\dfrac{1}{4}a^3b$，$I_{xy}=\dfrac{1}{8}a^2b^2$.

15.53 求由 y 轴，直线 $y=b$ 和曲线 $y=(b/a^n)x^n$ 围成面积的 I_x，I_y 和 I_{xy} 之值.
答案：$I_x=nab^3/(3n+1)$，$I_y=na^3b/3(n+3)$，$I_{xy}=na^2b^2/4(n+1)$.

15.54 将题 15.51 和题 15.53 的图形合在一起为一矩形，验证其合惯性矩 I_x 与 15.1 的结果一致；其合惯性矩 I_{xy} 与 15.16 的结果一致.

15.55 求图 15-52 的 I_y 和 I_{xy}. 其中 x，y 轴过形心.
答案：$I_y=590\times10^6\ \mathrm{mm}^4$，$I_{xy}=0$.

15.56 求图 15-55 中所示的不等边角钢对于过形心的 x，y 轴的 I_x，I_y 和 I_{xy} 之值.
答案：$I_x=63.5\times10^6\ \mathrm{mm}^4$，$I_y=114\times10^6\ \mathrm{mm}^4$，$I_{xy}=-46.9\times10^6\ \mathrm{mm}^4$.

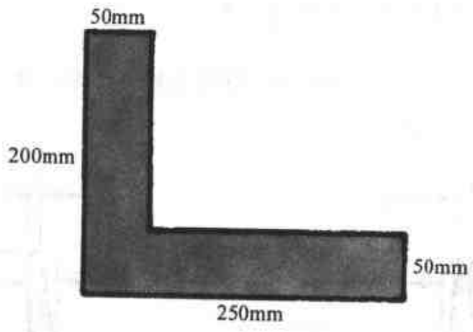


图 15-55

15.57 在上题中用莫尔圆定出主轴并求主惯性矩（见图 15-56）.
答案：$I_{max}=142\times10^6\ \mathrm{mm}^4$，$y$ 轴顺时针转 30.9°，$I_{min}=35.5\times10^6\ \mathrm{mm}^4$ 在 x 轴顺时针转 30.9°.

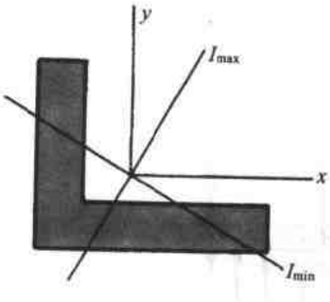


图 15-56

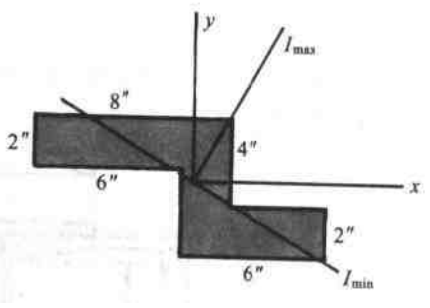


图 15-57

15.58 确定图 15-57 所示面积的主轴，并求其主惯性矩.
答案：$I_{max}=373\ \mathrm{in}^4$，$y$ 轴顺时针转 28.8°，$I_{min}=35.5\ \mathrm{in}^4$ 在 x 轴顺时针转 28.8°.

15.59 求图 15-58 中阴影面积的 $\bar{I}_x$.
答案：$17.9\ \mathrm{in}^4$.

15.60 图 15-59 所示是从半径为 r 的圆中减去一个边长为 r 的正方形而形成的面积. 求其形成面积的 $\bar{I}_x$.
答案：$\bar{I}_x=0.702r^4$.

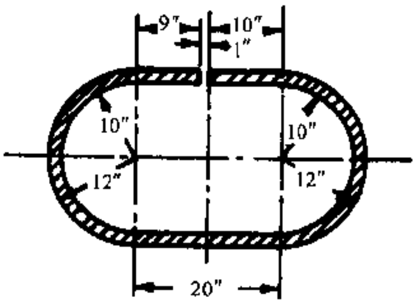


图 15-58

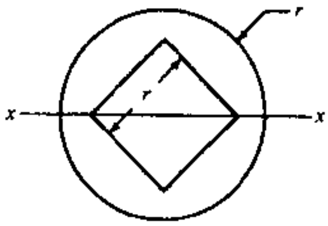


图 15-59

15.61 图 15-60 所示,是从边长为 80 mm 的正方形中减去一个半径为 20 mm 的圆而形成的面积.求形成面积的 $\bar{I}_x$.

答案:$\bar{I}_x = 3.29 \times 10^6\ \mathrm{mm}^4$.

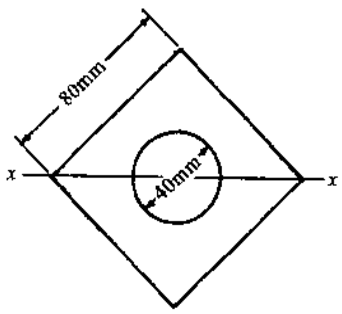


图 15-60

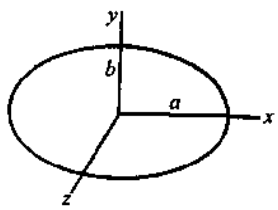


图 15-61

15.62 求图 15-61 中,质量为 m 的椭圆薄盘的惯性矩.参考题 15.29.

答案:$I_x = \frac{1}{4}mb^2, I_y = \frac{1}{4}ma^2, I_z = \frac{1}{4}m(a^2+b^2)$.

15.63 求图 15-62 中,质量为 m 的椭圆旋转体的惯性矩.

答案:$I_x = \frac{2}{5}mb^2, I_y = I_z = \frac{1}{5}m(a^2+b^2)$.

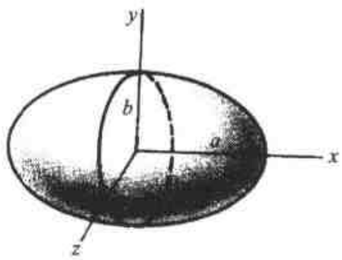


图 15-62

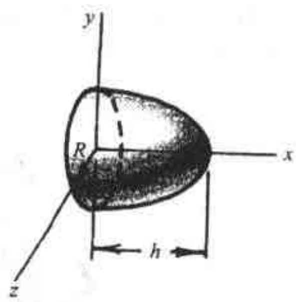


图 15-63

15.64 求图 15-63 中,质量为 m 的抛物线旋转体的惯性矩.其在 xy 平面的方程是 $y^2 = -(R^2/h^2)x^2 + R^2$.

答案:$I_x = \frac{2}{5}mR^2, I_y = I_z = \frac{1}{5}m(R^2+h^2)$.

15.65 证明质量为 m 的空心薄球关于其直径的惯性矩是 $\frac{2}{3}mR^2$.

15.66 求质量为 m 的空心球关于直径的惯性矩.其中内、外半径分别为 R_i 和 R_o.

答案:$I = \frac{2}{5}(R_o^5 - R_i^5)/(R_o^3 - R_i^3)$.

15.67 证明质量为 m 的立方体关于平行于一边的形心轴的惯性矩是 $I = \frac{1}{6}ma^2$.其中 a 是边长.

15.68 钢棍长 4 ft，截面直径为$\frac{1}{2}$in，求其关于垂直于棍并过其端点的轴的惯性矩．铁比重为 490 lb/ft^3．

答案：0.44 slug-ft^2 或 lb-s^2-ft．

15.69 钢管长 10 ft，截面外直径为 3.50 in，内直径为 2.89 in，求其关于纵轴的惯性矩．铁比重为 490 lb/ft^3．

答案：0.058 slug-ft^2．

15.70 钢轴长 3 m，截面直径为 75 mm，求其关于几何旋转轴的惯性矩．比重为 8500 kg/m^3．

答案：0.079 kg·m^2．

15.71 在题 15.70 中，求关于下面情况的质量惯性矩是多少？即(a)垂直几何轴的中心轴，(b)垂直几何轴的端点轴．

答案：(a)84.5 kg·m^2，(b)338 kg·m^2．

15.72 求半径为 200 mm 的铝球关于形心轴的惯性矩．铝的密度是 2560 kg/m^3．

答案：0.043 kg·m^2．

15.73 求图 15-64 所示飞轮(体积的)对于旋转轴的惯性矩．铸铁比重 4500 lb/ft^3．

答案：2.12 slug-ft^2．

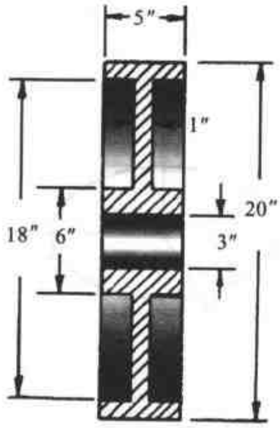


图 15-64

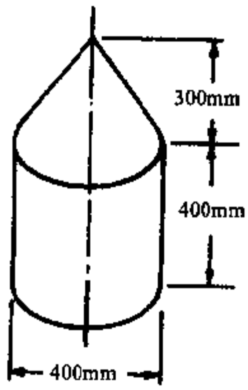


图 15-65

15.74 如图 15-65 所示，钢锥体放在铝圆柱体之上．钢的密度是 8500 kg/m^3，铝的密度是 2560 kg/m^3．求组合体关于铅直几何轴的惯性矩．

答案：$\bar{I}=3.86$ kg·m^2．

15.75 钢轴与钢盘连接如图 15-66 所示．钢的密度是 7850 kg/m^3．求组合体对于过端部 y 轴的惯性矩．

答案：$I_y=5.38\times10^{-4}$ kg·m^2．

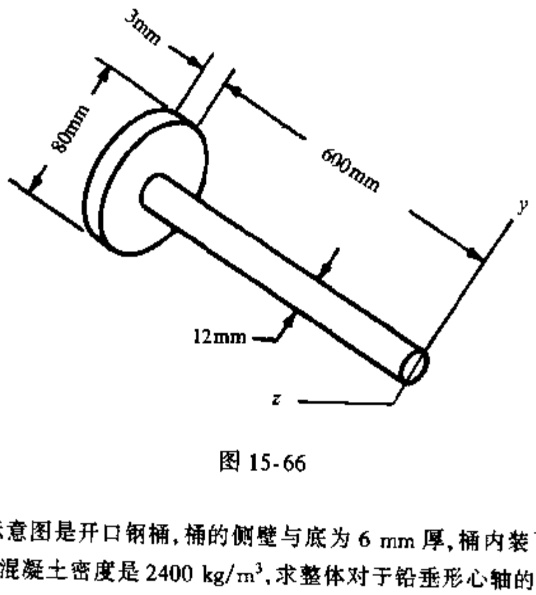


图 15-66

15.76 如图 15-67 所示的示意图是开口钢桶，桶的侧壁与底为 6 mm 厚，桶内装了一半的调制混凝土．钢的密度是 7850 kg/m^3，混凝土密度是 2400 kg/m^3，求整体对于铅垂形心轴的惯性矩．

答案:5.79 kg·m^2.

15.77 10 kg 的均质球,直径是 1 m.两细杆完全相反地联接在水平线上.每根杆的质量是 2 kg,长 1.5 m.求 3 质量组合体关于铅垂中心轴的惯性矩是多少?

答案:$I = 8$ kg·m^2.

15.78 哑铃是由两个直径为 4 in 的实心球和长 36 in,直径为 1 in 的细长杆组成.球和杆都是由密度为 560 lb/ft^3 的钢制成.求其关于过杆中点且垂直于杆的轴的惯性矩是多少?

答案:$I = 2.17$ slug-ft^2.

15.79 图 15.68 所示为一个模拟通讯卫星.立体中心轮毂有 4 个同样的臂,臂重 2 lb 相隔 90°连接,轮毂重 342 lb.求此质量系统关于 y 中心轴的惯性矩是多少?

答案:$I_y = 2.84$ slug-ft^2.

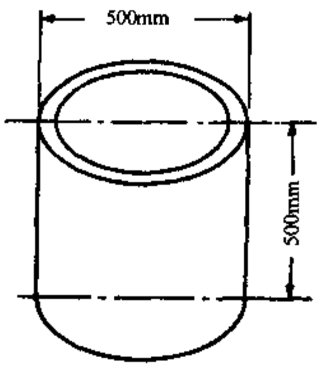


图 15-67

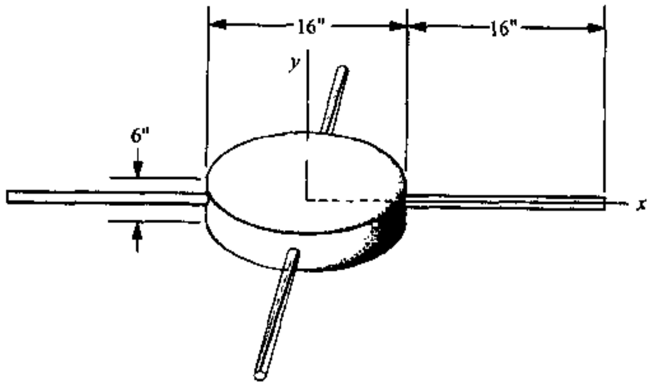


图 15-68

15.80 在题 15.79 中,求质量系统关于中心 x 轴的惯性矩是多少?

答案:$I_x = 1.64$ slug-ft^2.

第 16 章 刚体的平面运动的动力学

16.1 平面运动的矢量方程

在 14.1 节中,刚体的平面运动被定义为:刚体上任一点到某一固定平面的距离保持不变.在刚体动力学情况中,有进一步的条件,即,物体有对称平面,它虽受限制更多,但确实能简化力矩方程.

平面运动的矢量方程可写成如下形式:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\bar{\boldsymbol{a}}$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O = I_O\alpha\boldsymbol{k} + m\boldsymbol{r}_{G/O} \times \boldsymbol{a}_O = (I_O\alpha + m\bar{x}a_{Oy} - m\bar{y}a_{Ox})\boldsymbol{k}$$

其中 $\sum \boldsymbol{F}$ 是作用于物体上的外力之和;

$\sum \boldsymbol{M}$ 是作用于物体上的外力矩之和;

m 是物体的质量;

$\boldsymbol{a}$ 是物体质心的加速度;

$\boldsymbol{a}_O$ 是 O 点加速度;

α 是物体的角加速度;

I_O 是物体关于 O 点的转动惯量;

$\bar{x}, \bar{y}$ 是质心相对于 O 点的坐标;

$\bar{\boldsymbol{r}}_{G/O}$是质心相对于 O 点的矢量位移;

a_{Ox}, a_{Oy}是 O 点加速度在 x 轴和 y 轴上的分量的大小.

在以上矢量方程中假设满足右手坐标系法则,也就是说如果 x, y 轴被选为向右和向上为正,那么逆时针旋转就是符合右手系的正方向.题 16.1 说明了这点.

16.2 平面运动的代数方程

上节的力矩方程能因为合适地选择 O 点而被进一步简化,一种就是选择质心为 O 点,那么 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 都为零.

在这种情况下,平面运动的代数方程为

$$\sum F_x = m\bar{a}_x, \quad \sum F_y = m\bar{a}_y, \quad \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$$

其中 $\sum F_x, \sum F_y$ 是外力在 x, y 轴上的分量代数总和;

m 是物体质量;

$\bar{a}_x, a_y$ 是分别为质心在 x, y 轴方向的加速度分量;

$\sum \bar{M}$ 是外力对质心的力矩的代数总和;

$\bar{I}$ 是物体关于质心的转动惯量;

α 是物体角加速度的大小.

注意,如果 O 点的加速度为 0,或指向物体的质心,则力矩方程也可以写成 $\sum M_O = I_O\alpha$.若作用力分量的方向与所设的质心的加速度方向相同,则为正,如果指向相反,则为负.同样地,如果力矩指向与所设角加速度 α 相同,则为正.

你们将来会发现平动和转动是平面运动的特殊情况.

16.3 方程的图示说明

动力学方程的图解用来强调平面运动是由平动和转动组成的.图 16-1 表明一个受到外力

的物体等价于受主动力 $m\bar{a}$ 和矩 $\bar{I}\alpha$，显然 $\sum F_x = m\bar{a}_x$，$\sum F_y = m\bar{a}_y$，$\sum \bar{M}_z = \bar{I}\alpha$. 请注意所取力矩是相对于质心 G 的.

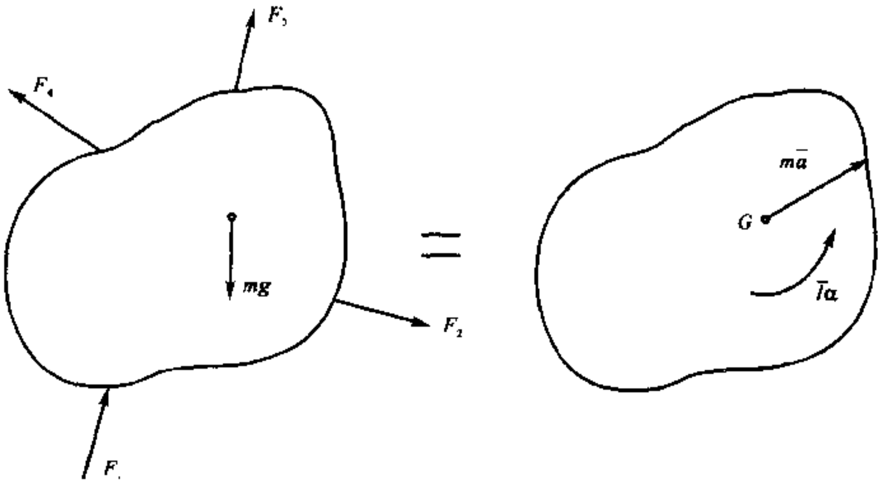


图 16-1

16.4　刚体的平动

刚体的平动定义为刚体的所有质点的加速度都相同的运动. 那么 16.2 节的公式变成

$$\sum F_x = ma_x,\quad \sum F_y = ma_y,\quad \sum \bar{M} = 0$$

其中　$\sum F_x$，$\sum F_y$ 是外力分别在 x，y 轴上的分量代数和；

m 是物体的质量；

a_x，a_y 是物体分别在 x 和 y 方向的加速度；

$\sum \bar{M}$ 是对物体质心的外力矩的代数和.

16.5　刚体转动

刚体的定轴转动定义为，刚体在轴上的质点静止，而其它所有质点以轴为中心沿圆的路径运动.

(a) 如果物体有一个对称面，并且物体绕这个对称面垂直的定轴转动，那么根据 16.2 节物体在不平衡外力系统作用下的代数方程为

$$\sum F_n = m\bar{r}\omega^2,\quad \sum F_t = m\bar{r}\alpha,\quad \sum M_O = I_O\alpha$$

其中　$\sum F_n$ 是所有外力(包括物体上作用力 F_1，F_2，F_3 等，物体的重力和轴的反力)沿 n 轴分量的代数和，方向沿质心 G 到转动轴心 O 的连线并从 G 指向 O 为正. 这是由于有 $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$；

$\sum F_t$ 是所有外力沿 t 轴分量的代数和，t 轴与 n 轴在 O 点垂直. 力的方向与 $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$ 方向一致为正；

$\sum M_O$ 是所有外力对过 O 点的轴的力矩的代数和；注意，这个力矩的方向与所设角加速度 α 的转向相同时为正；

m 是物体的质量；

G 是物体质心；

$\bar{r}$ 是转动中心 O 到质心 G 的距离；

I_O 是物体关于转轴的转动惯量；

ω 是物体的角速度；

α 是物体的角加速度大小；

这种转动是转轴不通过质心的转动.

(b) 如果关于绕过 G 的定轴转动(如果 G 与 O 重合)，则 $F=0$，并将质心取为矩心，根据平衡方程 16.2 节变为

$$\sum F_x = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad \sum \overline{M} = \bar{I}\alpha$$

其中　$\sum F_x$ 是所有外力沿 x 轴分量的代数和. x 轴为任意选择；

$\sum F_y$ 是所有外力沿 y 轴分量的代数和；

$\sum \overline{M}$ 是绕通过质心 G 的轴转动的合外力矩(对称轴)；

$\bar{I}$ 是相对于质心的转动惯量；

α 是物体角加速度的大小.

这种转动称为转轴通过质心的转动.

16.6　碰撞中心

碰撞中心是图 16-2 中 n 轴上的点 P，该点即为主动力合力的汇交点. 它距转动中心 O 的距离为 q，q 表达式为

$$q = k_O^2/\bar{r}$$

其中　k_O^2 是物体绕过 O 点的转轴的回转半径的平方；注意 $k_O^2 = I_O/m$，I_O 是相对于 O 点的转动惯量，m 为总质量；

$\bar{r}$ 是转动中心 O 到质心 G 的距离.

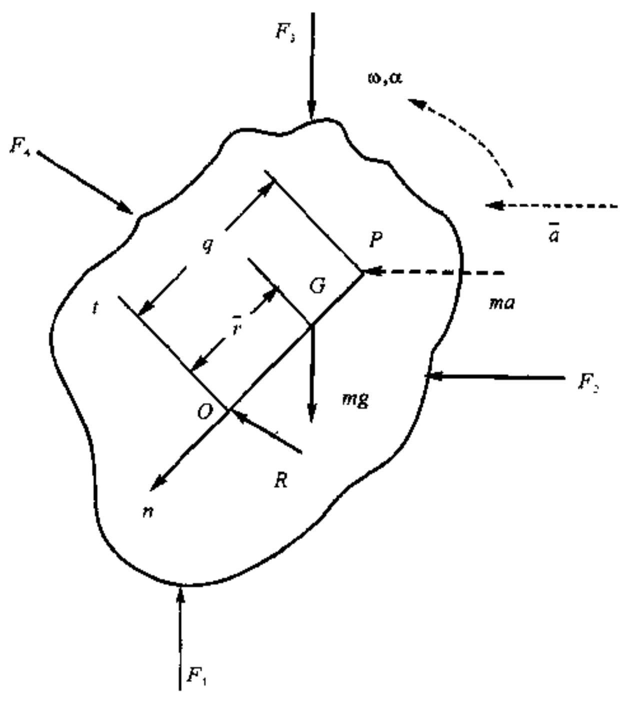


图 16-2

16.7　刚体的惯性力方法

在第 13 章，将达朗贝尔原理应用于质点运动中. 同样，达朗贝尔原理也可应用在刚体运动中. 在刚体运动情况中，不仅要将大小相等、方向相反的 $m\bar{a}$ 力作用在刚体质量中心上，而且还

应将大小相等、方向相反的 $\bar{I}\alpha$ 作用在刚体上.在图 16-3 中,惯性力和惯性力偶矩与外力和外力偶矩形成平衡力系.即

$$\sum \boldsymbol{F} - m\bar{\boldsymbol{a}} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M} - I\alpha \boldsymbol{k} = 0$$

惯性力的方法以达朗贝尔原理为基础,即假象地将动力学问题转变成平衡问题.在取矩中,允许对任何方便的轴取矩,而不仅只限于对质心轴取矩.

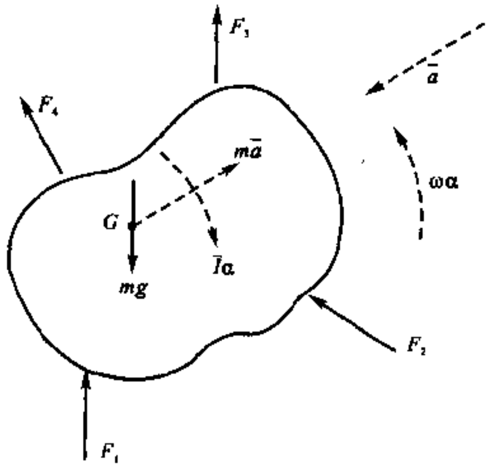


图 16-3

例　题

当矢量方向已在图上标注清楚时,在图上应指明其大小.

一般平面运动

16.1　一圆环,质量可忽略,半径为 r,放于水平面上.在其上固定 3 个小质量的物体,如图 16-4(a),问初始时刻,圆环的角加速度.设环无初角速度,地面摩擦足够大,环对于地面无相对滑动.

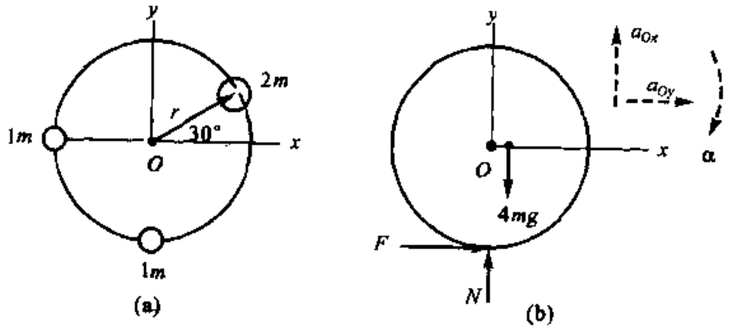


图 16-4

解　☞ 隔离体受力如图 16-4(b)所示,即平面反作用力(法向力 N、摩擦力 F).通过圆环的圆心 O 平动坐标系如图所示,3 个物体合重力大小为 4 mg,设合力作用于质心 G.G 的坐标为

$$\bar{x} = \frac{mg(-r) + mg(0) + 2mg(0.866r)}{4mg} = 0.183r$$

$$\bar{y} = \frac{m(0) + mg(-r) + 2mg(0.5r)}{4mg} = 0$$

题中假设无相对滑动,因此 O 的加速度

$$a_{Ox} = r\alpha \quad 和 \quad a_{Oy} = 0$$

a_O 的加速度如图 16-4(b)所示,为了保持与 a_O 一致,角加速度应顺时针方向.

16.1 节中,力矩方程是矢量方程.代数形式是

$$\sum M_O = I_O\alpha + m\bar{x}(a_O) - m\bar{y}(a_O)$$

根据右手坐标系规则,α 应是逆时针方向为正,所以用 $-\alpha$ 代替 α,因为假定它的方向为顺时针.

列隔离体的运动方程式:

$$\sum F_x = m\bar{a}_{Ox} \quad 或 \quad F = 4mr\alpha$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_{Oy} \quad 或 \quad N = 4mg = 0$$

力矩方程变为

$$+Fr - 4mg(+0.183r) = 4mr^2(-\alpha) + 4m(+0.183r)(0) - 4m(0)r\alpha$$

代入 $F = 4mr\alpha$,则力矩方程有

$$(4mr\alpha)r - 0.732mgr = -4mr^2\alpha$$

于是 $\alpha = (0.0915g/r)\ \text{rad/s}^2$,如果 $g = 32.2\ \text{ft/s}^2$,那么 $\alpha = (2.95/r)\ \text{rad/s}^2$.

16.2　一个重 600 lb 的轮子,直径为 3 in,沿与水平面成 25°的斜面向下做纯滚动,求摩擦力 F 及质心的加速度.

解　图 16-5 给出了轮子的受力情况.

在解题中常常凭经验给出摩擦力 F 的方向(F 可以在 $-\mu N$ 与 μN 间取值,但事实上,摩擦力必须沿斜面向上,否则轮子将沿斜面打滑,并且,摩擦力会产生一个惟一相对质心的力矩,因此要引起角加速度($\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha$).

选 x 轴与斜面平行向下,y 轴与斜面垂直向上.

质量 $m = 600/32.2 = 18.6\ \text{lb-s}^2/\text{ft}$ or slugs,转动惯量为

$$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(18.6\ \text{lb-s}^2/\text{ft})(15/12\ \text{ft})^2 = 14.5\ \text{lb-s}^2\text{-ft} 或 \text{slug-ft}^2.$$

通常在工程学课本中习惯使用上述单位.

列运动方程式(1)$\sum F_x = m\bar{a}_x$,(2)$\sum F_y = m\bar{a}_y$,(3)$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha$.代入数据,有

$$600\sin 25° - F = 18.6\bar{a}_x \tag{1'}$$

$$N - 600\cos 25° = 18.6\bar{a}_y = 0 \tag{2'}$$

$$F(15/12) = 14.5\alpha \tag{3'}$$

所列方程中含有 4 个未知量,因此需要再列一个方程,根据纯滚动条件,有 $\bar{a}_x = r\bar{\alpha} = (15/12)\alpha$.

将 $\alpha = \frac{4}{5}\bar{a}_x$ 代入到方程(3′),得到 $F = 9.27\bar{a}_x$.

将 $F = 9.27\bar{a}_x$ 代入到方程(1′),得到 $\bar{a}_x = 9.19\ \text{ft/s}^2$,那么 $F = 84.3$ lb.

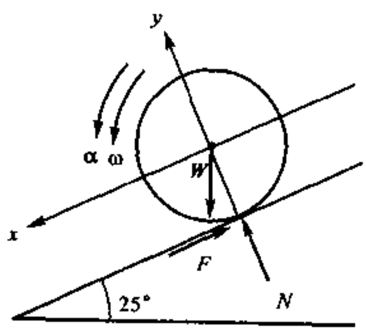


图 16-5

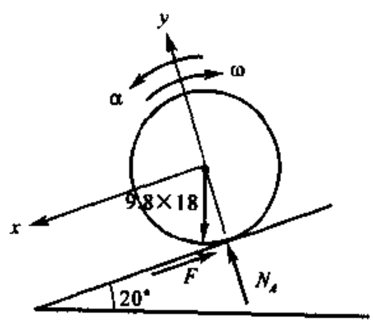


图 16-6

16.3　圆柱体质量为 18 kg,重力作用于直径为 600 mm 圆的圆心,在某一瞬时质心以 3 m/s

的速度在倾角为 20°的平面上向上运动(如图 16-6).问经过多少时间可到达最高点?

解 ☞ 对隔离体进行受力分析可知摩擦力 F 沿斜面向上,如题 16.2,摩擦力是作用于物体上惟一对质心有矩的外力,使物体产生逆时针的角加速度 α,而此时物体角速度 ω 是顺时针的.当物体到达最高点后,开始下滑,α 和 ω 都为逆时针方向.

列运动方程式:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \tag{1}$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha \tag{3}$$

将数据代入方程得到下列各式$\left(设轮为圆盘,则有\ \bar{I} = \frac{1}{2}mr^2\right)$

$$9.8 \times 18\sin 20° - F = 18\bar{a}_x \tag{1'}$$

$$N_A - 9.8 \times 18\cos 20° = 18\bar{a}_y = 0 \tag{2'}$$

$$F \times 0.3 = \frac{1}{2}18(0.3)^2\alpha \tag{3'}$$

与题 16.1 同理　　$\bar{a}_x = r\alpha = 0.3\alpha$

由(3'),$F = 9\bar{a}_x$ 代入(1')得 $\bar{a}_x = 2.23\ \mathrm{m/s^2}$,由于为正,则沿斜面向下.

要计算静止的时间,应注意到以 3 m/s 的初速度运动到最高点后,应用运动方程 $v = v_0 + at$.根据下向为正的规定,则有末速度为 0,即 $v = 0$;初速度向上,为 -3 m/s;加速度 $\bar{a}_x$ 方向向下,为 $+2.23\ \mathrm{m/s^2}$.

由　$v = v_0 + at$,　$0 = -3 + 2.23t$　得　$t = 1.35$ s.

16.4　半径为 R,质量为 m 的均质圆柱体在水平力 P 的作用下运动,图示瞬时 P 作用在圆柱体截面的中垂线上,如图 16-7 所示.设在水平面上运动.

解 ☞ 对隔离体进行受力分析可知,力 P 作用于圆心上方 h 处.

假设 F 向左,则运动方程式为

$$\sum F_x = P - F = m\bar{a}_x \tag{1}$$

$$\sum F_y = N_A - mg = 0 \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = P \times h + F \times R = \frac{1}{2}mR^2\alpha \tag{3}$$

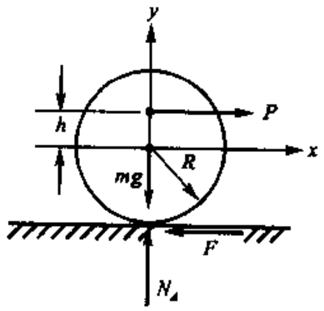


图 16-7

注意到 P 一定大于 F,才使物体向右运动,那么有没有可能摩擦力 F 等于 0 呢?

把 $\bar{a}_x = R\alpha$ 代入(3)可得

$$P \times h + F \times R = \frac{1}{2}mR\bar{a}_x \tag{3'}$$

(3')式两边同除以 $\frac{1}{2}R$ 可得

$$\frac{2Ph}{R} + 2F = m\bar{a}_x \tag{3''}$$

(3″)式左边等于(1)式左边,$2Ph/R + 2F = P - F$ 或 $3F = P(1 - 2h/R)$,显然如果力 P 作用在圆心上二分之一半径处,那么摩擦力为零.

如果 $h = R$,等式变为 $3F = P(1 - 2R/R) = -P$.摩擦力变向,方向向右.代入 $F = -\frac{1}{3}P$,在 $h = R$ 处等式(3)成为

$$PR - \frac{1}{3}PR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \quad 或 \quad \frac{2}{3}P = \frac{1}{2}mR\alpha$$

这说明 α 为正,则圆柱体向右滚动.

再假设 P 作用在质心上,此时 $h = 0$.在这些条件下,$3F = P[1 - (2 \times 0) \times R] = P$.

自然地,在任何时刻,如果 P 过大,F 会增大一些.一旦超过最大静摩擦力,圆柱体就会滑动.此时必须重新求解.即摩擦力等于摩擦系数与正压力 N_A 的乘积.

运动方程式如下

$$\sum F_x = P - \mu N_A = m\bar{a}_x \tag{4}$$

$$\sum F_y = N_A - mg = 0 \tag{5}$$

$$\sum \overline{M} = Ph + \mu N_A R = \frac{1}{2} mR^2\alpha \tag{6}$$

方程表示,滚动(角加速度 α)和滑动(直线加速度 $\bar{a}_x$)同时存在,见题 16.6 和题 16.22.

16.5 质量为 20 kg 的均质圆球,其上有一道圆形凹槽如图 16-8 所示. 40 N 的力作用在凹槽上的细绳上. 如圆球只滚动不滑动,求质心加速度和摩擦力 F. 忽略凹槽影响.

假设向右滚动. 角加速度将会是顺时针,质心加速度向右.

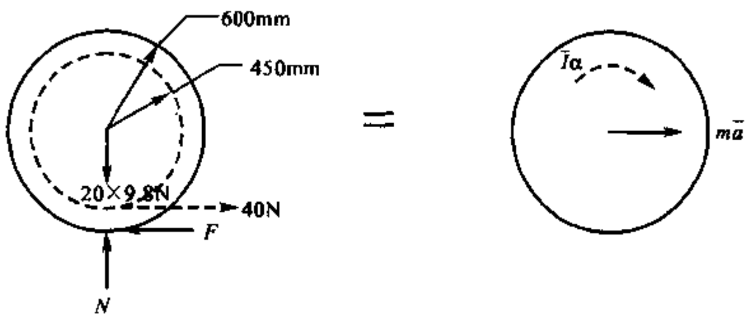


图 16-8

解 ☞ 假设摩擦力向左,则运动方程为:

$$\sum F = m\bar{a} \quad 或 \quad 40 - F = 20\bar{a} \tag{1}$$

$$\sum M = I\alpha \quad 或 \quad F \times 0.6 - 40 \times 0.45 = \frac{2}{5} \times 20 \times 0.6^2\alpha \tag{2}$$

由于 $\bar{a} = 0.6\alpha$,所以二个方程可写为

$$F \times 0.6 - 40 \times 0.45 = 4.8\bar{a}$$

与方程(1)联立得

$$\bar{a} = 0.37\ \mathrm{m/s^2}, \quad F = 7.14\ \mathrm{N}\ (方向向左)$$

16.6 一匀质球重 16.1 lb,球与斜面摩擦系数为 0.10,求球质心的加速度及角加速度.

解 ☞ 在隔离体图(图 16-9)中画出未知力 F,由于开始不知道球是否滑动,因此首先要计算力 F,看 F 是否比 μN 即 $0.10N$ 大,如果 $F > \mu N$,则意味着没有足够的摩擦力可使球不滑动,所以球既滑动又滚动.

运动方程:

$$\sum F = m\bar{a} \quad 即 \quad 16.1 \sin 30° - F = \frac{16.1}{32.2}\bar{a} \tag{1}$$

$$\sum \overline{M} = I\alpha \quad 即 \quad F \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(\frac{16.1}{32.2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha \tag{2}$$

设 α 逆时针方向则 $\bar{a}$ 为沿斜面向下,有 $\bar{a} = r\alpha = \frac{1}{2}\alpha$.

由方程(1):$8.05 - F = \frac{1}{2}\bar{a}$;

由方程(2):$F = \frac{1}{5}\bar{a}$;因此 $\bar{a} = 11.5\ \mathrm{ft/s^2}$, $F = 2.30$ lb.

经检验, $N = 16.1 \cos 30° = 13.91$ lb,而 $\mu N = 0.10(13.9) = 1.39$ lb.

而 F 要阻止滑动的力应不小于 2.30 lb,说明以上假设不成立.

而关系 $\bar{a} = r\alpha$ 不再成立. 与此同时,假设动摩擦系数与最大静摩擦系数相等,重新画隔离体图(见图 16-10),运动方程为

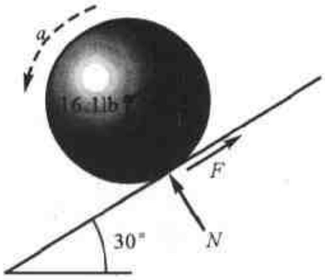


图 16-9

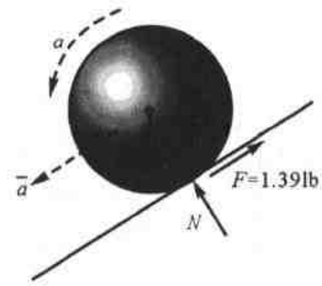


图 16-10

$$16.1\sin 30^\circ - 13.9 = \left(\frac{16.1}{32.2}\right)\bar{a} \tag{3}$$

$$1.39 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(\frac{16.1}{32.2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha \tag{4}$$

所以 $\bar{a} = 13.3\ \text{ft/s}^2$, $\alpha = 13.9\ \text{rad/s}^2$,球既滚动又滑动.

16.7　细绳缠绕在圆柱体上,并跨过滑轮悬吊重物 M_1,如图 16-11(a)所示,不计滑轮质量及摩擦,圆柱体质量 M_2,沿水平面滚动,半径为 r,求重物 M_1 的加速度.

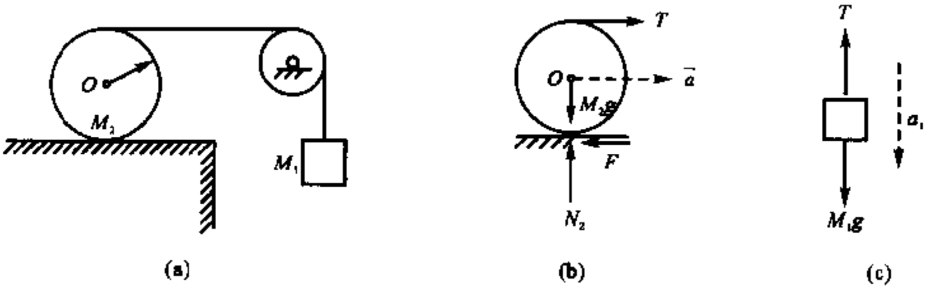


图 16-11

解　☞ 隔离体图如图 16-11(b)、(c)所示.注意 M_1 的加速度 a_1 的大小并不等于圆柱体重心的加速度 $\bar{a}$ 的大小.

研究圆柱体,

$$\sum F_n = m\bar{a} \quad 得\ T - F = M_2\bar{a} \tag{1}$$

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad 得 (F + T)r = \frac{1}{2}M_2 r^2 \alpha \tag{2}$$

研究重物,

$$\sum F_v = ma_1 \quad 得\ M_1 g - T = M_1 a_1 \tag{3}$$

将 $\alpha = \bar{a}/r$ 代入(2),同时等式两边除以 r 得到

$$F + T = \frac{1}{2}M_2\bar{a} \tag{4}$$

将(4)式与(1)式相加得

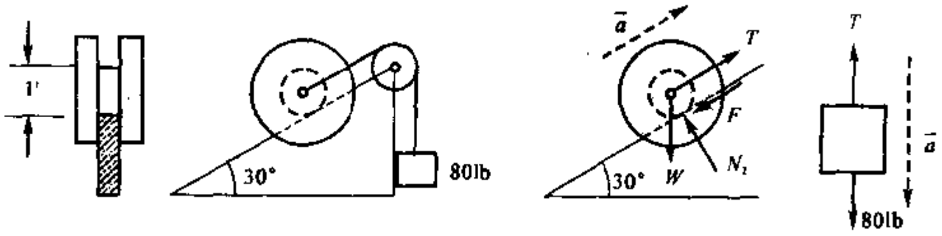
$$T = \frac{3}{4}M_2\bar{a} \tag{5}$$

如果知道 $\bar{a}$ 与 a_1 的关系,再由等式(3)则问题可解.假设圆柱做纯滚动,则圆柱顶点的加速度水平分量等于质心 O 的加速度 $\bar{a}$ 与 $r\alpha$ 乘积的和.又由运动学定理 $r\alpha$ 等于 $\bar{a}$.因此,重物加速度等于圆柱体顶点的加速度,也就等于 $\bar{a} + r\alpha = 2\bar{a}$.

由(5), $T = \frac{3}{4}M_2\left(\frac{1}{2}a_1\right)$,代入(3)得, $a_1 = M_1 g\Big/\left(M_1 + \frac{3}{8}M_2\right)$.

16.8　圆轮凹槽置于倾角为 30°带有定滑轮的轨道上,如图 16-12(a)所示.圆轮与细绳相连,细绳跨过滑轮与一重物相连.重物重 80 lb,圆轮重 100 lb,转动惯量为 4 slug-ft.系统从

静止开始运动，求圆轮质心的速度达到 20 ft/s 所需的时间.



(a)　　(b)

图 16-12

解　轮子及重物的隔离体图如图 16-12(a)所示，注意到由于重物有加速度，故绳的张力 T 不为 80 lb，对重物及轮子列所需方程式有：

$$\sum F_{重} = 80 - T = \frac{80}{32.2}\bar{a} \tag{1}$$

$$\sum F_{轮} = T - F - 100\sin 30° = \frac{100}{32.2}\bar{a} \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = F \times \frac{1}{2} = 4\alpha \tag{3}$$

由于 $\bar{a} = r\alpha = \frac{1}{2}\alpha$，故方程(3)可为 $F \times \frac{1}{2} = 4 \times 2\bar{a} = 8\bar{a}$ 得 $F_1 = 16\bar{a}$.

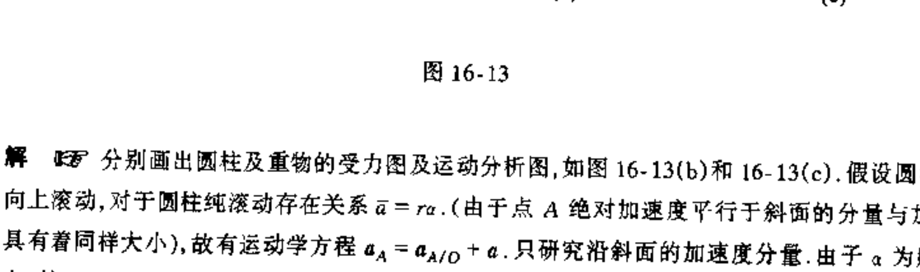
把 $F = 16\bar{a}$ 代入方程(2)得 $T - 16\bar{a} - 100 \times 0.500 = \frac{100}{32.2}\bar{a}$ 或 $T = 19.1\bar{a} + 50$.

将 $T = 19.1\bar{a} + 50$ 代入方程(1)得 $80 - 19.1\bar{a} - 50 = 2.48\bar{a}$ 或 $\bar{a} = 1.391$.

为求得由静止到达速度 20 ft/s 所需的时间，列如下运动学方程：

$$v = v_0 + \bar{a}t, \quad 20 = 0 + 1.39t, \quad t = 14.1 \text{ s}$$

16.9　如图 16-13，假设滑轮无质量和摩擦，求使得圆柱只滚动的最小静摩擦系数. 已知圆柱 $M = 70$ kg，$k_O = 400$ mm，如图 16-13(a).



(a)　　(b)　　(c)

图 16-13

解　分别画出圆柱及重物的受力图及运动分析图，如图 16-13(b)和 16-13(c). 假设圆柱沿斜面向上滚动，对于圆柱纯滚动存在关系 $\bar{a} = r\alpha$.（由于点 A 绝对加速度平行于斜面的分量与加速度 a_1 具有着同样大小），故有运动学方程 $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{A/O} + \boldsymbol{a}$. 只研究沿斜面的加速度分量. 由于 α 为顺时针方向，故 $a_{A/O} = OA \times \alpha = 45\alpha$，方向沿斜面向下，$\bar{a}$ 的大小为 0.62，方向沿斜面向上，因此 $a_1 = 0.15\alpha$，沿斜面向上.

现在可列出动力学方程，其中圆柱的转动惯量为 $\bar{I} = mk_O^2 = 11.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$$\sum F = ma_1 \quad 或 \quad 35 \times 9.8 - T = 35a_1 \tag{1}$$

$$\sum F = m\bar{a} \quad 或 \quad T - F - 70 \times 9.8\sin 30° = 70\bar{a} \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha \quad 或 \quad F \times 0.6 - T \times 0.45 = 11.2\alpha \tag{3}$$

其中 $\bar{a} = 0.6\alpha$ 和 $a_1 = 0.15\alpha$ 已给出，联立(2)(3)，消去 F，得到 $0.25T - 686 \times 0.5 = 60.67\alpha$，联立(1)得到 $\alpha = -4.15\ \text{rad/s}^2$ 和 $T = 365$ N.

因此，$F = 196$ N，经检验，$N_A = 70 \times 9.8\cos 30° = 594$ N，所以所求的摩擦系数 $\mu = 196/594 = 0.33$.

注意，在此题中，圆柱体将会从平面上滚下，质量为 35 kg 的重物体将会上升.

16.10 图 16-14 中，质量 200 kg 的均质球体在水平面向上只滚不滑．求该球重心的加速度及所需的摩擦力.

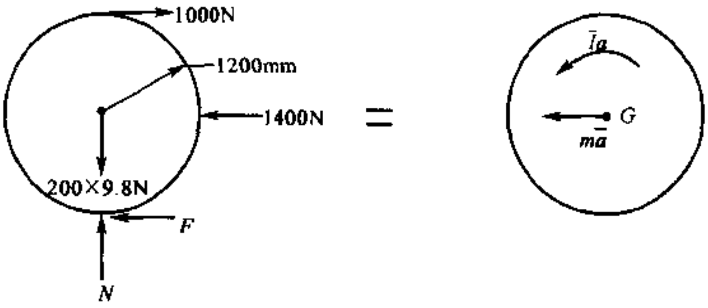


图 16-14

解 ☞ 假设球体向左滚动且摩擦力 F 方向也向左，由题可知 $N = 200 \times 9.8 = 1960$ N.

动力学方程是

$$\sum F = m\bar{a} \quad 即 \quad F + 1400 - 1000 = 200\bar{a}$$

$$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha \quad 即 \quad -F \times 1.2 - 1000 \times 1.2 = \frac{2}{5}(200)(1.2)^2\alpha$$

由 $\bar{a} = 1.2\alpha$，由方程式解得 $\bar{a} = -2.14\ \text{m/s}^2$，$F = -828$ N.

因此，球体实际运动方向应该向右滚动且摩擦力方向也向右，与原来假设的方向相反.

16.11 假设图 16-15 中的圆盘 A 只滚不滑动，计算绳子所受拉力以及圆盘 A 的质心处的加速度.

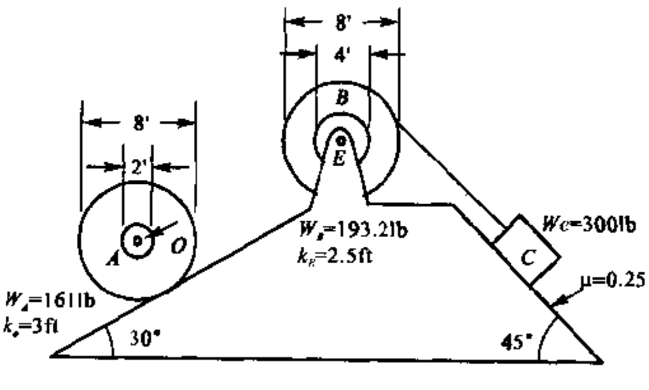


图 16-15

解 ☞

$$I_A = mk_O^2 = (161/32.2)(3)^2 = 45\ \text{lb-s}^2\text{-ft}$$

$$I_B = (193.2/32.2)(2.5)^2 = 37.5\ \text{lb-s}^2\text{-ft}$$

画出 A, B, C 的受力图，如图 16-16.

图中假设 C 向下平移，A 沿斜面作向上滚动．解决此问题需要用动力学条件.

首先 $\alpha_A = \frac{1}{4}\bar{a}$，其次，绳 T_1 的加速度等于 O 点平行于斜面方向的绝对加速度．其大小等于 O

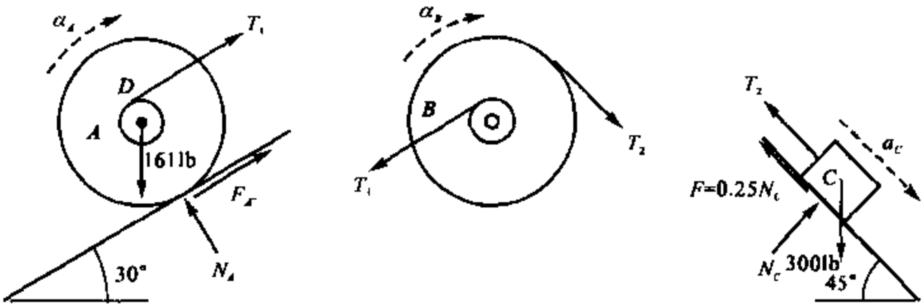


图 16-16

点相对于质心的相对加速度(即 $1\times\alpha_A$)与质心的加速度($\bar{a}$)的和,故 T_1 的绝对加速度为$\frac{5}{4}\bar{a}$.由于 B 上距离中心 2 ft 的一点的加速度也为$\frac{5}{4}\bar{a}$,则 $\alpha_B=\frac{5}{4}\bar{a}/2=\frac{5}{8}\bar{a}$,$T_2$ 的绝对加速度等于 $a_C\left(\frac{5}{8}\bar{a}\times4=\frac{5}{2}\bar{a}\right)$.

A 的运动方程为

$$\sum F=ma \quad 或 \quad T_1+F_A-161\sin30^\circ=\frac{161}{32.2}\bar{a} \tag{1}$$

$$\sum\overline{M}=\bar{I}\alpha_A \quad 或 \quad T_1\times1-F_A\times4=45\times\frac{1}{4}\bar{a} \tag{2}$$

B 的运动方程为

$$\sum\overline{M}=\bar{I}\alpha_B \quad 或 \quad T_2\times4-T_1\times2=37.5\times\frac{5}{8}\bar{a} \tag{3}$$

C 平行于斜面和垂直斜面方向的运动方程为:

$$\sum F_{\parallel}=ma_C \quad 或 \quad 300\times0.707-0.25N-T_2=\frac{300}{32.2}\left(\frac{5}{2}\right)\bar{a} \tag{4}$$

$$\sum F_{\perp}=0 \quad 或 \quad N-300\times0.707=0 \tag{5}$$

解方程(5)求出 N,代入(4)式中.解等式(4)得到 T_2 关于 $\bar{a}$ 的等式.消去等式(1)和(2)中的 F_A 得到 T_1 关于 $\bar{a}$ 的等式,将 T_1、T_2 的值代入等式(3)得到 $\bar{a}$.

这些值为:$N=212$ lb, $T_2=159-23.3\bar{a}$, $T_1=64.4+6.25\bar{a}$.

代入(3)中得,$4(159-23.3\bar{a})-2(64.4+6.26\bar{a})=23.4\bar{a}$.

所以,$\bar{a}=3.93$ ft/s², $T_1=89.0$ lb, $T_2=67.4$ lb.

16.12 一均质固体圆柱,重 644 lb,在倾斜轨道上作纯滚动,如图 16-17.求质心的加速度.

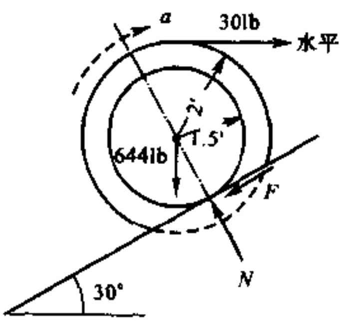


图 16-17

解 ☞ 画出隔离物体的受力图.假设圆柱沿斜坡向上滚,则记 $\bar{a}=r\alpha=1.5\alpha$.

运动方程式为

$$\sum F=m\bar{a} \quad 或 \quad F-644\sin30^\circ+30\cos30^\circ=\frac{644}{32.2}\bar{a} \tag{1}$$

$$\sum\overline{M}=\bar{I}\alpha \quad 或 \quad -F\times1.5+30\times2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{644}{32.2}\right)\times2^2\times\left(\frac{\bar{a}}{1.5}\right) \tag{2}$$

解得 $\bar{a}=-6.78$ ft/s²

这说明圆柱体将沿斜面向下滚动.

16.13 一质量为 m,长度为 l 的匀质杆放置在光滑表面上如图 16-18 所示.描述它的运动规律,沿水平表面方向建立 x 轴,铅直方向建立 y 轴.

解 ☞ 对杆隔离体受力分析,由于表面光滑,不计摩擦,作用于杆上只有法向反力.

运动方程为

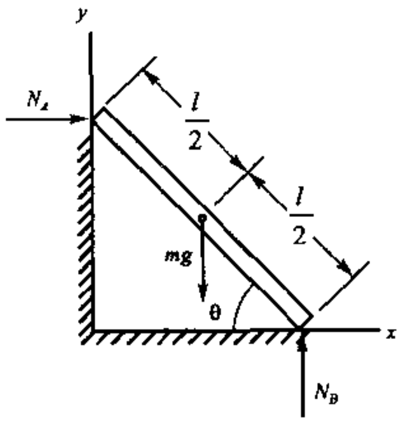


图 16-18

$$\sum F_x = N_A = m\bar{a}_x \tag{1}$$

$$\sum F_y = N_B - mg = m\bar{a}_y \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = N_A\left(\frac{1}{2}l\sin\theta\right) - N_B\left(\frac{1}{2}l\cos\theta\right) = \bar{I}\alpha \tag{3}$$

细杆质心的转动惯量 $I_C = \frac{1}{12}ml^2$，α 为 θ 关于时间 t 的二阶导数.

这 3 个方程中共含 5 个未知量，为求出解，需要建立两个新的关于这些未知量的方程. 由图中的几何关系得

$$\bar{x} = \frac{1}{2}l\cos\theta \quad 和 \quad \bar{y} = \frac{1}{2}l\sin\theta$$

则有
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{x}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}l\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad 和 \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{d\bar{y}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

再次微分得到

$$\bar{a}_x = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}l\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{2}l\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt}$$

和
$$\bar{a}_y = \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = -\frac{1}{2}l\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}l\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt}$$

把 $\bar{a}_x$ 和 $\bar{a}_y$ 的表达式代入原始方程式. 而且，很容易从方程(1)和(2)得出 $N_A = m\bar{a}_x$，$N_B = m\bar{a}_y$，再代入方程(3)，并在方程(3)两边同时除以 $\frac{1}{2}mgl$，得

$$\frac{\sin\theta}{g}\bar{a}_x - \frac{\cos\theta}{g}\bar{a}_y = \cos\theta + \frac{l}{6g}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

再将 $\bar{a}_x$ 和 $\bar{a}_y$ 之值代入并化简得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l}\cos\theta$$

根据例题 16.39 中的方法，得出角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \sin\theta)}$$

16.14 图示 16-19(a)中，有一均质梯子倾斜地靠在墙上，梯子长为 12 ft，重 20 lb，倾斜角为 60°，地面、墙均光滑. 如果突然释放梯子顶端并给予 3 ft/s 的竖直向下速度，求释放瞬时墙和地面对梯子的反作用力？

解 ☞ 隔离体图如图 16-19(b)所示，梯子以 α 的角加速度逆时针转动. 利用速度瞬心 I，转动角速度为 $v_B/IB = 3.6 = 0.5$ rad/s.

质心 G 点加速度相对于 A 和 B 点加速度关系有

$$a_G = (a_{G/A})_t + (a_{G/A})_n + a_A \tag{1}$$

$$a_G = (a_{G/B})_t + (a_{G/B})_n + a_B \tag{2}$$

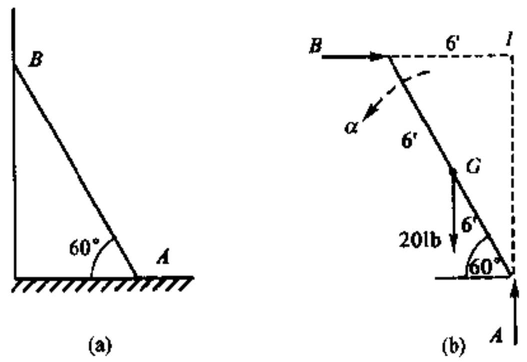


图 16-19

方程(1)和(2)右边的变量符合以下关系：

(a) $(a_{G/A})_t$ 的大小为 6α，方向位于水平线左下方，与水平线成 30°；

(b) $(a_{G/A})_n = 6(0.5)^2 = 1.5$，方向位于水平线右下方，与水平线成 60°；

(c) a_A 方向水平；

(d) $(a_{G/B})_t = 6\alpha$，方向为右上方并与水平成 30°；

(e) $(a_{G/B})_n = 6\omega^2 = 6\times(0.5)^2 = 1.5$，方向向左并与水平成 60°；

(f) a_B 是竖直方向的；

在方程(1)，由于 a_A 没有竖直方向的分量，所以列竖直方向上的求和方程可解出 a_B；

(g) $(a_G)_y = (a_{G/A})_t\sin30° + (a_{G/A})_n\cos30° = 6\alpha\sin30° + 1.5\cos30° = 3\alpha + 1.3$ 方向向下；

在方程(2)中，由于 a_B 没有水平分量，所以列水平方向上的求和方程可解出；

(h) $(a_G)_x = (a_{G/B})_t\cos30° - (a_{G/B})_n\cos60° = 6\alpha\cos30° - 1.5\cos60° = 5.2\alpha - 0.75$ 方向向右

运动方程有

$$\sum F_x = m(a_G)_x \quad 即 \quad B = \frac{20}{g}(5.2\alpha - 0.75) \tag{3}$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad 即 \quad 20 - A = \frac{20}{g}(3\alpha + 1.3) \tag{4}$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \quad 即 \quad A\times 3 - B\times 3 = \frac{1}{12}\left(\frac{20}{g}\right)(12)^2\alpha \tag{5}$$

由方程(3)(4)得 $B = 3.2\alpha - 0.466$　$A = 19.2 - 1.86\alpha$ 代入方程(5)中，解得　$\alpha = 2.6\ \text{rad/s}^2$，逆时针方向.

所以，$A = 14.4$ lb 方向向上和 $B = 7.93$ lb 方向向右.

16.15　如图 16-20(a)所示，一个均质的正圆锥以它的顶点很不稳定地立在一个光滑的水平面上，如果它有扰动，问它质心 G 的轨迹是怎样的?

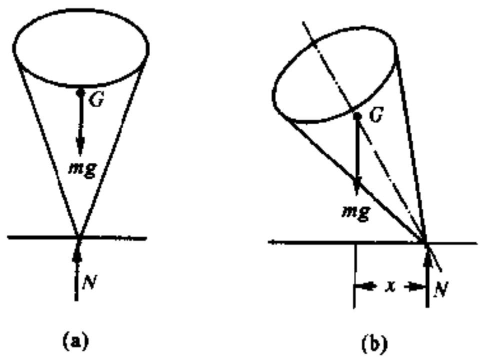


图 16-20

解 ☞ 画当圆锥倒下时的任一个位置的隔离体图(如图 16-20(b)),此时并没有水平方向的力(假设无摩擦),那么水平方向的合外力为零.而水平方向的合外力等于物体的质量 m 与质心水平方向加速度 $\bar{a}_x$ 的乘积.因为 $m\bar{a}_x=0$,所以 $\bar{a}_x=0$.

如果水平方向上初速度为零,且 $\bar{a}_x=0$,那么重心 G 的轨迹为一条竖直的直线,这条直线过起始没扰动时顶点所在的那一点.

16.16 两个匀质的圆盘通过一个轴刚性连接,如图 16-21 所示.每个圆盘的质量为 7.25 kg,直径为 900 mm,轴的直径为 200 mm,质量为 9 kg.一绳缠绕如图示,并在位于轴中位的绳上施加一水平恒力,该力大小 45 N,分析该刚体系统的运动规律.

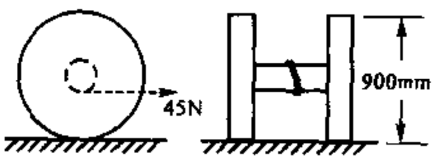


图 16-21

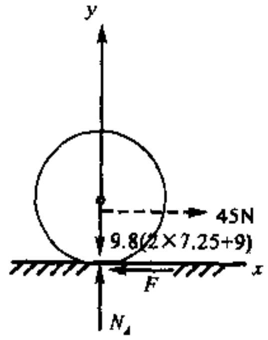


图 16-22

解 ☞ 刚体系统的隔离体受力分析图画出一个侧面受力情况(见图 16-22).假设摩擦力向左.

动力学方程如下:

$$\sum F_x = 45 - F = m\bar{a}_x \tag{1}$$

$$\sum F_y = N_A - 9.8\times 23.5 = m\bar{a}_y = 0 \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = 0.45F - 45(0.1) = \bar{I}\alpha \tag{3}$$

$\bar{I}$ 表示两圆盘及轴的转动惯量之和:

$$\bar{I} = 2\left(\frac{1}{2}m_{盘}r_{盘}^2\right) + \frac{1}{2}m_{轴}r_{轴}^2 = 7.25(0.45)^2 + \frac{1}{2}(9)(0.1)^2 = 1.513\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

将值代入方程(1)(2)和(3)得到

$$45 - F = 23.5\bar{a}_x \tag{1'}$$

$$N_A - 230 = 0 \tag{2'}$$

$$0.45F - 4.5 = 1.513\alpha \tag{3'}$$

由 $\alpha=\bar{a}_x/0.45$,其中 0.45 是圆盘半径.

方程(3′)可写为

$$0.45F - 4.5 = 1.513\left(\frac{\bar{a}_x}{0.45}\right) \quad 或 \quad F - 10 = 7.47\bar{a}_x$$

将该等式与式(1′)相加得到 $\bar{a}_x=1.13\ \mathrm{m/s^2}$ 向右.

16.17 一均质球体和一均质圆柱,同时无摩擦从一斜面最高处向下滚动.问哪一个先达到底面.

解 ☞ 由题意可知球体与圆柱的运动与半径无关.

设 s 和 c 分别表示球体和圆柱.

图 16-23 所示的隔离体图,只画出一个几何固体圆为参考.

列在下表的是运动方程式,球和圆柱的转动惯量分别是 $\frac{2}{5}m_sr_s^2$ 和 $\frac{1}{2}m_cr_c^2$.

球		圆　柱	
$\sum F_x = m_s g\sin\theta - F_s = m_s(\bar{a}_x)_s$	(1)	$\sum F_x = m_c g\sin\theta - F_c = m_c(\bar{a}_x)_c$	(4)
$\sum F_y = N_s - m_s g\cos\theta = 0$	(2)	$\sum F_y = N_c - m_c g\cos\theta = 0$	(5)
$\sum \bar{M} = F_s r_s = \frac{2}{5}m_s r_s^2\alpha_s$	(3)	$\sum \bar{M} = F_c r_c = \frac{1}{2}m_c r_c^2\alpha_c$	(6)
将 $r_s\alpha_s = (\bar{a}_x)_s$ 代入等式(3)获得		将 $r_c\alpha_c = (\bar{a}_x)_c$ 代入等式(6)获得	
$F_s = \frac{2}{5}m_s(\bar{a}_x)_s$	(3′)	$F_c = \frac{2}{5}m_c(\bar{a}_x)_c$	(6′)
将这个值代入(1)可得		将这个值代入(4)可得	
$(\bar{a}_x)_s = \frac{5}{7}g\sin\theta$	(1′)	$(\bar{a}_x)_c = \frac{2}{3}g\sin\theta$	(4′)

因此，有较大加速度的球将最先达到底部.

16.18　直径为 100 mm 的圆柱体，用细绳卷住圆柱的边缘，将绳的自由端系在一固定约束物上，使圆柱下落，试分析此运动规律.

解　☞ 列出两个方程——一个计算在铅直方向的力之和，假设向下为正方向，另一个计算关于质心的力矩之和，假设顺时针方向为正方向，它们是：

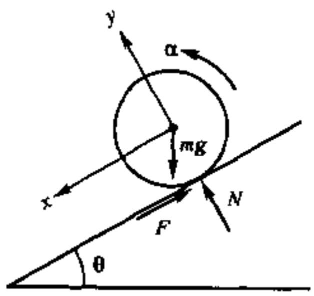


图 16-23

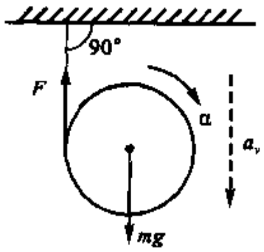


图 16-24

$$\sum F_v = mg - F = m\bar{a}_v \tag{1}$$

$$\sum \bar{M} = Fr = \bar{I}\alpha \tag{2}$$

见图 16-24，F 是绳的张力，转动惯量是 $I = \frac{1}{2}mr^2$，半径是 $r = 0.05$. 同样，$\alpha = \bar{a}_v/r = 20\bar{a}_v$，由于该运动等效于这个圆柱在绳上滚动. 所以等式(2)可为

$$0.05F = \frac{1}{2}m(0.05)^2(20\bar{a}_v) \quad 即 \quad F = \frac{1}{2}m\bar{a}_v$$

将这个 F 的值代入等式(1)得到 $\bar{a}_v = 2g/3 = 6.53\ \mathrm{m/s^2}$.

按如上的解法，如当圆柱上有沟槽时，F 将作用在比圆柱的半径小的圆上，而此时得到的 $\bar{a}_v$ 将比 g 更小.

16.19　等质量 m，等半径 R 的固体球和细铁环用杆将其铰接在一起，在图 16-25(a)所示的斜面上作自由纯滚动，不计杆的质量，求杆所受的力，假定轴承无摩擦.

解　☞ 画隔离体图，假设 C 是作用在销上的压力[见图 16-25(b)]，假如 C 的符号为负则表明 C 为拉力.

分别以大写的 S 和 H 表示球和铁环，通过每个质量中心的加速度 $\bar{a}$ 是相同的，因为半径相同，所以两个物体的角加速度 α 是相同的，将沿平行于斜面的力求和得以下两个方程：

$$mg\sin\theta - F_S - C = m\bar{a} \tag{1}$$

$$mg\sin\theta - F_H + C = m\bar{a} \tag{2}$$

因为有 4 个未知量(F_S, F_H, C, α)，所以还需要两个方程(才能求解)，这两个方程从对质心取矩而

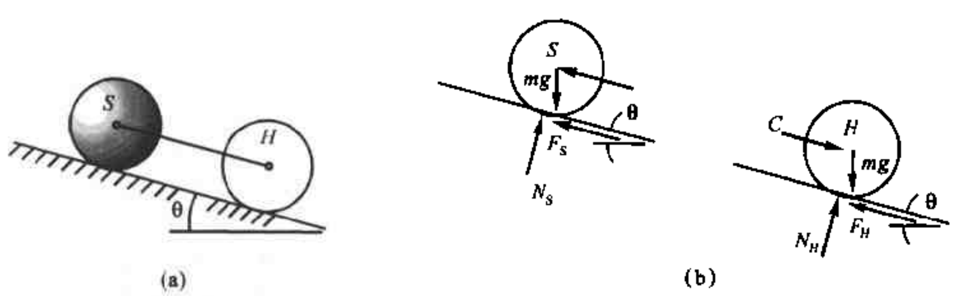


图 16-25

得到

$$F_S \times r = I_S\alpha = \frac{2}{5}mr^2\alpha \tag{3}$$

$$F_H \times r = I_H\alpha = mr^2\alpha \tag{4}$$

关系式 $\bar{a} = r\alpha$ 对每个方程都成立，从(3)和(4)知：$F_S = \frac{2}{5}m\bar{a}$ 和 $F_H = m\bar{a}$，把这些结果代入方程(1)和(2)，然后把所得结果相加而消去 C，得 $\bar{a} = \frac{10}{17}g\sin\theta$，然后解得 $C = \frac{3}{17}mg\sin\theta$(压力).

16.20　平行放置的球杆在球台上多高的位置击球，才能使半径为 r 的台球做相对于桌面无摩擦的运动？参照图 16-26.

解　☞ 运动方程为

$$\sum F_x = P = m\bar{a}_x \tag{1}$$

$$\sum F_y = N_A - mg = 0 \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = Pl = \frac{2}{5}mr^2\alpha \tag{3}$$

因 $\alpha = \bar{a}_x/r$，代入(3)得　$P = 2mr\bar{a}_x/5l$

将 P 值代入方程(1)，得 $l = \frac{2}{5}r$，故，所求距离为 $r + \frac{2}{5}r = \frac{7}{5}r$.

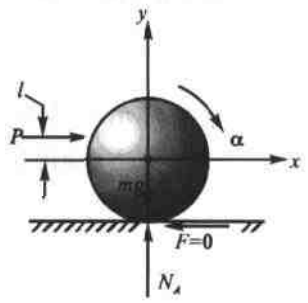


图 16-26

这同一过程也用于确定台球球桌边上垫子的高度，使球反弹回来时，不受桌面的摩擦. 在这种情况下，垫子的作用力 P 相当于球杆的力. 因此，答案是相同的.

16.21　一均质圆柱体重 16.1 lb，沿一固定的圆槽纯滚动. 在图示瞬时圆柱体质心的速度为 9 ft/s，方向右下. 求圆柱体所受圆槽反力.

解　☞ 画出圆柱体受的反力 F 和 N，如图 16-27(a)所示.

当圆柱体在任意位置时，研究它的必要的运动关系. 假设圆柱体向左上方滚动，见图 16-27(b)，ϕ 和 θ 均增大，所以，设角加速度沿逆时针方向，因此 $\bar{a}_t$ 沿着左上方向.

运动方程为

$$\sum F_n = m\bar{a}_n \quad 或 \quad N - 161\cos30° = \frac{16.1}{32.2}\bar{a}_n \tag{1}$$

$$\sum F_t = m\bar{a}_t \quad 或 \quad -16.1\sin30° + F = \frac{16.1}{32.2}\bar{a}_t \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha \quad 或 \quad -F \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{16.1}{32.2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha \tag{3}$$

其中 $\bar{a}_n$ 和 $\bar{a}_t$ 是质心 G 加速度的分量的大小. α 是圆柱体关于 G 点的角加速度大小. 质心 G 可认为是绕 O 转动.

故　$\bar{a}_n = v^2/OG = 81.4/4.5 = 18\ \text{ft/s}^2$. 但切线方向 $\bar{a}_t$ 大小仍然未知.

将 α 用 $\bar{a}_t$ 的形式表示出，如图 16-27(b)，最初圆柱体上的 D 点和轨道上 M 点相接触. 因为假设是纯滚动，轨道上 BM 段弧长长度等于圆柱上 BD 段弧长(否则将出现滑动)，设 r 为圆柱半径，

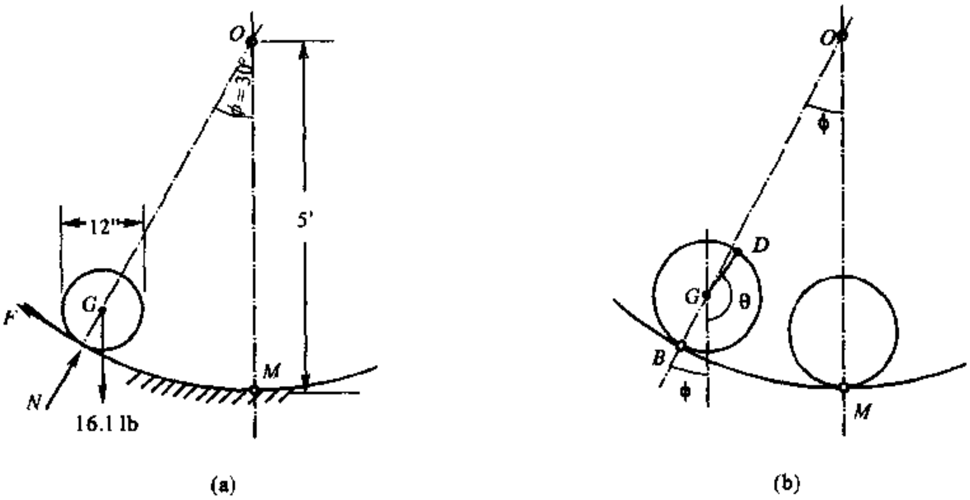


图 16-27

R 为轨道曲率半径.

则 $r(\phi+\theta)=R\phi$ 或 $\theta=(R/r-1)\phi$，如果将此关系中的 θ 和 ϕ 对时间求导，此等式仍成立. θ 关于时间 t 的二次导数($\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$)大小等于角加速度 α. ϕ 对时间二次导数可以用 $\bar{a}_t$ 来表示. 因圆心 G 可看作绕 O 点转动，则 $\bar{a}_t=(R-r)(\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}t^2)$，因此

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{R-r}{r}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}=\frac{R-r}{r}\frac{\bar{a}_t}{R-r}=\frac{\bar{a}_t}{r}$$

有 $R=5$ ft, $r=\frac{1}{2}$ ft 因此 $\alpha=2\bar{a}_t$.

运动方程简化为

$$N-13.9=9 \tag{1'}$$

$$-8.05+F=\frac{1}{2}\bar{a}_t \tag{2'}$$

$$-F=\frac{1}{4}\bar{a}_t \tag{3'}$$

解得 $F=2.68$ lb, $N=22.9$ lb.

16.22 一质量为 m，回转半径为 k 的圆盘，当具有顺时针方向角速度 ω_0 时，把它放到水平地面上. 如图 16-28(a). 如果盘和地面的摩擦系数为 μ，求滑动停止，开始滚动时的那一刻的时间.

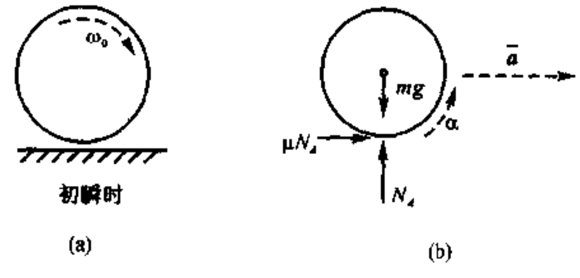


图 16-28

解 隔离体图上画出摩擦力 μN_A，法向力为 N_A，重力 mg 作用在圆盘上. 合力产生一个向右的加速度 $\bar{a}$，和一个逆时针方向角加速度 α，如图 16-28(b).

运动方程为

$$\sum F_h=m\bar{a}\quad 或\quad \mu N_A=m\bar{a} \tag{1}$$

$$\sum F_v=0\quad 或\quad N_A=mg \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha \quad 或 \quad \mu N_A r = mk^2\alpha \tag{3}$$

把 $N_A = mg$ 代入方程(1)和(3)，得到

$$\bar{a} = \mu g \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{\mu g r}{k^2} \tag{5}$$

速度和时间的关系由方程(4)得

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \mu g t = \mu g t \tag{6}$$

由于，$\bar{v}_0 = 0$，而且 t 时刻的角速度可用方程(5)表示为

$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu g r t}{k^2} \tag{7}$$

这时假设顺时针是正的.

当滑动停止而有滚动时，$\bar{v} = r\omega$，因此用(7)和 r 相乘得 $\bar{v}$，这就得出所求的时间 t'：

$$\mu g t' = r\omega_0 - \frac{\mu g r^2 t'}{k^2} \quad 或 \quad t' = \frac{r\omega_0}{\mu t(1 + r^2/k^2)}$$

16.23　半径为 R 的均质圆柱体置于平台上，平台具有不变的水平加速度，大小为 a，假设没有滑动，求圆柱体的加速度的大小 a_O.

解　圆柱体受力图如图 16-29 所示.

设圆柱体的角加速度为顺时针，I 点是圆柱和平台之间的速度瞬心. 因此具有与平台相同的向右加速度. 得

$$\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_{O/I} + \mathbf{a}_I$$

沿水平方向，此方程式得(设向右为正)

$$a_O = R\alpha + a \tag{1}$$

圆柱的运动方程：

$$\sum F_x = ma_O \quad 或 \quad F = ma_O \tag{2}$$

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad 或 \quad -FR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \tag{3}$$

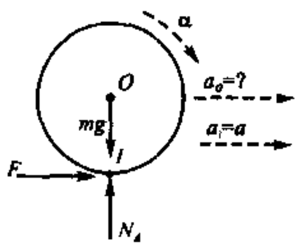


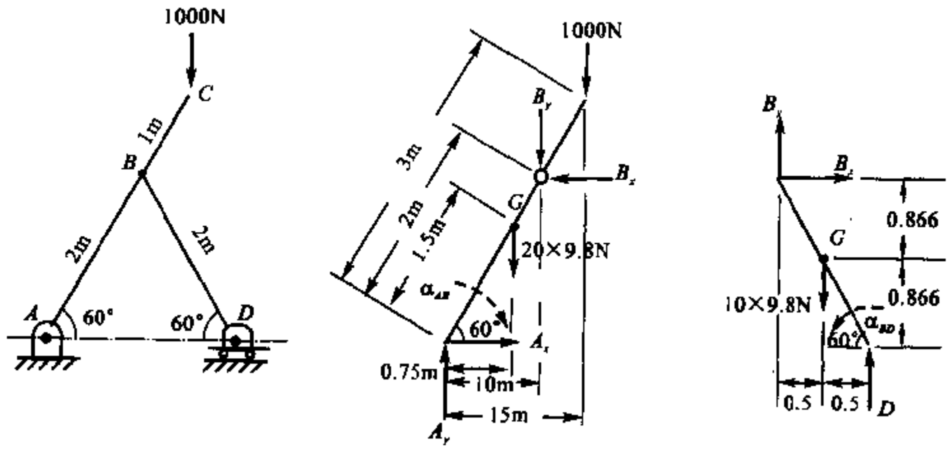
图 16-29

摩擦力 F 的矩是为负，因为与角加速度 α 相反.

将方程(1) 代入到(2)中，得到 $F = m(R\alpha + a)$.

把 F 的值代入方程(3)，得 $R\alpha = -\frac{2}{3}a$，因此由方程(1)，质心的加速度是 $a_O = -\frac{2}{3}a + a = \frac{1}{3}a$.

16.24　均质杆 ABC，如图 16-30(a)所示，长 3000 mm，质量 20 kg，用销子于 A 点接地并与长为 2000 mm，质量为 10 kg 的均质杆 BD 铰接. 求当约束绳被切断的瞬时，每个杆的角加速度. 假定当 D 向右运动时没有摩擦.



(a)　(b)　(c)

图 16-30

解 ☞ 图 16-30(b)和(c)是两杆被释放的瞬时的隔离体示意图. B 点在两杆上的加速度相同,因此我们可得

$$\boldsymbol{a}_B = (\boldsymbol{a}_{B/D})_n + (\boldsymbol{a}_{B/D})_t + \boldsymbol{a}_D \tag{1}$$

从 ABC 杆上看 B 点的加速度为 $2\alpha_{AB}$,方向垂直于 AB 杆,斜向右下方,与水平方向成 30°角.

因在释放的瞬间,角速度为零,所以$(\boldsymbol{a}_{B/D})_n$ 为零. 加速度$(\boldsymbol{a}_{B/D})_t$ 斜向左下方,与水平方向成 30°,大小等于 $2\alpha_{BD}$. 最后,表示出 a_D 只能沿水平方向. 设竖直向下为正方向,在方程(1)中,加速度在竖直方向上的投影为:

$$2\alpha_{AB}\sin30° = 2\alpha_{BD}\sin30° + 0$$

由此可得 $\alpha_{AB} = \alpha_{BD}$,我们可用同一个 α 表示两个加速度的大小.

以水平向右为正方向,在方程(1)中加速度在水平方向上的投影之和为

$$2\alpha_{AB}\cos30° = -2\alpha_{BD}\cos30° + a_D$$

其中 α 是二杆的角加速度,得到 $a_D = 3.46\alpha$ 向右.

对于杆 BD,我们可得其质心 G 的加速度为:

$$\boldsymbol{a}_G = (\boldsymbol{a}_{G/D})_t + (\boldsymbol{a}_{G/D})_n + \boldsymbol{a}_D \tag{2}$$

同理,$(\boldsymbol{a}_{B/D})_n$ 为零. $(\boldsymbol{a}_{B/D})_t = (1)\alpha$,指向左下方 30°方向,当然,已经得出 $a_D = 3.46\alpha$,水平向右.

在方程(2)中向水平方向投影,可得

$$(a_G)_x = 3.46\alpha - (1\alpha)(0.866) = 2.6\alpha \quad (\text{向右})$$

向竖直方向投影,得

$$(a_G)_y = (1\alpha)(0.5) = 0.5\alpha \quad (\text{向下})$$

在图 16-30(c)中,水平方向投影,以水平向右为正,竖直方向投影,以竖直向下为正,得

$$B_x = m(a_G)_x = 10(2.6\alpha) = 26\alpha \quad (\text{向右}) \tag{3}$$

$$-B_y + 10 \times 9.8 - D = 10(0.5\alpha) \tag{4}$$

接着对 G 点取矩,取逆时针为正有

$$-B_x \times 0.866 - B_y \times 0.5 + D \times 0.5 = \frac{1}{12}(10)(2)^2\alpha \tag{5}$$

由式(4)得

$$D = -B_y + 98 - 5\alpha$$

将 D 与 B_x 的值代入方程(5)得

$$-0.866(26\alpha) - B_y(0.5) + 0.5(-B_y + 98 - 5\alpha) = 3.33\alpha \tag{6}$$

由(6)式得

$$B_y = 49 - 28.3\alpha$$

研究如图 16-30(b)所示的隔离体图,再对 A 点取矩,得

$$\sum M_A = (20 \times 9.8)(0.75) + 1000(1.5) + B_y \times 1 - B_x \times 1.732 = \frac{1}{3}(20)(3)^2\alpha \tag{7}$$

联立方程(6)(7)解得　$\alpha = 12.7\ \text{rad/s}^2$.

平行移动

16.25　一个重为 50 lb 的均质门连接在辊轮 A 和 B 上,并放在水平导轨上,如图 16-31 所示. 此时系统静止,这时在图示位置施加常力 P,大小为 10 lb,求 5 s 后物块的速度是多少? 辊轮的反力是多大? 假设辊轮摩擦可略去。

解 ☞ 假设加速度 a_x 为 x 轴正方向,如图 16-32 的隔离体图所示.

由方程 $\sum F_x = ma_x$, $\sum F_y = ma_y$, $\sum \overline{M} = 0$ 得

$$\sum F_x = 10 = \frac{50}{32.2}a_x \tag{1}$$

$$\sum F_y = A + B - 50 = \frac{50}{32.2}a_y \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = B \times 4 - A \times 4 - 10 \times 1 = 0 \tag{3}$$

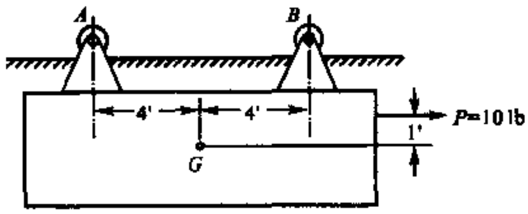


图 16-31

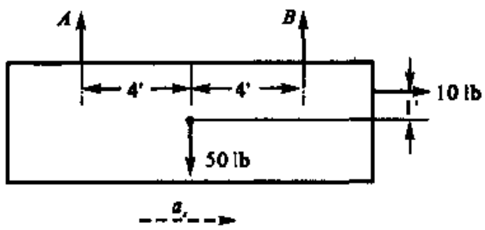


图 16-32

由方程得 $a_x = 6.44\ \mathrm{ft/s^2}$，由于 a_x 是常量，用包含已知量 v_0、a、t 和未知量 v 公式得

$$v = v_0 + at = 0 + (6.44\ \mathrm{ft/s^2})\ (5\ \mathrm{s}) = 32.2\ \mathrm{ft/s}$$

联立方程(2)(3)得 $A = 23.7\ \mathrm{lb}$，　$B = 26.3\ \mathrm{lb}$.

16.26　如图 16-33(a)所示，一均质杆 AB 长 2000 mm，质量为 2 kg，杆的两端在光滑的水平轨道上运动，求在水平力 20 N 的作用下 AB 杆的加速度及 A，B 两点的约束力.

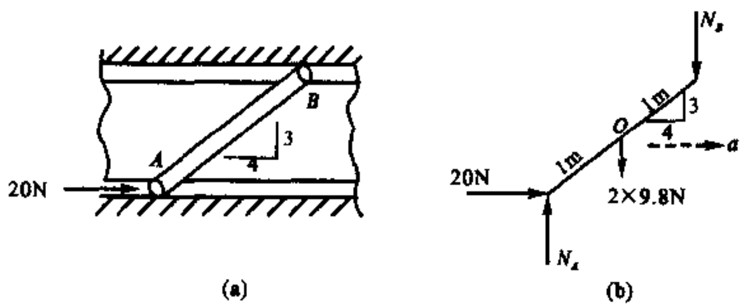


图 16-33

解　图 16-33(b)的隔离体图上，画出了已知力，A，B 两点的法向约束力及重力 2×9.8 N. 加速度方向向右(这里不含角加速度).

假设力的方向向右为正，向上为正，且瞬时逆时针旋转方向为正. 则运动方程式为

$$\sum F_x = ma \quad 得 \quad 20 = 2a \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 得 \quad N_A - N_B - 19.6 = 0 \tag{2}$$

$$\sum \overline{M}_O = 0 \quad 得 \quad 20 \times 1 \times \frac{3}{5} - N_A \times 1 \times \frac{4}{5} - N_B \times 1 \times \frac{4}{5} = 0 \tag{3}$$

由方程(1)得 $a = 10\ \mathrm{m/s^2}$，由式(2)(3)联立解得 $N_A = 17.3\ N$ 向上和 $N_B = -2.3$ N 向上，(正号为图示与假设完全一致；负号表示图示方向与假设相反，即 N_B 向上).

16.27　一货车由静止从斜面顶端下滑，斜面长 1 mi(英里)，斜面高是斜面长的 1.5%，并有 8 lb/ton 的阻力，求货车滑出斜面后在水平面上滑行多远后静止.

解　以斜面的平行方向进行受力分析，沿此方向的分力有重力 $0.015W$ 和阻力 $(8/2000)W =$

0.004 Wlb, 前者(重力分力)是加速的, 后者(阻力)是减速的.

运动方程是

$$\sum F_{\parallel} = 0.015W - 0.004W = \frac{W}{g}a$$

因此加速度 $a = 0.011g$, 在斜面底端的速度可由公式得到

$$v^2 = v_0^2 + 2as = 0 + 2 \times (0.011g) \times (5280)$$

为求在水平路面上走过的路程 s, 利用相同的公式, 只有一个水平的阻力阻止它运动(也就是阻力), 就是 $-0.004W$.

因此, $\sum F_{\parallel} = -0.004W = (W/g)a$, 得 $a = -0.004g$. 在此, v_0^2 的值是由上面公式求出的 v^2 的值, 有

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad 或 \quad 0 = 2 \times (0.011g) \times (5280) - 2 \times (0.004gs)$$

由此得到沿水平方向走过的路程 $s = 14\ 500$ ft.

16.28 一物块 A 放在如图 16-34 所示的小车 B 上, A, B 间摩擦系数为 0.30, 若 A 质量为 70 kg, 求小车 B 所能达到的最大加速度.

解 共有两种可能性: (a) A 从车上滑下. (b) A 在车上翻倒.

在(a)中, 摩擦力达最大值, 且等于 A, B 间摩擦系数与正压力的乘积.

在(b)中, 摩擦力也许为: (1)小于最大值, (2)等于最大值, (3)大于最大值.

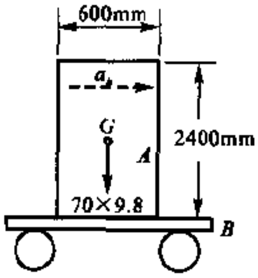


图 16-34

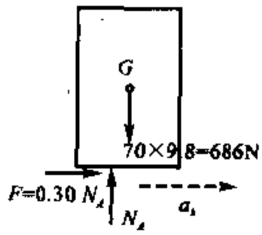


图 16-35

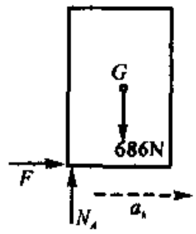


图 16-36

若导致倾斜的摩擦力比最大摩擦力大, 那它将不成立, 因此物块 A 将滑动, 加速度极值应取(a)中的计算值.

物块 A 在(a)情况下的受力如图 16-35 所示, 假设正压力 N_A 作用在某未知点, 摩擦力向右, 小车向右加速, 由于摩擦力带动 A 一起运动, 则只需两个方程:

$$\sum F_h = ma_h \quad 即 \quad F = ma_h \tag{1}$$

$$\sum F_v = ma_v \quad 即 \quad N_A - 686 = 0 \tag{2}$$

由方程(2)得 $N_A = 686$ N.

则方程(1)变为 $0.30 \times 686 = 70\ a_h$, 即 $a_h = 2.94\ \mathrm{m/s^2}$.

所以加速度大于 $2.94\ \mathrm{m/s^2}$ 时 A 开始滑动.

物块 A 在(b)情况下的受力如图 16-36 所示, 此时物块将发生向后倾倒的运动, 正压力和摩擦力如图示.

假设 F 小于 $0.30\ N_A$, 只有当 A 滑动时, F 取极限值, 则

$$\sum F_h = ma_h \tag{3}$$

$$\sum F_v = ma_v = 0 \tag{4}$$

$$\sum \bar{M} = 0 \tag{5}$$

即

$$F = 70a_h \tag{3'}$$

$$N_A - 686 = 0 \tag{4'}$$

$$-N_A \times 0.3 + F \times 1.2 = 0 \tag{5'}$$

由方程(4′)得 $N_A=686$ N，代入方程(5)，$F=172$ N.

把 $F=172$ N 代入(3′)，得 $a_h=2.46$ m/s^2.

即当加速度达到 2.46 m/s^2 时 A 开始倾斜，此时摩擦力为 172 N，小于滑动摩擦力极值(0.30 ×686 N).

所以倾斜早于滑动.

即引起倾斜的加速度是 2.46 m/s^2.

而只有当加速度达到 2.94 m/s^2 才能引起滑动. 因为首先达到 2.46 m/s^2，所以在滑动之前它将翻倒.

从方程(5′)可以直接判断出首先发生倾斜，因为在这种情况下 F 与 N_A 的比为 0.25，它小于最大摩擦系数 0.30.

16.29　一个 600 kg 的电梯以 6 m/s^2 向上加速度上升，一个 60 kg 的操作人员站在电梯上的一个弹簧秤上，求弹簧秤的读数是多少千克和钢丝绳上的拉力是多少？

解　如图 16-37 所示人的受力图，重力向下，弹簧的支持力向上，因为加速度是向上的，故设其为正. 则有下面方程式：

$$\sum F_v = P - 60\times 9.8 = ma = 60\times 6$$

由 $P=948$ N 得弹簧秤的读数为 948/9.8 = 96.7 kg，因此，操作人员的质量明显增加 96.7 − 60 = 36.7 kg.

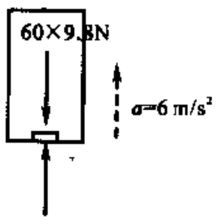


图 16-37

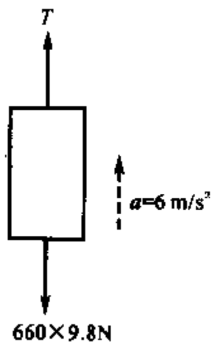


图 16-38

为了确定钢丝绳的拉力，如图 16-38 所示的隔离体图，取向上为正方向，对于整体有运动方程为

$$\sum F_v = ma$$
$$T - 660\times 9.8 = 660\times 6$$

解出 $T=10\,400$ N.

16.30　如图 16-39 所示. 水平面上的物块 B 由绕过光滑滑轮的绳子拴住，绳的另一端拴住 A，质量为 1.2 kg，B 的质量为 2 kg，绳子柔韧性好，不会伸长，质量忽略不计，B 与地面的摩擦系数是 0.20，试确定 A 的运动规律.

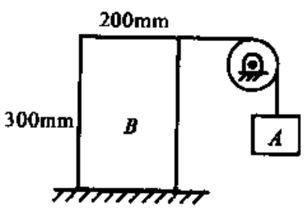


图 16-39

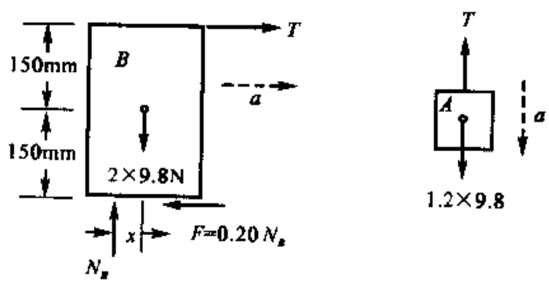


图 16-40

解 ☞ 画出 A 和 B 的隔离体图(见图 16-40),注意 N_B 与物块 B 垂直中心线方向的水平距离为 x,假设 B 的加速度方向向右.

由作用在 A 的垂直方向的合力(设合力方向向下为正)得

$$1.2\times 9.8 - T = 1.2a \tag{1}$$

研究 B 的受力图得　$N_B = 2\times 9.8 = 19.6\ \text{N}$

由 B 水平方向合力(向右为正)得

$$T - 0.20\ N_B = 2a \tag{2}$$

联立方程(1)和(2)得:$a = 2.45\ \text{m/s}^2$.

作用在质心 B 上的合力矩为零,设逆时针力矩为正,则方程为

$$-T\times 0.15 - N_B\times x - F\times 0.15 = 0 \tag{3}$$

将 T、N_B、F 的值代入方程(3)得:$x = -0.975$ mm,负号表示 N_B 在质心右侧而不是左侧.

16.31　如图 16-41.台架 A 的加速度为 2.5 m/s²,方向向左,B 销接在 P 点,顶端与竖直光滑面 H 点接触,A,B 的质量分别为 30 kg、7 kg,求水平力 F 和接触点 H 的水平推力.

解 ☞ 取整体为研究对象,由水平方向受力情况(向左为正),得

$$F = Ma = (30+7)\times 2.5 = 92.5\ \text{N}$$

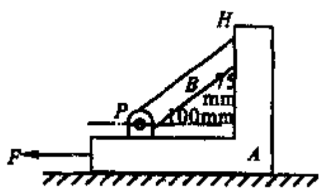


图 16-41

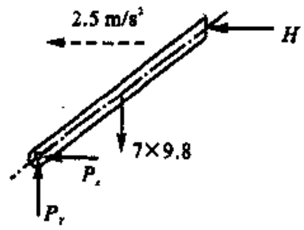


图 16-42

画出杆 B 的受力图如图 16-42 所示.

由动力学方程得

$$\sum F_H = Ma_H \quad 即 \quad P_x + H = 7\times 2.5 \tag{1}$$

$$\sum F_v = Ma_v \quad 即 \quad P_y - 7\times 9.8 = 0 \tag{2}$$

$$\sum \overline{M} = 0 \quad 即 \quad 0.0375\times H - 0.0375\times P_x - 0.05\times P_y = 0 \tag{3}$$

由方程(1)得　$P_x = 17.5 - H$

由方程(2)得　$P_y = 68.6$

代入(3)得:

$$0.0375\times H - 0.0375\times 17.5 + 0.0375\times H - 0.05\times 68.6 = 0$$

所以 $H = 54.5$ N.

16.32　在图 16-43 中,A、B 物体质量均为 20 kg,为防止 A 在 B 上滑动,在 B 上钉一条带子,由于 P 的作用,使系统沿光滑面向左加速,求使 A 不倾斜的 P 的极大值,系统以 3 m/s 的初速度向右运动,当运动 4 m 后,其速度为多少?

解 ☞ 物块 A 的隔离体图如图 16-44 所示,竖直支持力 N_A 作用在最右侧,在物块刚要倾斜的瞬时,运动方程为

$$\sum F_h = Ma_h,\quad F = 20a \tag{1}$$

$$\sum F_v = Ma_v,\quad N_A - 20\times 9.8 = 0 \tag{2}$$

$$\sum M = 0,\quad N_A\times 0.075 - F\times 0.125 = 0 \tag{3}$$

把方程(2)代入(3),得 $F = 118$ N,把 F 代入方程(1)解得 $a = 5.9\ \text{m/s}^2$,求移动 4 m 后的速度.

首先考虑在速度为 0 时向右移动的距离，运用运动方程

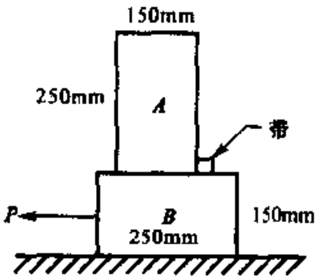


图 16-43

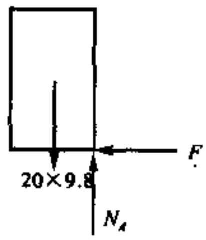


图 16-44

$$v^2 = v_0^2 + 2as, \quad 0 = 3^2 - 2 \times 5.9s, \quad s = 0.76 \text{ m}$$

由于总共是移动了4 m，则向左运动了 3.24 m．使用同样的运动学方程，并设向左为正，$v^2 = 0 + 2 \times 5.9 \times 3.24$．因此，最后速度为 6.18 m/s，向左．

16.33 物块 A 质量为 30 kg，放置在 B 的顶端，B 质量为 45 kg，如图 16-45 所示．物块间摩擦系数为 1/3，B 与水平面间摩擦系数为 1/10，求使 A 不滑动也不倾倒的极大值 P．

解 首先确定导致 A 在 B 上滑动的 P 极限值，画出隔离体上所受的物块间的摩擦力 $(1/3)N_A$，见图 16-46．

反作用力 N_A 的作用点未知，但这在解题中不重要，由观察，其大小为 $30 \times 9.8 = 294$ N，同样，反作用力 $N_B = 294 + 45 \times 9.8 = 735$ N．

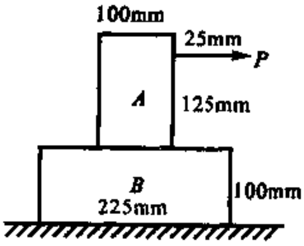


图 16-45

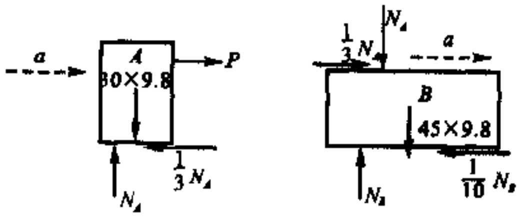


图 16-46

物体 A 的其它运动方程式为

$$\sum F_h = ma_h \quad \text{或} \quad P - \frac{1}{3}N_A = 30a \tag{1}$$

对于物体 B，需要的运动方程为

$$\sum F_h = ma_h \quad \text{或} \quad \frac{1}{3}N_A - \frac{1}{10}N_B = 45a \tag{2}$$

由方程得 $a = 0.544$ m/s²，$P = 114$ N(使 A 在B 上滑动)．

下一步画出隔离体图的图以确定引起倾倒的力 P(见图 16-47)．现在法向反力 N_A 必须画在右下角，摩擦力 F 未知．

由观察，$N_A = 30 \times 9.8 = 294$ N，$N_B = 735$ N，物体底部的摩擦力为$\frac{1}{10} \times 735 = 73.5$ N．

对于物块 A，运动方程为

$$\sum F = ma_h \quad \text{或} \quad P - F = 30a \tag{1}$$

$$\sum \overline{M} = 0 \quad \text{或} \quad -P \times 0.05 + N_A \times 0.05 - F \times 0.075 = 0 \tag{2}$$

对于物块 B，需要的方程为

$$\sum F_h = ma_h \quad \text{或} \quad F - 73.5 = 45a \tag{3}$$

联立解方程(1)(2)(3)，得到 $P = 132$ N．

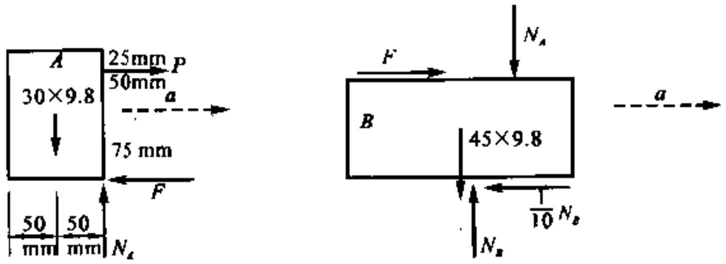


图 16-47

取两个 P 值的最小值即 $P=114$ N,是不会导致物块 A 滑动或倾倒的最大值.

16.34　如图 16-48 中所示的搬运车上装有 1500 mm 高的 6 个纸板盒,其中每个盒250 mm 高,边长 400 mm.当车的速度达到 1.5 m/s 时,求使纸盒没有倾倒的最小时间是多少? 设摩擦系数足以阻止滑动.

解　☞ 由纸板盒的隔离体图表明,运动方向向右.则相反方向的惯性力 $M\bar{a}$ 向左作用在质心上,以维持系统的"虚拟平衡状态".物体可能绕左下边角而倾倒.

此时对左下边缘取矩,有

$$M\times 9.8\times 0.2 = M\bar{a}\times 0.75$$

所以加速度最大值 $\bar{a}_{\max}=2.61\ \mathrm{m/s^2}$,由 $v=v_0+at$,得 $t_{\min}=0.57$ s.

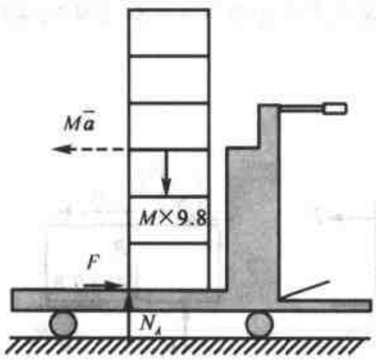


图 16-48

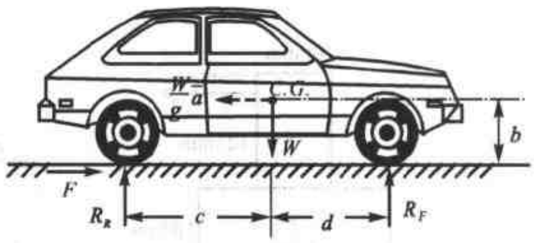


图 16-49

16.35　如图 16-49 所示,汽车以后轮驱动,问:

(a) 后轮与地面间的摩擦力为多大时,才能产生向右的加速度 $\bar{a}$?

(b) 忽略轮子的转动惯量,当地面与车轮的摩擦系数为 μ 时,车子的最大加速度是多大?

(c) 假设摩擦系数足够大,当加速度多大时,车子将开始向后倾倒?

解　☞ (a) 对车子施加惯性力 $\frac{W}{g}\bar{a}$,以维持车的"平衡",其方向水平向右.力系在水平方向求和,$\sum F_h = F-\frac{W}{g}\bar{a}=0$.

由此方程得　$F=\frac{W}{g}\bar{a}$.

(b) 为确定最大加速度,应先求出 R_R.且最大摩擦力 $F=\mu R_R$.各力对 R_F 的作用点取矩为零,即

$$-R_R(c+d)+W\times d+\frac{W}{g}\bar{a}\cdot b=0$$

得

$$R_R=\frac{Wd}{c+d}+\frac{Wb\bar{a}}{g(c+d)}$$

有

$$F=\mu R_R=\mu\frac{Wd}{c+d}+\mu\frac{Wb\bar{a}}{g(c+d)}$$

将 $F=(W/g)\bar{a}$ 代入解出，$\bar{a}=\mu dg/(c+d-\mu b)$.

注意在这种解法，是对某一合适的点取矩，而不必非是质心.

(c) 这种情况下，$R_F=0$，此时，对后轮与地面的接触点取矩得

$$\sum M_{R_R}=\frac{W}{g}\bar{a}\cdot b-W\times c=0$$

因此，引致倾斜的加速度为 $\bar{a}=\frac{cg}{b}$.

16.36　如图 16-50 所示一汽车，该车由前轮驱动，它能在 13.8 s 内由零加速到 60 mi/h 求前后两轮在加速过程中竖直方向所受反力（R_F 和 R_R），并求前轮与地面摩擦力. 已知车重 3385 lb，质心 G 位于前轮触地点之后 46 in，地面之上 31 in.

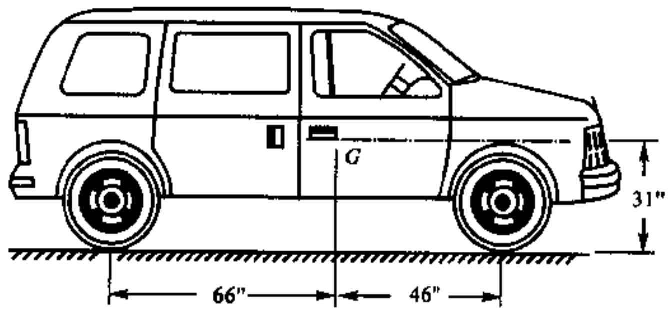


图 16-50

解　为求加速度 $\bar{a}$，由加速度关系式 $v=v_0+\bar{a}t$，即

$$60\times 5280/3600=0+\bar{a}\times 13.8$$

故

$$\bar{a}=6.38\ \text{ft/s}^2$$

由水平力之和得摩擦力，$\sum F_h=F=(3385/g)\times 6.38$，$F=671$ lb，由铅直力之和与关于 G 点之矩求和得到两个关于含 R_F 和 R_R 的方程：

$$\sum F_v=R_R+R_F-3385=0$$

$$\sum \overline{M}=-66R_R+46R_F+671\times 31=0$$

$$R_F=1809\ \text{lb}\quad R_R=1576\ \text{lb}$$

转动

16.37　图 16-51 中，均匀的铁棒置于光滑的水平桌面上. 它能够绕左端过 O 点与图示平面垂直的轴转动，一水平力 F 垂直于杆作用于其自由端(右端)，铁棒质量为 m，长为 l，当力作用瞬时角速度为零，求角加速度和轴 O 的作用反力.

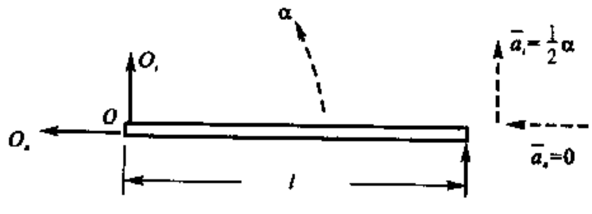


图 16-51

解　由运动方程

$$\sum F_n=m\bar{r}\omega^2=0,\qquad O_n=0$$

$$\sum F_t = m\bar{r}\alpha,\qquad O_t + F = m\frac{l}{2}\alpha$$

$$\sum M_O = I_O\alpha,\quad Fl = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

得 $\alpha = 3F/ml, O_t = \frac{1}{2}F$.

16.38　求解题 16.37，设水平力 F 过物体的撞击中心.

解　☞ F 的力臂为 q，即距撞击中心的距离，则有

$$q = \frac{k_O^2}{\bar{r}} = \frac{I_O}{m\bar{r}} = \frac{\frac{1}{3}ml^2}{\frac{1}{2}ml} = \frac{2}{3}l$$

列动力学方程：

$$\sum F_t = m\bar{r}\alpha \quad 或 \quad O_n + F = \frac{1}{2}ml\alpha$$

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad 或 \quad F\left(\frac{2}{3}l\right) = \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\alpha$$

解得　$\alpha = 2F/ml, O_t = 0$

这说明如果力过物体撞击中心，则切线方向的反作用力为零.一个网球运动员知道当球与拍接触点在拍的$\frac{2}{3}$处时感觉不到力.这是因为 O_t 为零或近乎为零.

16.39　一直杆底端与水平轴铰接，然后使其从垂直位置落下.求物体的运动规律.

解　☞ 设杆长 l，质量 m，图 16-52 所示的隔离体图上，画出重力 mg 向下，支座反力 R_t 和 R_n.设杆从铅垂静止位置的角位移为 θ.

杆在非平衡力作用下绕轴转动，由运动方程 $\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$, $\sum F_t = m\bar{r}\alpha$, $\sum M_O = I_O\alpha$.

运动规律由 θ 的函数可得到角速度和角加速度，因此，只须 $\sum M_O = I_O\alpha$ 的方程.

只有惟一的外力对过 O 点取矩即为 mg.取顺时针为正方向，有 $mgd = I_O\alpha$.

又 $d = \frac{1}{2}l\sin\theta, I_O = \frac{1}{3}ml^2, \alpha = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$，因此，

$$mg\left(\frac{1}{2}l\sin\theta\right) = \frac{1}{3}ml^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

由

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{2\theta}\omega$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3g}{2l}\sin\theta \quad 所以\ \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

两边乘以 $\mathrm{d}\theta$ 得

$$\omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

积分得$\frac{1}{2}\omega^2 = -(3g/l)\cos\theta + C$，其中 C 是积分常数.为了求出 C，注意到 $\theta = 0$ 时 $\omega = 0$，因此有 $0 = -(3g/2l)(1) + C$ 即 $C = 3g/2l$，那么，$\frac{1}{2}\omega^2 = -\left(\frac{3g}{2l}\right)\cos\theta + \frac{3g}{2l}$，即 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$.

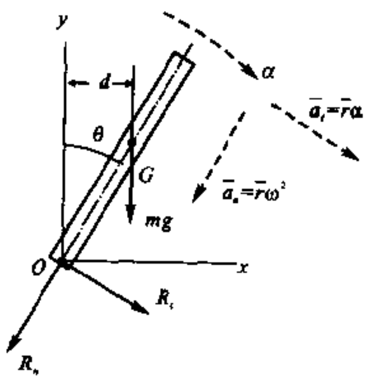


图 16-52

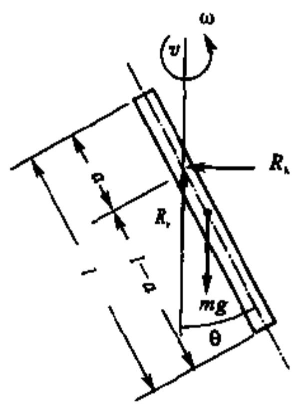


图 16-53

16.40　一根长为 l，质量为 m 的均匀杆，以恒定的角速度 ω 绕轴转动，此轴绕铅垂并过离杆某一端距离为 a 点转动，如图 16-53 所示的瞬时. 当杆通过纸平面时，求杆受到支点反力的垂直和水平分量.

解 ☞ 认为 a 不到杆长的一半，所受的重力为 mg，垂直和水平反力如图中所示.

注意到角速度 ω 是恒定的，所以绕垂直轴的角加速度 α 为零，因此外力对铅垂轴的力矩等于零，这个结论可由公式 $\sum M_v = I_v\alpha = I_v(0)$ 中得出.

同时公式（$\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$，$\sum F_t = m\bar{r}\alpha$ 和 $\sum M_O = I_O\alpha$），不能全部应用于杆，因为整体的三轴不垂直于均匀杆的对称平面.

认为杆是由许多微小部分组成，每一小部分以角速度 ω 绕某一铅直轴转动，且离轴的距离为 ρ.

从图 16-54 中可知：

$$\rho = z\sin\theta \quad 和 \quad dm = \frac{dz}{l}m$$

每一微元质量绕某一圆轨迹运动（半径为 ρ），因此，法向加速度 a_n 朝着半径 ρ 的方向，根据 a_n 可知力 dF（$dF = dm \times a_n$）. 所有法向方向（水平）力之和等于杆所受的水平力 R_n，在图示位置，杆中较长的部分在轴的右边，则指向左的法向力大于指向右的法向力. 因此反力 R_R 受法向力作用指向左.

在图中，微小质量所受的法向力朝着轴的方向即向左，对左边来说是一个负的方向，因此：

$$dF = -dm\rho\omega^2 = -\frac{dz}{l}m(z\sin\theta)\omega^2$$

合力为

$$F = \int dF = \int_{-a}^{l-a} -\frac{dz}{l}m(z\sin\theta)\omega^2$$

θ 与 ω^2 可从积分号内提出

$$F = R_h = -\frac{m\omega^2\sin\theta}{l}\int_{-a}^{l-a} z\,dz = -m\omega^2\left(\frac{1}{2}l - a\right)\sin\theta$$

要求出 R_v，可由竖直方向合力为零得

$$\sum F_v = 0 = R_v - mg \quad 即 \quad R_v = mg$$

对于求 ω 与 θ 的关系表达式，可参考题 16.42.

图 16-54

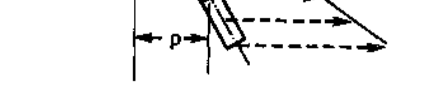


图 16-55

16.41　在题 16.40 中，求使杆保持“虚拟平衡状态”的惯性力作用点.

解 ☞ 由于杆的转轴并不垂直于其质量对称面，我们取杆上一质点元素 dm，其运动可看作是在垂直于转轴的平面内旋转.

如图 16-55. 惯性力为

$$dm\rho\omega^2 = \frac{dz}{l}m\rho\omega^2$$

杆 dz 长的质量如图离铅直轴 ρ 距离画出.集中力 R 离支撑点 z 距离也画在图上,此力必定与各单元质量的合力相等,并且由于各质点的力作用在同一转轴,具有相同的力矩,因此

$$R = \int_{-a}^{l-a} \frac{dz}{l} m\omega^2 \rho = \int_{-a}^{l-a} \frac{dz}{l} m\omega^2 z\sin\theta = \frac{m\omega^2 \sin\theta}{2}(1-2a)$$

此结果当然同题 16.40 中所得结果大小相等.

接下来求对转轴的惯性力矩,其必与 R 对转轴的力矩相等.由于在任何情况下各质点所受的力必然都是水平方向,而力臂都是竖直方向的(因此与 z 和 $\cos\theta$ 的乘积相同).

$$R\bar{z}\cos\theta = \int_{-a}^{l-a} z\cos\theta \frac{dZ}{l} m\omega^2 \rho$$

将 R 代入并用 $z\sin\theta$ 代替 ρ,方程变为

$$\frac{m\omega^2 \sin\theta}{2}(l-2a)\bar{z}\cos\theta = \frac{\cos\theta m\omega^2 \sin\theta}{l}\int_{-a}^{l-a} z^2 dx$$

当 $\theta \neq 0$ 或 $90°$ 时

$$\frac{\bar{z}}{2}(l-2a) = \frac{1}{3l}[(l-a)^3 - (-a)^3] \text{ 即 } \bar{z} = \frac{2}{3}\left(\frac{l^2 - 3la + 3a^2}{(l-2a)}\right)$$

当然,如果杆以其一端为轴转动,由于 $a=0$,以上等式中 $\bar{z}$ 将变成 $\bar{z} = \frac{2}{3}l$.在此条件下,力 $R = \frac{1}{2}m\omega^2 l\sin\theta$.

16.42　使用惯性力的方法求解 16.40 题.

解　☞ 在题 16.41 中知:长为 l 的杆绕其一端转动的惯性力$\left(\frac{1}{2}ml\omega^2\sin\theta\right)$应作用于杆长的$\frac{2}{3}$处,在杆的两部分上作用惯性力如图 16-56 所示,因此可根据平衡状态求解.

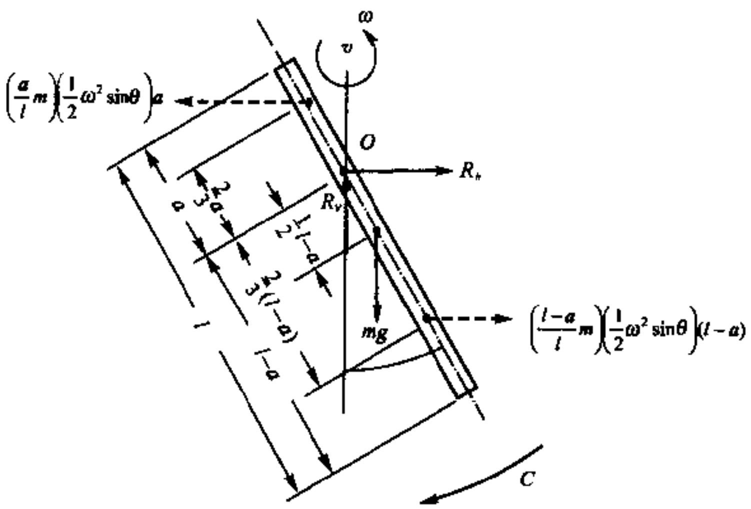


图 16-56

应注意到作用在系统上绕支点的力偶 C 及惯性力和重力对支点之矩求和等于零.

列平衡方程如下:

$$\sum F_h = 0 = +R_h - \left(\frac{a}{l}m\right)\left(\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta\right)a + \left(\frac{l-a}{l}m\right)\left(\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta\right)(l-a) \tag{1}$$

$$\sum F_v = 0 = -mg + R_v \tag{2}$$

$$\sum M_O = 0 = \left[\left(\frac{l-a}{l}m\right)\left(\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta\right)(l-a)\right]\left[\frac{2}{3}(l-a)\cos\theta\right] + \left[\left(\frac{a}{l}m\right)\left(\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta\right)a\right]\left(\frac{2}{3}a\cos\theta\right) - mg\left(\frac{1}{2}l-a\right)\sin\theta + C \tag{3}$$

由方程(1),$R_h = -\frac{1}{2}\omega^2 m(l-2a)\sin\theta$.

当然,此结果可校核题 16.40 的解.这里的负号表明假设 R_h 的方向是错误的,由此该作用力方向应水平向右.

由(3)式,

$$C = m\sin\theta\left[g\left(\frac{1}{2}(l-a)\right) - \frac{1}{3}\omega^2(l^2 - 3la + 3a^2)\cos\theta\right]$$

力偶 C 的作用效果可以得到体现. 即维持杆以已知角速度 ω 转动而张开的角 θ 时需要一个大小为 C 的力矩. 因此, 如果没有力矩 C 作用于转轴时, 杆就需要继续转过一定的角度 θ 以达到给定的角速度 ω, 为了求得 θ, 令 $C=0$, 而 $\sin\theta\neq 0$, 则

$$\cos\theta = \frac{3g\left(\frac{1}{2}l - a\right)}{(l^2 - 3la + a^2)\omega^2}$$

一组 θ 被求出, 就可以由 $\sin\theta$ 求得相应的 R_h 的值.

16.43 一个重为 161 lb 的圆柱体(或选择 5.00 slugs), 圆柱面体被一细线缠绕, 线的下端挂一质量为 16.1 lb 的 W 物体, 如图 16-57(a)所示, 在重物的作用下由静止开始转动, 不计转动处的摩擦, 圆柱体的直径为 36 ft, 求由静止开始, 转动 2 s 后圆柱体的角速度.

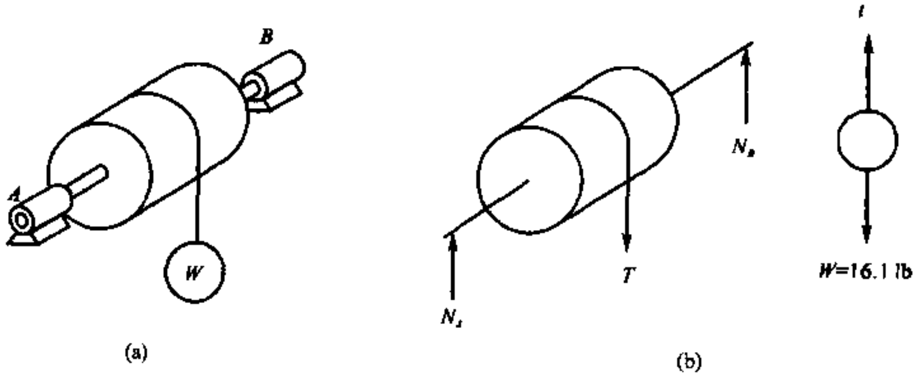


图 16-57

解 ☞ 圆柱及重物受力情况如图 16-57(b)所示, 注意到可以通过拉力 T 将二者联系起来.

要求 2 s 后的角速度 ω, 就必须求它的角加速度 α. 可以由本章定律求得, 只需列出此瞬时的运动方程:

$$\sum M_{AB} = \bar{I}_{AB}\alpha$$

下标 AB 表示关于轴 AB, 则

$$T\times r = \frac{1}{2}mr^2\alpha \quad 得 \quad T\times 1.5 = \frac{1}{2}\left(\frac{161}{32.2}\right)(1.5)^2\alpha \tag{1}$$

由于拉力 T 与角加速度 α 都为未知, 还需另一方程.

写出重物 W 在垂直方向所受合力的运动方程式

$$\sum F_v = ma_v \quad 得 \quad 16.1\text{ lb} - T = \frac{16.1}{32.2}a_v \tag{2}$$

将 $a_v = r\alpha = 1.5\alpha$ 代入(2)式

$$16.1 - T = \frac{16.1}{32.2}(1.5\alpha) \tag{2'}$$

由(1)解得 $T=3.75\alpha$, 然后将其代入(2′), 求得 $\alpha = 3.58\text{ rad/s}^2$

则 2 秒钟后的角速度 ω 为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (3.58)(2) = 7.16\text{ rad/s}$$

16.44 研究图 16-58 中的复摆的运动规律.

解 ☞ 复摆与只考虑一个质点的单摆不同. 这里我们考虑许多有不同速度和加速度的质点的组合, 系统绕垂直于纸面但不是形心轴线的轴旋转.

假定摆逆时针转动, 即 θ 是正的方向. 而它的重力对绕轴旋转有阻碍作用. 因此, 关于对旋转轴取矩, 得方程

$$\sum M_O = I_O\alpha$$

由于重力 mg 的水平力臂为 $\bar{r}\sin\theta$，可写为

$$\sum M_O = -(mg)(\bar{r}\sin\theta) = I_O\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad 或 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{I_O/m\bar{r}}\sin\theta$$

这同摆长为 l 单摆方程的形式相同．即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

所以，可以看出，当 l 等于 $I_O/m\bar{r}$，复摆和单摆有相同的周期．

如果用复摆关于轴转动的回转半径 k_O 表示 I_O，则结果略有不同．

因为 $I_O = mk_O^2$，单摆的等效长度可写成

$$l = \frac{I_O}{m\bar{r}} = \frac{mk_O^2}{m\bar{r}} = \frac{k_O^2}{\bar{r}}$$

复摆运动可以看作把质量集中到离旋转轴为 $k_O^2/\bar{r}$ 距离的点的单摆．$k_O^2/\bar{r}$ 的值经常出现在旋转问题中．

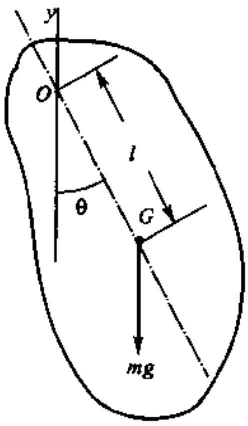


图 16-58

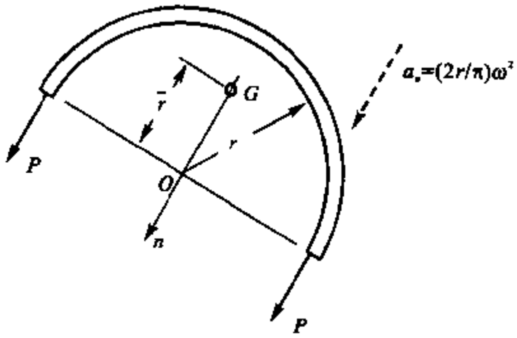


图 16-59

16.45　求以常角速度 ω 旋转的飞轮的轮缘中的应力．

解　画半个轮缘的隔离体图如图 16-59 所示．n 轴方向是从 G 向 O，其中 G 为半轮缘的质心．有 $OG = 2r/\pi$．

用张力 P 表示半轮缘的隔离体图上每边受到的拉力．由于轮子以匀角速度转动，没有角加速度，所以切向惯性力($m\bar{r}\alpha$)不存在．

设 δ 为材料的质量密度，只需列一个平衡方程：

$$\sum F_n = m\bar{a}_n \quad 或 \quad 2P = m\frac{2r}{\pi}\omega^2$$

单位拉应力等于力 P(一边的)除以横截面面积 A，即

$$\sigma = P/A = mr\omega^2/\pi A$$

将半环质量 m 表示为半环截面 A 的表达式，半周长为 πr，质量密度为 δ：

$$m = A\pi r\delta$$

当然，这是基于圆环厚度很小的情况．将 m 的表达式代入应力方程

$$\sigma = \delta r^2\omega^2$$

由于缘的速度 $v = r\omega$，应力公式又可写为

$$\sigma = \delta v^2$$

在美国常用单位制中，σ 为应力单位 lb/ft^2，δ 为质量密度单位 slugs/ft^3，v 为速度，单位 ft/s．

在国际单位制中，σ 为应力单位 N/m^2；δ 为密度单位 kg/m^3，v 为速度单位 m/s．

16.46　在铁轨转弯处，外铁轨应高于内铁轨．路基通常会高于海平线，习惯上称内外铁轨垂直距离为落差 e，而不是垂直距离，这个 e 越大，火车驶过轨道的速度就可以越大，试求用火车速度 v，曲率半径 r 和转弯角表示的 e．参考图 16-60(a)．

解　这是一个可将物体转动视为质点绕曲率中心转动的例子．

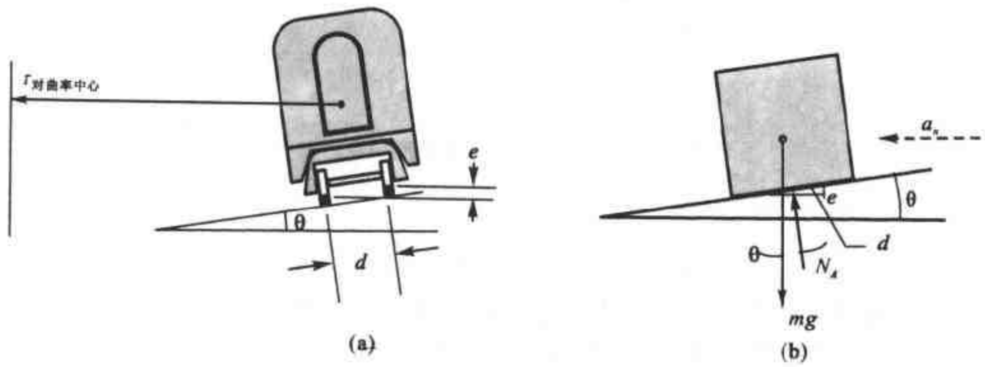


图 16-60

假设此时的速度 v 正好提供沿曲线拐弯，就是说火车没有沿径向滑动的趋势．因此每条轨道侧向压力均为零．对车厢仅有垂直于车轮行驶的轨道的反力．在图 16-60(b)所示的隔离体图中，表明重力 mg 和一个简化的反力N_A．注意 a_n 的方向指向曲线的中心向左，大小为 $r\omega^2$．得到运动方程如下：

$$\sum F_n = mr\omega^2 \quad 或 \quad N_A\sin\theta = mr\omega^2$$

$$\sum F_v = 0 \quad 或 \quad N_A\cos\theta = mg$$

两式相除得：$\tan\theta = r\omega^2/g$．

当 θ 角足够小时，$\tan\theta$ 与 $\sin\theta$ 可看作近似相等($\theta\leqslant 6°$)，这样上面的方程可以改写为：

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{r^2\omega^2}{gr}$$

再由图可知，$\sin\theta = e/d$．因此，$e/d = r^2\omega^2/gr = v^2/gr$ 或 $e = dv^2/gr$．

16.47 在题 16.46 中，若给出曲率半径为 2000 ft，速度为 120 mi/h，请计算铁轨的落差 e．设 $d = 4\ \text{ft}8\ \dfrac{1}{2}\text{in}$．

解 ☞

$$e = \frac{dv^2}{gr} = \frac{(4.71\text{ft})(176\text{ft/s})^2}{(32.2\text{ft/s}^2)(2000\text{ft})} = 2.27\ \text{ft} = 27.2\ \text{in}$$

16.48 如图 16-61(a)，重物 A 的加速度为 5 ft/s²，方向向下，悬挂于一根不计自重、柔软且不可伸长的绳子上，绳子绕过一光滑鼓轮，连于一重为 161 lb 的均质圆筒上．在圆筒 B 上加一逆时针方向力偶 $C = 50$ lb·ft．求 A 的重量以及作用在圆筒上 O 点的反力．

解 ☞ 画出圆筒及重物 A 的受力图，如图 16-61(b)．圆筒边缘处的切向加速度 a_t 的大小为 5 ft/s²．因此，角加速度 α 的大小为 $a_t/r = 5\ \text{rad/s}^2$，当圆筒绕对称轴旋转时，得到 3 个关于圆筒的运动方程：

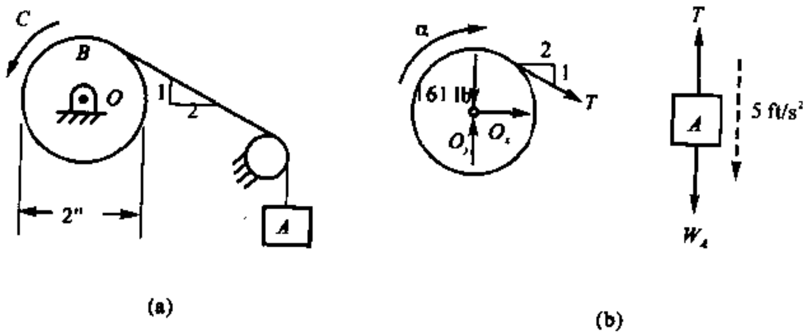


图 16-61

$$\sum \overline{M} = I\alpha \quad 或 \quad T \times 1 - 50 = \frac{1}{2}\left(\frac{161}{32.2}\right)(1)^2(5) \tag{1}$$

$$\sum F_x = 0 \quad 或 \quad O_x + T\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 或 \quad O_y - 161 - T\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0 \tag{3}$$

重物 A 运动方程：

$$W_A - T = \frac{W_A}{g}(5) \tag{4}$$

由方程(1)得 $T = 62.5$ lb；因此，从方程(4)有 $W_A = 74.0$ lb.

解方程(2)和(3)得到 $O_x = -55.9$ lb 和 $O_y = +189$ lb.

16.49 一质量为 100 kg 的均匀球与质量为 20 kg 的细杆固连．如图 16-62(a)所示，细杆在水平位置时系统的角速度为 8 rad/s．确定水平位置时，系统的角加速度和 O 点所受反力．

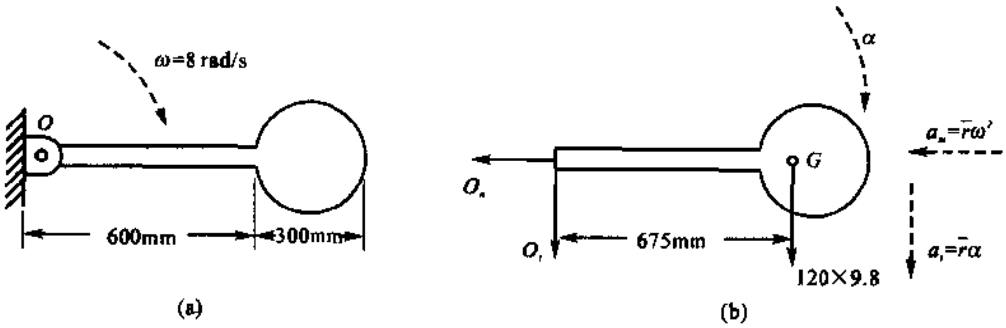


图 16-62

解 以 O 点为参考点，确定系统的质心：

$$\bar{r} = \frac{20(300) + 100(750)}{120} = 675 \text{ mm}$$

如图 16-62(b)所示，系统受 3 个外力 O_n、O_t 以及作用于质心 G 的重力．注意到 O_n 向左与 $\bar{a}_n$ 一致，O_t 向下与 $\bar{a}_t$ 一致．

总的转动惯量 I 等于杆对端点 O 的转动惯量 $\left(\frac{1}{3}ml^2\right)$ 加上球的转动惯量 $\left(\frac{2}{3}mr^2 + md^2\right)$，其中 $d = 750$ mm $= 0.75$ m.

$$I = \frac{1}{3}20(0.6)^2 + \frac{2}{5}200(0.15)^2 + 100(0.75)^2 = 59.55 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

为计算角加速度，利用力矩方程

$$\sum M_O = I\alpha$$

即

$$120 \times 9.8 \times 0.675 = 59.55\alpha$$

所以

$$\alpha = 13.3 \text{ rad/s}$$

将力沿由水平方向(法线方向 n)投影，得

$$O_n = m\bar{r}\omega^2 = 120(0.675)(8)^2 = 5180 \text{ N (向左)}$$

由竖直方向(沿切线方向 t)外力得

$$O_t + 120 \times 9.8 = m\bar{r}\alpha = 120 \times 0.675 \times 13.3$$

$$O_t = -98.7 \text{ N(向上)}$$

16.50 一个用以引起振动的偏心圆轮重 40 lb，绕 O 轴转动，偏心距为 2 in，如图 16-63 所示．当系统位于竖直时，角速度和角加速度大小分别为 10 rad/s 和 2 rad/s² 时，求支座处的作用反力．

解 建立如图所示 n、t 坐标轴，O 距质心 G 的距离为 $\bar{r} = \frac{1}{6}$ ft.

列运动方程式如下：

$$\sum F_n = m\bar{r}\omega \quad 即 \quad O_n = \frac{40}{32.2}\left(\frac{1}{6}\right)(10)^2$$

$$\sum F_t = m\bar{r}\alpha \quad 即 \quad O_t = \frac{40}{32.2}\left(\frac{1}{6}\right)(2)$$

$$\sum M_O = I_O\alpha = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{40}{32.2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{40}{32.2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\right] \times 2$$

其中轴承反力 O_n 和 O_t 是作用在圆轮上的外力.

注意 I_O 是通过平行轴公式得到的，力偶 $I_O\alpha$ 等于 0.38 lb-ft，方向为顺时针，作用在轴上. 反作用力分量为：$O_n = 2.7$ lb，方向向右，$O_t = 0.41$ lb，方向向上.

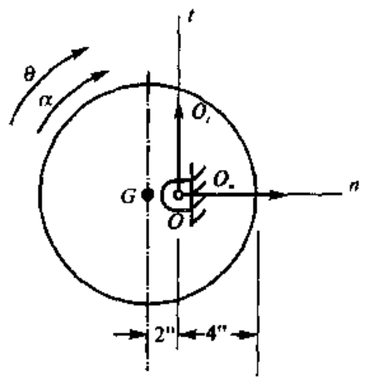


图 16-63

16.51　如图 16-64 所示，重 6 lb 的小球在 8 ft 长的杆 AB 和绳 BC 的约束下在水平面内圆周运动，AB、BC 质量不计，若 B 点速度为10 ft/s，求 AB、BC 上的约束反力.

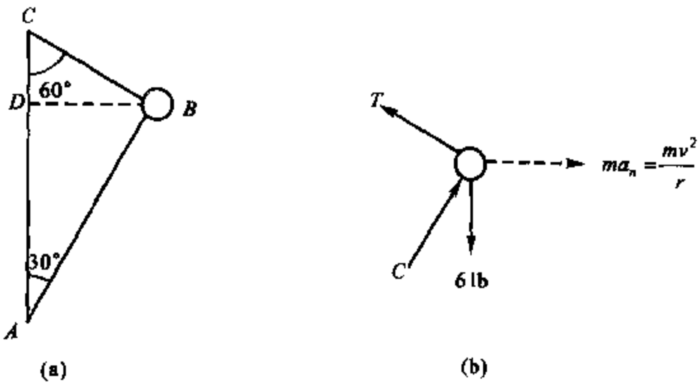


图 16-64

解　☞ 从隔离体图 16-64(b)可以看出惯性力作用使球达到“平衡状态”，运用力三角形关系式，$DB = \bar{r} = 4$ ft，因此惯性反力为

$$\frac{6}{g}\,\frac{(10)^2}{4} = 4.66 \text{ lb}$$

方程式变成

$$\sum F_h = 0 = C\cos60° - T\cos30° + 4.66$$

$$\sum F_v = 0 = C\cos30° + T\cos60° - 6$$

得，$C = 2.87$ lb 和 $T = 7.04$ lb.

在这个特殊的问题中，BC 边与 AB 边构成一个直角，灵活运用投影方程：沿 AB 边的所有力之和为零和沿 BC 边的所有力之和为零. 则在每个方程式中只包含一个未知量.

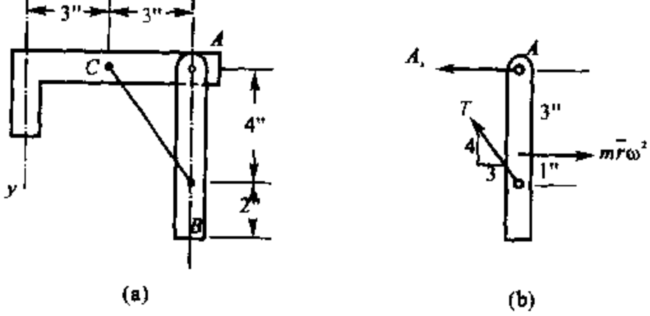


图 16-65

16.52 在图 16-65(a)中，AB 杆被不计重量的细绳 BC 拉住呈铅垂状态. 组成一个绕铅垂的 y-y 轴旋转的系统. 假设在 A 点的销钉是光滑的，AB 杆重 32.2 lb，绳子可承受的最大张力是 120 lb. 问在不使细绳 BC 断掉的情况下系统旋转的最大角速度是多少？

解 ☞ 画 AB 的受力图，为简单起见忽略重力和竖直分力 A_y. 由图 16-65(b)，虚拟的惯性力作用在杆的中间，这是因为杆处于同一水平面的质点或杆的每一部分到 y-y 轴的距离相等.

对 A 点取矩，$+m\bar{r}\omega^2\times3-T\times\frac{3}{5}\times4=0$，注意 T 只有水平分力才对 A 点有力矩. 代入 $m=1$ slug，$T=120$ lb，$\bar{r}=6/12$ ft，得到 $\omega=13.8$ rad/s 或 132 rpm.

16.53 组合滑轮系如图 16-66(a)所示，其中滑轮质量为 30 kg，回转半径是 450 mm，当物体由静止释放时，求每根细绳的张力和定滑轮的角加速度.

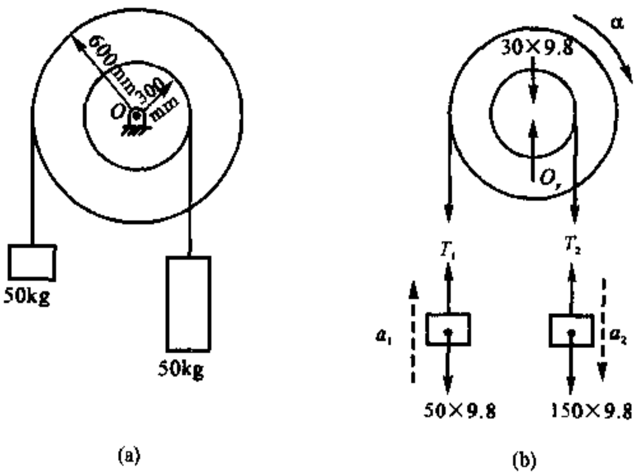


图 16-66

解 ☞ (a) 分别画系统中 3 个物体的受力图，如图 16-66(b)所示，设 $a_1=0.6\alpha$，$a_2=0.3\alpha$，运动方程为：

$$\sum F = T_1 - 50\times9.8 = 50a_1 = 30\alpha \tag{1}$$

$$\sum F = 150\times9.8 - T_2 = 150a_2 = 45\alpha \tag{2}$$

$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha \quad 即\ T_2\times0.3 - T_1\times0.6 = 30(0.45)^2\alpha = 6.08\alpha \tag{3}$$

解得 $\alpha=3.9$ rad/s^2，因此，绳的张力为

$$T_1 = 490 + 30(3.91) = 607\ \text{N},\ T_2 = 1470 - 45(3.91) = 1290\ \text{N}$$

(b) 假设惯性力和惯性力矩使系统处于"平衡状态"，可以采用题 11.6 和 11.7 的解法.

以下施加惯性力：在 50 kg 物块的质心上加上向下的惯性力 $50(0.6\alpha)$，在 150 kg 物块的质心上加惯性力 $150(0.3\alpha)$，且在滑轮上加逆时针惯性力矩，大小为 6.08α，既然该系统处于"静止状态"，我们假设系统有顺时针的虚角位移 $\delta\theta$，合外力虚功为零. 设滑轮角位移为 $\delta\theta$，50 kg 物块虚位移为 $(0.6)\delta\theta$，且 150 kg 物块虚位移为 $(0.3)\delta\theta$，因此：

$$\delta U = [-50\times9.8-50(0.6)\alpha](0.6)\delta\theta + [150\times9.8-150(0.3)\alpha]\times(0.3)\delta\theta + (-6.08\alpha)\delta\theta = 0$$

每一项除以 $\delta\theta$，解得 $\alpha=3.97$ rad/s^2. 可见利用这种方法很容易求得角加速度，但为了求每根绳的内力，需要画每个物体的受力图.

16.54 如图 16-67(a)所示. 重为 28 lb 物体 C 以 16 ft/s 的速率向下运动，鼓轮 B 的转动惯量为 12 ft-lb-s^2，且不计支撑中转动摩擦. 如果物块 A 与鼓轮间的摩擦系数是 0.40，求加多大的力，才能使系统在 2 s 内停止？并求 D 处铰链反力.

解 ☞ 分别画杆、鼓轮和物体的隔离体图如图 16-67(b)所示.

对于物体，已知初速度为 16 ft/s 向下，末速度为零和时间 2 s. 因此，加速度的值是 8 ft/s^2 向上.

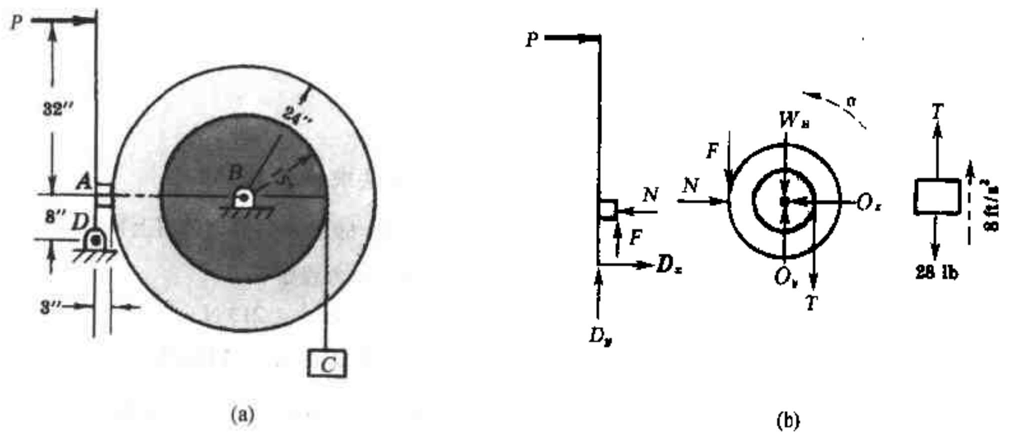


图 16-67

作用物体 C 上的力沿铅直方向求和得到 $T-28=\left(\frac{28}{g}\right)(8)$, $T=35.0$ lb.

为了求摩擦力 F,将作用于鼓轮上的力对 O 点之矩求和.鼓轮的角加速度为逆时针(系统逐渐减慢),由于鼓轮上离中心 15 in 处的加速度为 8 ft/s²,因此角加速度可解出,即 $\alpha=8/(15/12)=6.40\ \mathrm{rad/s^2}$.力矩方程为 $F(2)-T(1.25)=I\alpha$,或 $F(2)-35.0(1.25)=12(6.40)$,解出 $F=60.3$ lb.

由 $F=\mu N$,则法向力 $N=60.3/0.40=151$ lb.

作用在杆上所有的力对 D 点之矩求和为 $-P(40)+N(8)+F(3)=0$,得 $P=34.7$ lb.

作用在杆上的力沿水平方向求和,得到 $34.7-151+D_x=0$,即 $D_x=116$ lb 向右;向铅直方向求和,$D_y+60.3=0$,得 $D_y=60.3$ lb 向下.

16.55 质量 8 kg 的球装配在水平杆上后,一起与铅直轴固连,如图 16-68(a)所示.略去杆及轴的质量,求当系统以常角速度 90 rpm 转动,BC 处反力是多少?

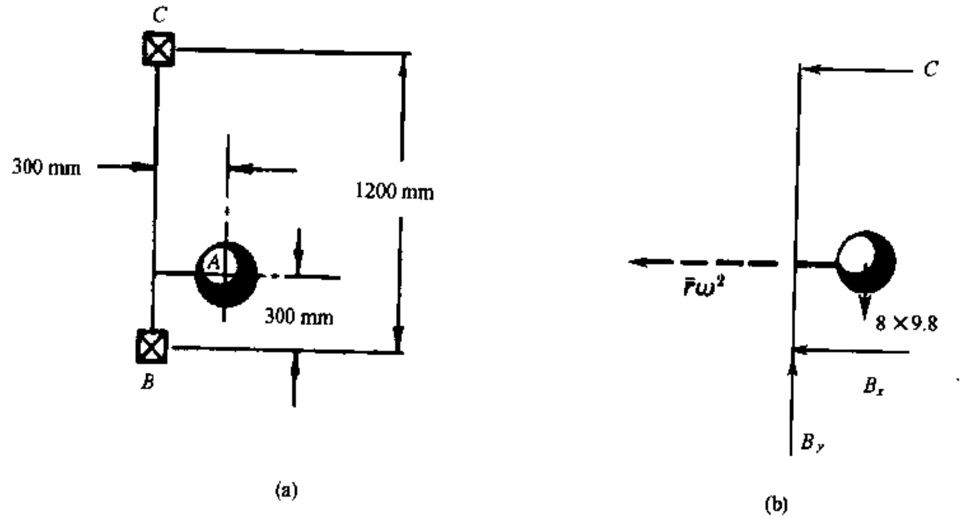


图 16-68

解 在图 16-68(b)所示的隔离体上受到力 C、B_x、B_y,重力为 $8\times9.8=78.4$ N 作用.角速度为 $\omega=90\times2\pi/60=9.42\ \mathrm{rad/s^2}$.

运动方程如下:

$$\sum F_x=m\bar{r}\omega^2 \quad 得 \quad B_x+C=7(0.3)(9.42)^2=213$$

$$\sum F_y=0 \quad 得 \quad B_y-78.4=0$$

$\sum \overline{M} = 0$　　得　$C \times 0.9 - B_x \times 0.3 - B_y \times 0.3 = 0$

解出，$B_x = 140$ N，$B_y = 78.4$ N，$C = 72.9$ N. 作用方向如图示.

惯性力法

16.56　用惯性力的方法求解题 16.55.

解 ☞ 如图 16-69 所示的隔离体图上标出惯性力的方向. 可列等效的平衡方程如下：

$m\bar{r}\omega^2 = 8(0.3)(9.42)^2 = 213$ N

$\sum M_B = 12C - 78.4(0.3) - 213(0.3) = 0$　$C = 72.9$ N

$\sum F_x = -B_x - C + 213 = 0$　$B_x = 140$ N

$\sum F_y = B_y - 78.4 = 0$　$B_y = 784$ N

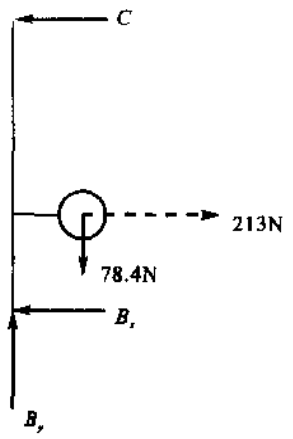


图 16-69

16.57　用惯性力方法解题 16.33.

解 ☞ 在 A、B 隔离体上画出惯性力如图 16-70 所示.

可列出等效平衡方程有

对 A　　$\sum F_h = P - 30a - \frac{1}{3}N_A = 0$　　(1)

对 B　　$\sum F_h = -45a + \frac{1}{3}N_A - \frac{1}{10}N_B = 0$　　(2)

由于　　$N_A = 294$ N；　$N_B = 735$ N

从方程(2)，得　　$a = 0.554$ m/s^2

代入方程(1)，得　$P = 114$ N.

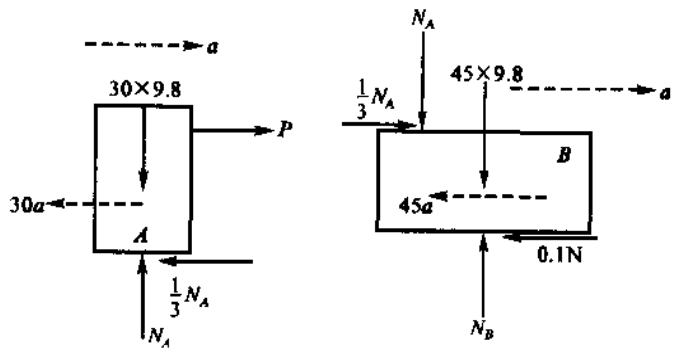


图 16-70

16.58　用惯性力的方法求题 16.25 中的滚子 AB 处的反力. 门的高度 为 5 ft.

解 ☞ 图 16-71 表明了门在解除约束后的受力情况，并已标明所受惯性力.

等效的平衡方程可以写为

$$\sum F_x = 10 - (50/32.2)a = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_A = 8B + (1.5)10 - (2.5)(50/32.2)a - (4)50 = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_y = A + B - 50 = 0 \tag{3}$$

因此从(1)得，$a = 6.44$ ft/s^2

从(2)得，$B = 26.3$ lb.

从(3)得，$A = 23.7$ lb.

可以看到，不用达朗贝尔原理求解，则还需要一个方程来确定 A 和 B，这就是惯性力方法带来的方便之处.

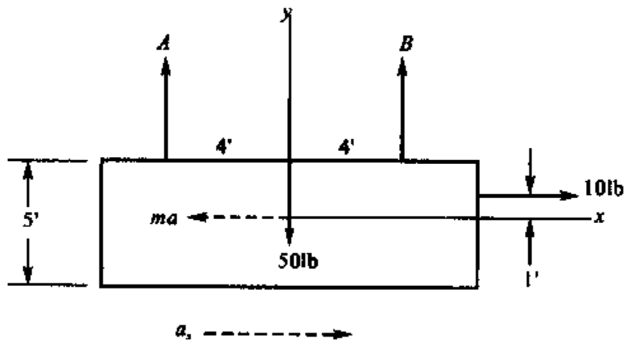


图 16-71

16.59　应用惯性力方法解题 16.37.

解　图 16-72 表明解除约束后刚体的受力情况,包括已标明的惯性力和惯性力偶矩.

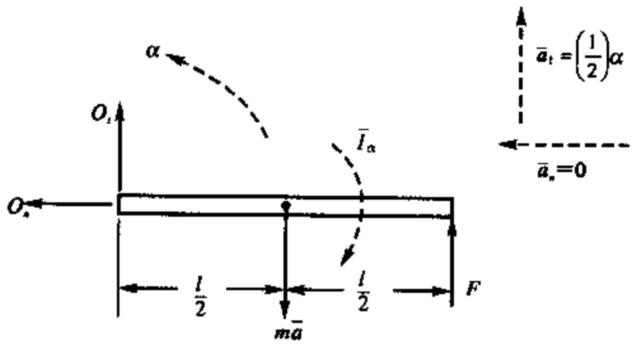


图 16-72

等效的平衡方程为

$$\sum F_n = O_n = 0$$

$$\sum M_O = Fl - m\left(\frac{1}{2}l\right)\alpha\left(\frac{1}{2}l\right) - \frac{1}{12}ml^2\alpha = 0$$

$$\sum F_t = O_t + F - m\left(\frac{1}{2}l\right)\alpha = 0$$

解上述方程可得

$$\alpha = 3\,F/ml$$

$$O_t = \frac{1}{2}F$$

$$O_n = 0$$

16.60　用惯性力的方法求解题 16.49 中的角加速度.

解　图 16-73 表明解除约束后刚体的受力情况,并已标明系统所受的惯性力和惯性力偶矩.

写出关于 O 点的取矩方程为

$$\sum M_O = -20g\bar{r}_1 + m_1\bar{r}_1^2\alpha + I_1\alpha - 100g\bar{r}_2 + m_2\bar{r}_2^2\alpha + \bar{I}_2\alpha = 0$$

$$\sum M_O = -20(9.8)(0.3) + 20(0.3)^2\alpha + (20/12)(0.6)^2\alpha$$

$$-100(9.8)(0.75) + 100(0.75)^2\alpha + \frac{2}{5}(100)(0.15)^2\alpha = 0$$

从中解出 $\alpha = 13.3\ \mathrm{rad/s^2}$.

16.61　用达朗贝尔原理解题 16.2.

解　图 16-74 示的隔离体图中标有惯性力和惯性力偶矩.有 $m = 600/32.2 = 18.6$ slugs, $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$, $\bar{I} = \frac{1}{2}(18.6)\left(\frac{15}{12}\right)^2 = 14.5$ slug-ft^2.

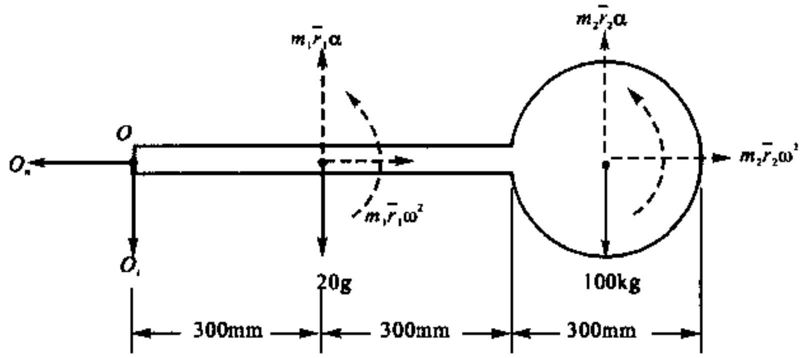


图 16-73

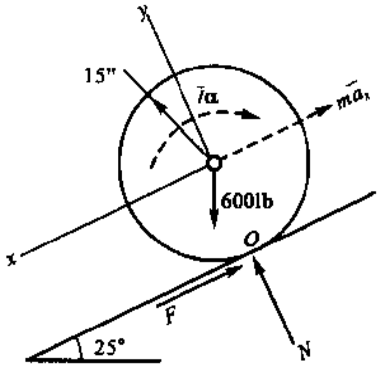


图 16-74

等效的平衡方程为

$$\sum M_O = r(W\sin 25°) - r\frac{W}{g}\bar{a}_x - \bar{I}\alpha = 0$$

$$\sum F_x = W\sin 25° - F - \frac{W}{g}\bar{a}_x = 0$$

或

$$\sum M_O = \left(\frac{15}{12}\right)600\sin 25° - \left(\frac{15}{12}\right)18.6\bar{a}_x - 14.5\alpha = 0$$

其中　$\bar{a}_x = \left(\frac{15}{12}\right)\alpha$

解出　$\bar{a}_x = 9.09\ \text{ft/s}^2$

$$\sum F_x = 600\sin 25° - F - 18.6(9.09) = 0$$

$$F = 84.3\ \text{lb}$$

16.62　质量为7 kg的圆柱体被一根绳缠绕，并吊在天花板上，用惯性力的方法求出绳子的拉力，见图16-75(a).

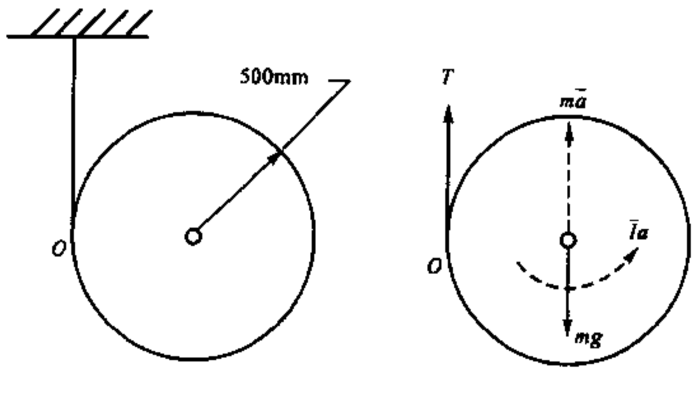


图 16-75

解　如图16-75(b)所示的隔离体图中，标注有惯性力和惯性力偶矩. 有 $m=7$ kg, $\bar{I}=\frac{1}{2}mr^2=\frac{1}{2}\times 7\times(0.5)^2=0.875\ \text{kg·m}^2$, $\bar{a}=0.5\alpha$. 则有等效的平衡方程为

$$\sum M_O = -mgr + m\bar{a}r + \bar{I}\alpha = 0$$

$$\sum \overline{M} = -rT + \bar{I}\alpha = 0$$

即

$$\sum M_O = -7\times 9.8\times 0.5 + 7\times\bar{a}\times 0.5 + 0.875\alpha = 0$$

$$\sum \overline{M} = -0.5T + 0.875\alpha = 0$$

解得 α 和 T 为

$$\alpha = 13.1\ \text{rad/s}^2$$
$$T = 22.9\ \text{N}$$

补充习题

16.63　一车轮，重 150 lb，直径为 10 ft，在 45°斜面上向下只滚不滑，试求此圆轮的角加速度．
答案：3.04 rad/s²．

16.64　一圆柱体质量为 180 kg，直径为 200 mm，放于一水平轨道上，且垂直于其几何轴线，在圆柱体右侧底部施加一作用力 $F = 550$ N，假设静摩擦系数和动摩擦系数分别为 0.29 和 0.25，试分析圆柱体做什么运动？参照题 16.4．
答案：圆柱体向右滑行并且逆时针旋转，$\bar{a} = 0.6\ \text{m/s}^2$，$\alpha = 12.1\ \text{rad/s}^2$．

16.65　在图 16-76 中，一圆柱体重 W，回转半径为 k，有一段细绳缠绕在半径为 r 的凹槽内，假设圆柱体纯滚动，试求其质心的加速度．其中 P 为水平的，且与柱截面在同一平面内．
答案：$\bar{a} = pgR(R-r)/W(R^2+k^2)$．

16.66　一均质圆柱体质量为 15 kg，在其靠近边缘处有一狭窄的沟槽，如图 16-77 所示．在缠绕在沟槽中的细绳上施加一大小为 50 N 的外力，假设此圆柱体只滚不滑．试求其质心的加速度和摩擦力 F．忽略沟槽处的影响．
答案：$a = 0.556\ \text{m/s}^2$，$F = 41.7$ N，方向向左．

16.67　一直径为 1200 mm，质量为 50 kg 的圆轮，在一缠绕于其圆周上的细绳的作用下沿一倾角为 20°的斜面向上运动．细绳跨过斜面顶部的光滑的滑轮，另一端挂有质量为 90 kg 的物体．试求圆轮的角加速

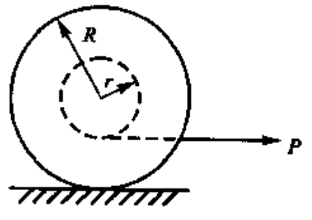


图 16-76

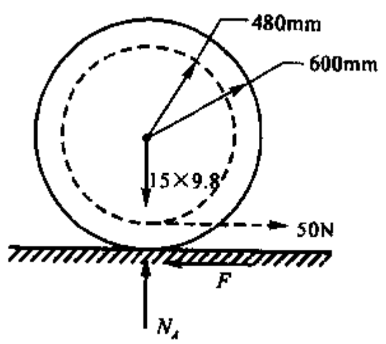


图 16-77

度．假设细绳与斜面平行，细绳的拉力作用于圆轮的顶部．
答案：6.1 rad/s²．

16.68　求图 16-78 所示系统中细绳的张力是多少？假设斜面光滑，滑轮质量和摩擦不计．
答案：$T = 5.16$ lb．

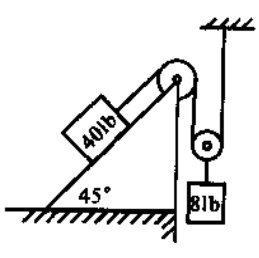


图 16-78

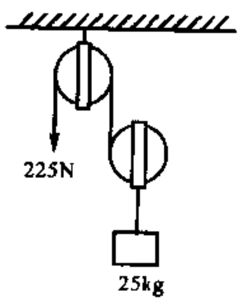


图 16-79

16.69 在题 16.68 中，如果较低的滑轮直径为 1 ft，质量为 4 lb，则平行于斜面的细绳的张力为多大？

答案：$T=7.79$ lb.

16.70 如图 16-79 所示，恒力 F 大小为 225 N，重 25 kg 的重物由静止开始运动，则多长时间以后重物的速度为 1.2 m/s？不计滑轮的质量与摩擦.

答案：$t=0.145$ s.

16.71 如图 16-80 所示的系统中，不计滑轮质量与摩擦，物块的质量分别为 1 kg，2 kg，3 kg，4 kg. 试求每个物块的加速度和最上端细绳的张力.

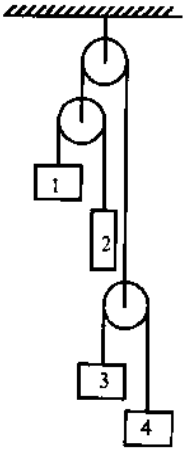


图 16-80

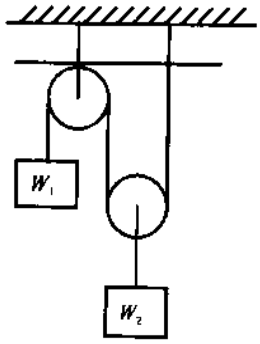


图 16-81

答案：$a_1=9.02\ \mathrm{m/s^2}$ 向上，$a_2=0.39\ \mathrm{m/s^2}$ 向下，$a_3=3.53\ \mathrm{m/s^2}$ 向下，$a_4=5.10\ \mathrm{m/s^2}$向下，$T=75.3$ N.

16.72 如图 16-81 所示，重物 W_2 向下运动，系统从静止释放，不计滑轮质量及摩擦，试求绳的张力.

答案：$T=\dfrac{3W_1W_2}{(4W_1+W_2)}$.

16.73 圆柱体质量为 45 kg，直径 1500 mm，在其顶部切线方向作用一水平力为 180 N. 如果圆柱体在地面上无滑动，求圆柱体中心的加速度.

答案：5.3 m/s²，水平.

16.74 一个重 W 的铁环顶端在一个水平力 P 的作用下水平滚动，如图 16-82 所示. 用 P、W 和半径 R 表示质心加速度 $\bar{a}$，同时证明平面对铁环的摩擦力为零.

答案：$\bar{a}=Pg/W$.

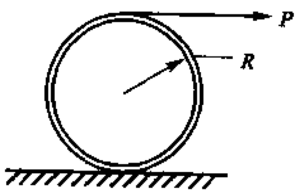


图 16-82

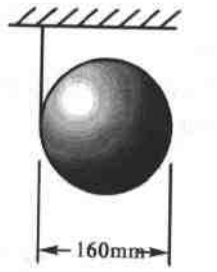


图 16-83

16.75 在题 16.11 中，当平面上圆盘 A 加速度为 16 ft/s² 时，C 重量应为多少？

答案：1340 lb.

16.76 一个质量为 2 kg，半径为 80 mm 的匀质球体，一根绳子一端缠绕在球体上，另一端固定在天花板上，如图 16-83 所示. 如果把球体从静止释放，求释放 2 s 以后绳子的张力，球体的角加速度以及质心速度.

答案：$T = 5.6$ N，$\alpha = 87.5$ rad/s^2（顺时针方向），$\bar{v} = 14.0$ m/s 向下.

16.77　一个重 W、回旋半径为 k 的圆柱体由图 16-84 所示位置静止释放，如果圆柱体半径为 R，求细绳的张力和质心加速度.

答案：$T = W/(1 + R^2/k^2)$，$\bar{a} = g/(1 + k^2/R^2)$.

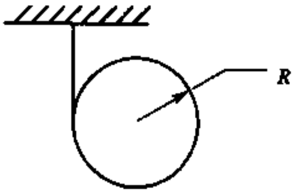


图 16-84

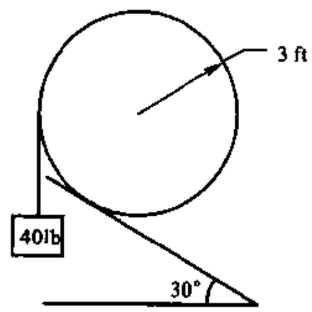


图 16-85

16.78　如图 16-85 所示，一个重 40 lb 的物块由一根缠绕的细绳与重为 30 lb 圆柱体连接，圆柱体无滑动地由水平面成 30°的斜面上滚下，求圆柱体的角加速度.

答案：0.98 rad/s^2.

16.79　如图 16-86 所示，一个重 2 kg，半径为 100 mm 的圆柱体 B 绕无摩擦转轴自由转动，一根绳子分别缠绕在 B 和质量为 4 kg、半径为 200 mm 的圆柱体上，确定 A、B 从速度为零时释放后的角加速度.

答案：$\alpha_A = 14$ rad/s^2，$\alpha_B = 56$ rad/s^2.

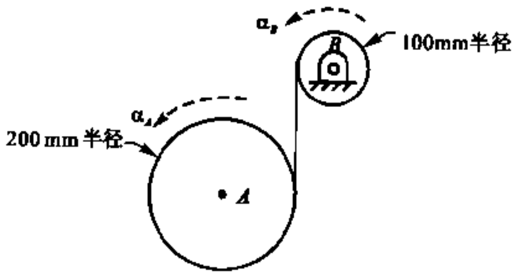


图 16-86

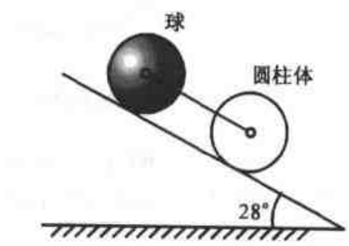


图 16-87

16.80　在图 16-87 中，一个匀质的圆柱体和一个匀质的球体，质量相等都为 $m = 8$ kg，并且有相等半径 R，被一无重连杆通过销钉连接在一起，能自由地从与水平面夹角为 28°的斜面向下滚而不滑. 求连杆中力. 设轴承无摩擦.

答案：1.27 N.

16.81　一直径为 3 ft 的均质球以 60 rpm 角速度绕一水平中心轴转动，此时将球放在摩擦系数为 0.30 的水平面滑动. 求小球滚动之前所经历的时间.

答案：$t = 0.279$ s.

16.82　一直径为 120 mm，质量为 3 kg 的均质圆柱体，以 8 rad/s 角速度绕一水平轴转动，并落在一摩擦系数为 0.25 的水平面上. 求在滚动开始及滑动停止之前，圆柱体中心经过多少距离？

答案：$d = 5.2$ mm.

16.83　一质量为 m、半径为 R 的圆柱静止在一水平面上，施加力偶 C 如图 16-88 所示. 求轮子与平面摩擦系数为多少时，才会出现滚动？

答案：$\mu \geq \frac{2}{3} C/mgR$.

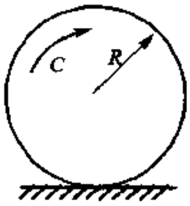


图 16-88

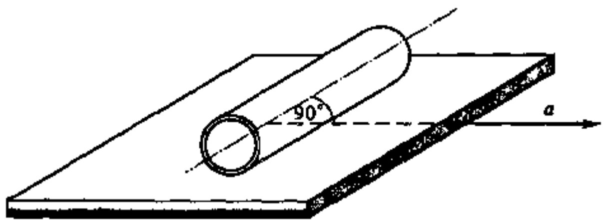


图 16-89

16.84　图 16-89 中，薄壁圆筒放在一水平板上，此板有一加速度 a，求圆筒中心的加速度为多大时，圆筒滚动而不滑动？

答案：$\bar{a}=0.5a$.

16.85　在题 16.84 中，令摩擦系数 $\mu=0.35$，求板加速度最大为多少时，圆筒与板之间无滑动？

答案：$a=6.86\ \mathrm{m/s^2}$ 或 $225\ \mathrm{ft/s^2}$.

16.86　半圆形均匀板质量为 30 kg，半径 900 mm，在如图 16-90 所示位置静止释放，求在此位置时，两根绳中内力.

答案：$T_{AB}=148\ \mathrm{N}$, $T_{CD}=59.8\ \mathrm{N}$.

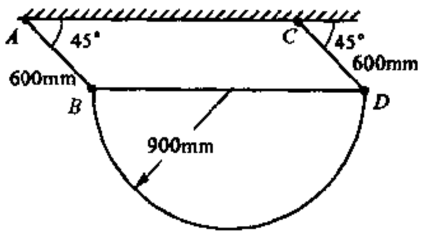


图 16-90

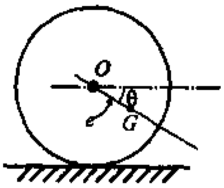


图 16-91

16.87　在一直径为 20 ft 的循环圈，一重为 500 lb 的车离开平台，此平台距环底端为30 ft. 求车在环顶端时，所受环的法向反作用力？设车重心位置离环中心为 10 ft.

答案：500 lb.

16.88　一重为 W 的圆盘的质心位置 G 与几何中心 O 距离为 e，圆盘以常角速度 ω 在水平面上滚动. 求图 16-91 所示位置，盘的法向反力与地面的摩擦力.

答案：$F=(W/g)e\omega^2\cos\theta$ 向左，$N=W+(W/g)e\omega^2\sin\theta$ 向上.

16.89　如图 16-92 所示，圆盘质量 50 kg，半径为 600 mm，其关于质心的回转半径为 450 mm. 均质细杆质量 18 kg，长 1200 mm，其左端与圆盘铰接，杆保持水平不变，由静止开始释放，求此时杆与圆盘的角加速度.

答案：$\alpha_{盘}=2.25\ \mathrm{rad/s^2}$ 顺时针，$\alpha_{杆}=10.5\ \mathrm{rad/s^2}$ 顺时针.

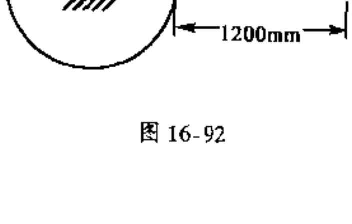


图 16-92

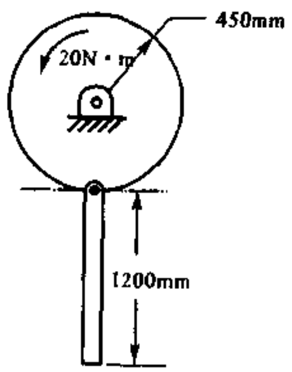


图 16-93

16.90　如图 16.93 所示，均质鼓轮质量 20 kg，半径为 450 mm，均质杆质量 10 kg，长为 1200 mm，其上端与鼓轮下端铰接．若在鼓轮上施加 20 N·m 的力矩，求鼓轮与杆的角加速度．

答案：$\alpha_{轮}=7.9\ \mathrm{rad/s^2}$ 逆时针，$\alpha_{杆}=4.44\ \mathrm{rad/s^2}$ 顺时针．

平移

16.91　如图 16-94 所示，均质的门与辊轮 A、B 铰接．A、B 可在水平轨道上无摩擦地滑动．求当 P 力为多大时 A 所受支座反力在竖直方向分量为零，此时木板的加速度为多大？B 处的反力为多大？

答案：$P=450$ lb 向左，$a=72.5\ \mathrm{ft/s^2}$ 向左，$B=200$ lb 向上．

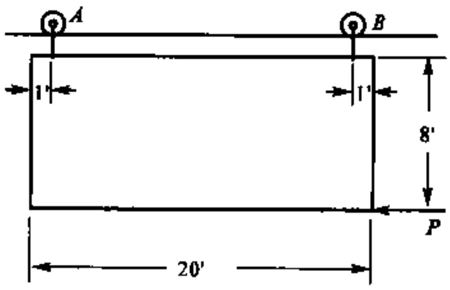


图 16-94

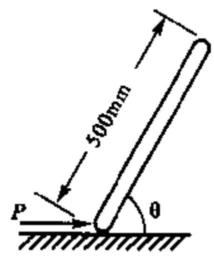


图 16-95

16.92　如图 16-95 所示，均质细杆长 500 mm，质量 4 kg．水平力 $P=60$ N 沿光滑水平面推此杆．试求杆平行移动的 θ 角，并求相应的加速度是多少？

答案：$\theta=33.2°$，$a=15\ \mathrm{m/s^2}$．

16.93　一直径为 1.2 m，质量为 10 kg 的圆柱体在力 P 作用下无滚动向右滑动，加速度为 $2\ \mathrm{m/s^2}$，如图 16-96 所示，试求力 P 的大小及作用位置，设圆柱体与水平间摩擦系数为 0.20．

答案：$P=39.6$ N 水平向右，$h=0.3$ m(距地表面)．

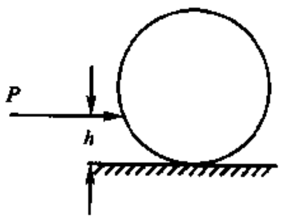


图 16-96

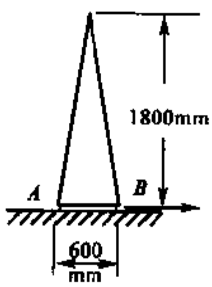


图 16-97

16.94　如图 16-97 所示，一截面为等腰三角形的楔形均质薄片在力 P 作用下以 $1.2\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度水平向右运动，设 A、B 两点光滑，薄片质量为 2.5 kg，试求 P 及 A、B 两点的作用力．

答案：$P=3$ N 水平向右，$A=15.2$ N 垂直向上，$B=9.25$ N 垂直向上．

16.95　如图 16-98，水平作用力 P 作用于重为 W，半径为 R 的均质球上，与平面间滑动摩擦系数为 μ，为使球体做无滚动滑动，求 P 的作用位置以及运动加速度是多少？

答案：$d=R(1-\mu W/P)$，$a=g(P/W-\mu)$ 水平向右．

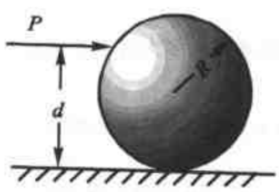


图 16-98

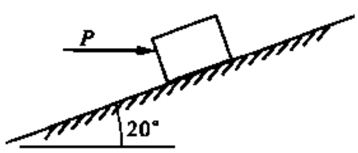


图 16-99

16.96　参照图 16-99,假设物体与斜面间摩擦系数为 0.25,求水平力 P 多大,才使 50 kg 物体沿倾角为 20°的斜面以 3 m/s² 的加速度上滑?

答案:$P = 507$ N,水平向右.

16.97　物体以 1.2 m/s 的初速度射向倾角为 30°的斜面,设斜面与物体间摩擦系数为0.20,求物体向上运动的距离及所用时间.

答案:10.9 m,1.82 s.

16.98　滑水台面与水平成 35°角,不考虑一切摩擦,求一小孩从静止到滑行 15 ft 所用的时间.

答案:$t = 1.27$ s.

16.99　物体重 W lb,在与水平夹角 50°的斜面顶端,从静止运动.物体从 20 ft 高的斜面滑下,在水平地面上滑行了 30 ft 后静止,求物体与地面之间的摩擦系数.

答案:$\mu = 0.357$.

16.100　一物块在水平桌面上滑行了 500 mm 后静止,如果物块与桌面的摩擦系数为0.12,问滑行时间为多少?

答案:$t = 0.92$ s.

16.101　9.3 lb 的物块放在小车上,物块后下角有挡板阻碍滑下,如图 16-100 所示.求不使物块倾倒的小车的最大加速度是多少?

答案:$a = 12.1$ ft/s² 向左.

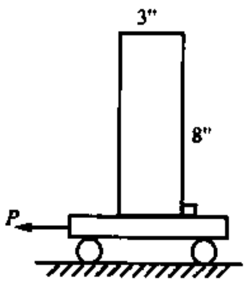


图 16-100

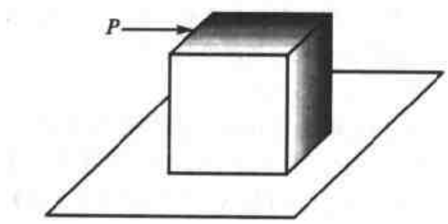


图 16-101

16.102　在图 16-101 中,均质物块在水平力 P 作用下沿水平面滑行,如物块与地面间摩擦系数为 0.2,求物块只滑动而不倾倒的最大加速度是多少?

答案:$a = 5.88$ m/s² 向右.

16.103　一直径为 6 ft,高为 35 in 的圆筒立在以 35 mi/h 速度行驶的汽车上,当汽车在恒定的加速度作用下,行驶了 40 ft 后停止,问圆筒是否会倒?

答案:不会倒.

16.104　质量 8 kg 的物体在重力和一绳子拉力的共同作用下加速下降,绳子的最大承重力为 60 N,问物块的最小加速度是多少?

答案:2.3 m/s² 向下.

16.105　电梯操作员重 150 lb,当他站在一加速下降的电梯内,经过 2 s 电梯速率由零变为 10 ft/s,假设加速度不变,求电梯地板承受人的压力是多少?

答案:127 lb.

16.106　一质量为 500 kg 的电梯加速上升,加速度恒定为 4 m/s²,一操作者质量为 65 kg,此时正站在电梯内的电子秤上,问电子秤读数为多少 kg? 绳中张力是多大?

答案:91.5 kg,7800 N

16.107　一人质量为 12 kg,静止站在电梯内的电子秤上,问电梯加速度为多大时电子秤示数为 10 kg?

答案:$a = 16.3$ m/s² 向下.

16.108　10 lb 重的物体上正吊在杆秤挂钩上,当杆秤固定在一以 8.05 ft/s² 加速上升电梯内,问杆秤读数.

答案:12.5 lb.

16.109　一质量为 700 kg 的电梯所设计的最大加速度为 2 m/s²,如果支持电梯的缆索最大承重为 19 kN,电梯中最大限度可放多重的物体?

答案:$M = 910$ kg.

16.110　如图 16-102 所示，一条水平细绳连接质量为 10 kg 和 20 kg 的两个与水平地面均无摩擦的物块，若作用一个 4 N 的水平力，求物块加速度和绳的张力.

答案：$a = 0.133\ \mathrm{m/s^2}$，$T = 2.67$ N.

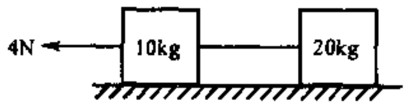


图 16-102

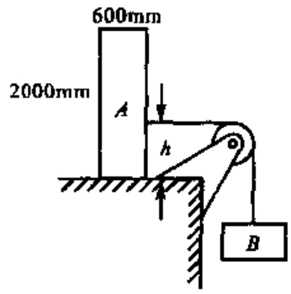


图 16-103

16.111　如图 16-103 所示，质量为 5 kg 的物体 A 受右端下落的质量为 5 kg 物体 B 的作用. 如果 A 与地面的摩擦系数为 0.5，求 B 的加速度. 求使 A 不倾倒的 h 的最大值.

答案：$a = 2.45\ \mathrm{m/s^2}$，$h = 730$ mm.

16.112　如图 16-104 所示，水平面上有一重 30 lb 的物块，物块与地面的摩擦系数为0.2，假定滑轮的质量与摩擦力都可忽略不计. 求系统的加速度和两边细绳的张力.

答案：$a = 3.33\ \mathrm{ft/s^2}$，$T_{AB} = 8.83$ lb，$T_{BC} = 17.9$ lb.

16.113　如图 16-105 所示，一个重 1000 lb 的重物放在平板车上，物块 W 下落并为重物和重 300 lb 的平板车提供加速度. 一个长木条固定在平板上阻止重物滑动. 在重物不倾倒的情况下系统的最大加速度为多少？并求出 W 的重量. 假定平板车滚动，并且不考虑轮子的惯性作用.

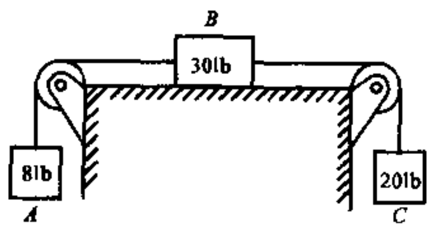


图 16-104

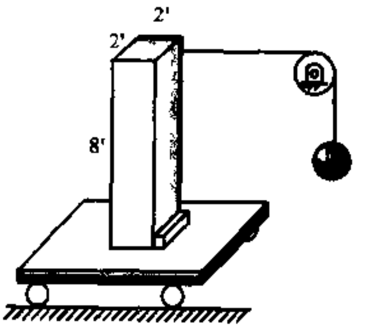


图 16-105

答案：$a = 5.03\ \mathrm{ft/s^2}$，方向向右，$W = 241$ lb.

16.114　如图 16-106 所示，均匀杆 AB 质量为 5 kg，一端用无摩擦销子 A 连接，另一端靠在车的光滑铅直面上. 车的质量是 50 kg，并受水平力 P 拉动. 求力 P 之值多大，才能使杆的 B 端受力为零？

答案：$P = 642$ N.

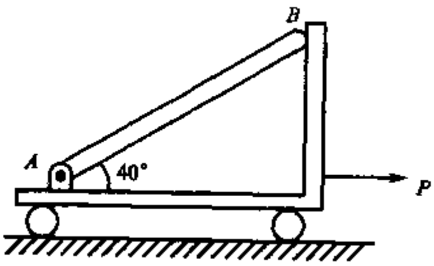


图 16-106

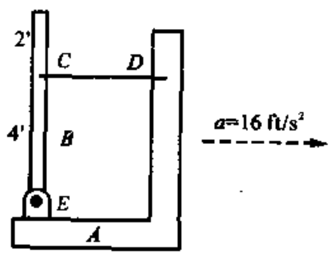


图 16-107

16.115　平台 A 在水平面上加速向右运动，如图 16-107 所示．杆 B 在水平细绳 CD 作用下垂直．求绳 CD 中的张力和 E 处轴反力．杆均匀，重 18 lb．

答案：$T=6.71$ lb，$E_x=18.0$ lb 向上，$E_y=2.24$ lb 向右．

16.116　在图 16-108 中，滑块以 1.5 m/s^2 加速度向右运动．长 1 m，质量 1 kg 均质杆与无摩擦的销子 A 铰接．求角度 θ 是多大？

答案：$\theta=8.7°$．

16.117　索链自由悬挂于卡车后．如果卡车向左有 3 m/s^2 加速度，则求链和水平面夹角大约为多少？

答案：$\theta=73°$．

16.118　直升机上悬挂 80 ft 传输塔，并已 6 ft/s^2 水平加速度运动，则塔中心线和竖直方向夹角为多少？

答案：$\theta=10.5°$．

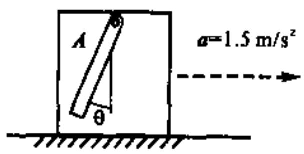


图 16-108

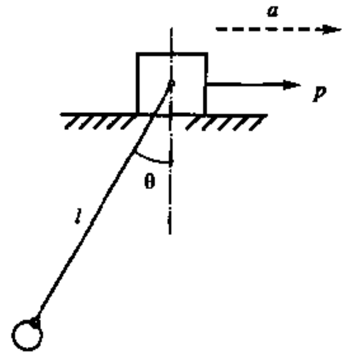


图 16-109

16.119　一小滑块以加速度 a 在水平面上运动，如图 16-109 所示．在绳的末端系一小球，并与竖直方向保持一角度 θ 不变．求 θ 与 a 的关系．

答案：$a=g\ \tan\theta$．

16.120　如图 16-110 所示，质量 50 kg 滑块在水平力 P 作用下以 3 m/s^2 加速度向右运动．均质细杆质量为 8 kg，长 1 m．假定表面光滑，求 P 和 θ．并求轴对杆的水平和垂直分力．

答案：$P=174$ N，$\theta=17°$，$V-78.4$ N，$H=24.0$ N．

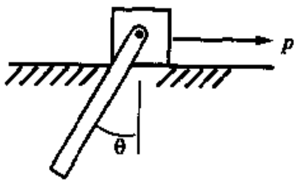


图 16-110

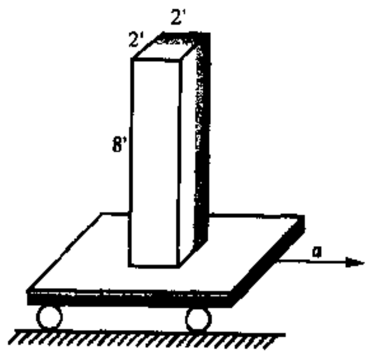


图 16-111

16.121　在上题中，如果物体与平面间摩擦系数为 0.25，求 P 和 θ 的值是多少？

答案：$P=316$ N，$\theta=17°$．

16.122　如图 16-111 所示，重为 1000 lb 的箱子放在平板车上，物块与平板车间的摩擦系数为 0.30，假设滑块质量均匀，求箱子在倾倒或滑动时平板车的加速度．

答案：$a=8.05$ ft/s^2，箱子向右倾倒．

16.123　质量为 M 的物体置于与水平面成 θ 角的倾面上，如图 16-112 所示（M 与 M_1 间摩擦系数为 μ），斜面质量为 M_1，一水平作用力 P 作用于 M_1 使 M 与 M_1 一起以加速度 a 水平向右运动．求 M 与 M_1 发生相对运动时 P 与 a 的大小．设斜面底部与水平面间摩擦力不计．

答案：$a=\dfrac{g(\mu-\tan\theta)}{1+\mu\tan\theta}$，$P=\dfrac{[(M_1+M_2)g](\mu-\tan\theta)}{1+\mu\tan\theta}$.

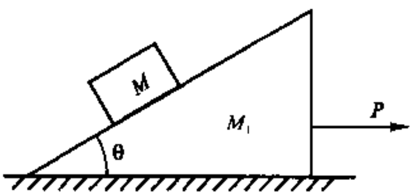


图 16-112

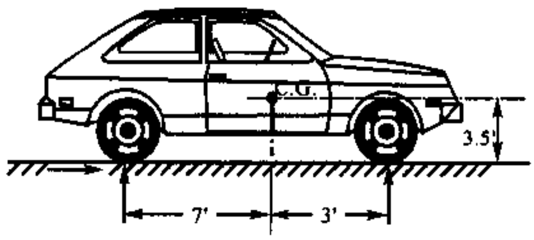


图 16-113

16.124　质量为 M 的卡车行驶于水平路面上，所载货物质量为 m，若货物突然从车上滑落，证明：卡车的加速度为 mg/M 并向前.

16.125　如图 16-113 所示，重为 2500 lb 的汽车在速度为 60 mi/h 开始刹车，如果四个车轮都装了刹车装置，轮胎与路面摩擦系数为 0.6，求汽车刹车经历时间及刹车距离是多少？

答案：4.56 s，200 ft.

16.126　在题 16.125 中，求前后轮受地面的铅直反力.

答案：$R_F=2275$ lb，$R_R=225$ lb.

16.127　如图 16-114 所示，杆 BC 在竖直方向时系统处于静止状态，杆长 3 m，质量 10 kg. 当车与杆加速运动时，杆从铅直位置旋转 5°. 弹簧的劲度系数为 100 N/m. 假设弹簧保持水平，求加速度. 小车置于光滑水平面上.

答案：$a=4.37\ \mathrm{m/s^2}$.

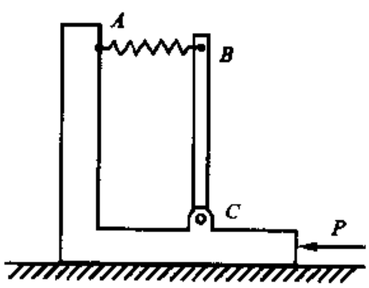


图 16-114

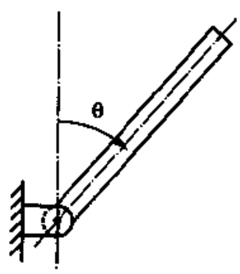


图 16-115

旋转

16.128　如图 16-115 所示，均质杆长为 6 m，质量 M，使其从铅直位置静止开始运动. 假设转轴处无摩擦，求当杆件末端切向加速度为 g 时，其旋转角速度及角度（g 为重力加速度）.

答案：$\dot{\theta}=112$ rad/s，$\theta=0.73$ rad.

16.129　一均质圆柱体，直径 600 mm，质量 40 kg，若使其绕中心轴线旋转，角加速度为 2 rad/s²，则应加多大的转动力矩？

答案：3.6 N·m.

16.130　一直径为 6 ft 的均质圆盘，重 800 lb，在其圆周切向加一个 80 lb 的力使其绕中心轴作圆周运动，求圆盘的角加速度.

答案：$2.15\ \mathrm{rad/s^2}$.

16.131　重 90 lb 的实心圆柱盘，直径 3 ft，以 60 rpm（60 转/分）绕其垂直于直径的中心轴线旋转，应在其边缘切向上加多大的常力，使其 2 分钟内静止.

答案：0.11 lb.

16.132　质点质量 200 kg，用不计质量的铅直绳悬吊，另一端缠绕在直径为 900 mm 的圆柱体上，质点铅直下落，4 s 内下落 8 m. 求圆柱体质量.

答案：3520 kg.

16.133　一均质杆长 10 ft，重 30 lb，其端部铰支于固定点处，并铅直悬挂．杆在距质点2 ft处，受 90 lb 水平力，求该瞬时杆的角加速度及杆支点的水平反力．

答案：$R_h = 63$ lb，$\alpha = 5.8\ \text{rad/s}^2$．

16.134　一细长杆长 1200 mm，质量为 3.6 kg，竖直铰接于 O 点，处于静止状态．当最低端受一水平力 $P = 12$ N 时，如图 16-116 所示，求(a)杆的角加速度，(b)铰 O 点作用于杆上的水平及竖直反力．

答案：$\alpha = 8.33\ \text{rad/s}^2$ 逆时针，$O_y = 35.3$ N 向上，$O_x = 6$ N 水平向右．

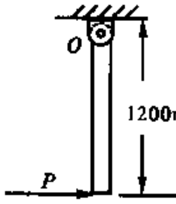


图 16-116

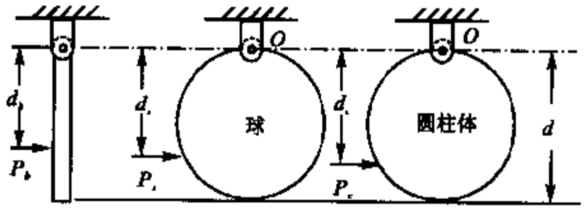


图 16-117

16.135　在上题中，在何处施加以 12 N 的力，可以使销子水平约束力为零？

答案：O 点以下 800 mm 处．

16.136　在均质杆，均质球和均质圆柱体的哪一点加水平力 P，可以使得销子 O 点的水平约束力为零？见图 16-117．

答案：$d_b = \dfrac{2}{3}d$，$d_c = \dfrac{3}{4}d$，$d_s = \dfrac{7}{10}d$．

16.137　水平地面和跑鞋之间的摩擦系数为 0.5，求人以 16 ft/s 的恒定速度跑而不发生滑动时的最小的环形轨迹半径．

答案：$r = 15.9$ ft．

16.138　火车重 100 000 lb，其重心在铁轨上方 5.5 ft 处，火车以 30 mi/h 的速度绕一半径为 2500 ft 的光滑轨道行驶，两车轨中线相距为 4 ft 8.5in，求外侧轨道所受的压力．

答案：52 800 lb．

16.139　汽车以 100 km/h 的速度在一半径为 90 m 的曲线道路上行驶，为使车轮不受侧压力，求道路倾斜的角度．

答案：41.2°．

16.140　公路轨迹是半径为 600 m 的曲线，限制在转弯处速度为 80 km/h，求倾斜角度为多大时，才能保证在此速度下，轮胎与滚动平面的垂直方向上无摩擦力？

答案：$\theta = 0.084$ rad 或 4.8°．

16.141　一重 0.06 lb 的小珠子沿一根无摩擦的金属丝静止下滑，如图 16-118 所示，求小珠子在 A 点的丝的反力，再求小球在圆弧处的 B 点和 C 点的丝的反力．

答案：$N_A = 0.036$ lb，$\theta_x = \tan^{-1}0.75 = 36.9°$，$N_B = 0.276$ lb，$Q_x = 36.9°$，$N_C = 0.348$ lb向上．

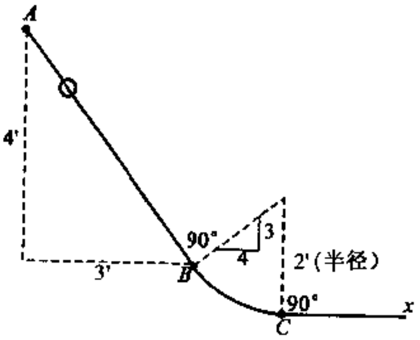


图 16-118

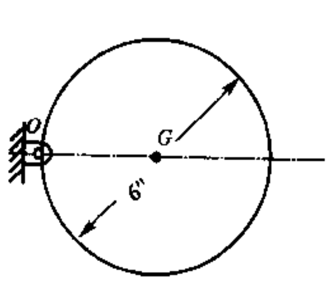


图 16-119

16.142　旋转半径为 k 的飞轮，它的质量为 m，并受到一个不变的力矩 $M = C$ 作用，求此飞轮从静止状态，

旋转 θ 角度时角速度 ω 是多少?

答案: $\omega=(1/k)\sqrt{2C\theta/m}$

16.143　一个直径为 6 ft,重为 34 lb 的均匀圆盘,初始时,O 点和 G 点处于同一水平线上,如图 16-119 所示,把它从此时静止状态自由释放,求点 G 和 O 处于竖直位置时,圆盘的角速度 ω,并求此时 O 点的反力.

答案: $\omega=3.78$ rad/s, $O_n=79.3$ lb, $O_t=0$.

16.144　如果把题 16.49 中的整体作为一个摆,求其运动频率.

答案:0.581 Hz.

16.145　如图 16-120 所示,均匀圆盘 A 受到一个 45 lb-ft 的力矩 M 作用而转动,并带动均匀圆盘 B 转动,并且两者之间无任何滑动,求每个圆盘的角加速度.(盘 A 重 64.4 lb,盘 B 重 128.8 lb)

答案: $\alpha_A=3.72$ rad/s^2 逆时针, $\alpha_B=1.88$ rad/s^2 顺时针.

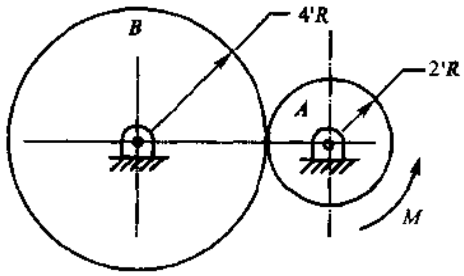


图 16-120

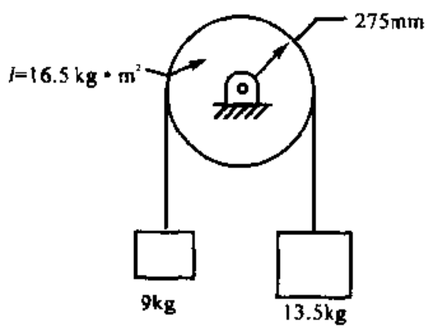


图 16-121

16.146　如图 16-121 所示,滑轮在两物块的作用下转动,求其转动的角加速度 α 是多少?

答案: $\alpha=0.666$ rad/s^2,顺时针.

16.147　如图 16-122 所示,一装置通过细绳悬挂着在地球上测量为 10 lb 和 15 lb 的物块,地球表面重力加速度为 $g=32.2$ ft/s^2.如果把此装置移至重力加速度为0.16 g的月球上去,求此时物块由静止释放时线中张力.

答案: $T=129$ lb.

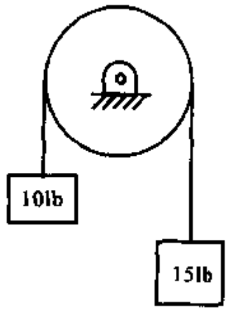


图 16-122

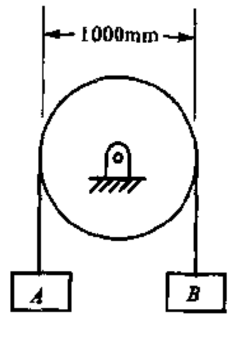


图 16-123

16.148　两质量块用无重柔性绳相连,并跨过无摩擦转动滑轮,见图 16-123.在此地重力加速度为 $g=9.8$ m/s^2, A、B 和滑轮质量分别为 14 kg, 9 kg 和 5 kg.滑轮的回转半径是 400 mm.如果系统在 $g=4.9$ m/s^2 的地方静止释放,求质量块的加速度.

答案: $a=0.935$ m/s^2.

16.149　图 16-124 中,圆盘重 76 lb,回转半径是 2.34 ft 并以角速度 600 rpm 转动.求加多大的力在制动机上,才能使圆盘在 25 s 内停止转动.圆盘与水平构件间的摩擦系数是 0.30.

答案: $P=17.8$ lb.

16.150　三角形薄板重 20 lb,以 30 rpm 的角速度绕无摩擦的水平轴承 A、B 转动,如图 16-125 所示,当薄板如图示铅直时,求轴承 A 和 B 处反力.

答案：$A = 8.9$ lb 向上，$B = 10.7$ lb 向上.

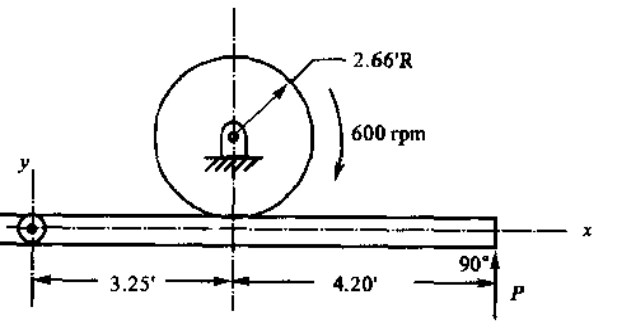


图 16-124

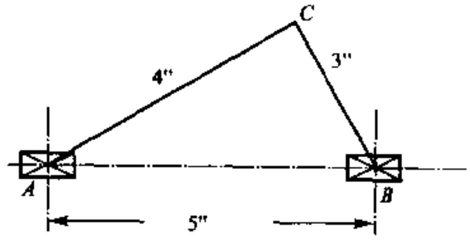


图 16-125

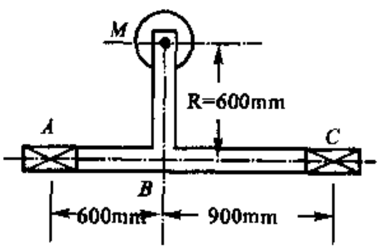


图 16-126

16.151　在图 16-126 中，$AB = 600$ mm，$BC = 900$ mm，$M = 50$ kg，$R = 600$ mm. 如果系统转动的角速度是 $1\frac{2}{3}$ rev/s，求由于离心力在轴承 A、C 处引起的反力. 略去臂的重.

答案：$A = 1970$ N，$C = 1320$ N.

16.152　重解题 16.151，设角速度为 $16\frac{2}{3}$ rev/s.

答案：$A = 197$ kN，　$B = 132$ kN.

16.153　圆盘在水平面内以 0.25 rev/s 的角速度均匀转动. 40 kg 质量的质点在距转轴 2 m 的位置上，正好开始滑动. 问质点与圆盘的摩擦系数是多少？

答案：$\mu = 0.5$.

16.154　重 2 lb 的物块被绳系住静放在水平圆桌上，距圆心 18 in. 其绳一端穿过圆桌中心的孔进入轴中，如图 16-127 所示. 求作用在绳中张力为多大，才能使物块保持离中心 18 in 的距离并随圆桌一起以 30 rad/s 的角速度绕中心转动？设无摩擦.

答案：$T = 83.8$ lb.

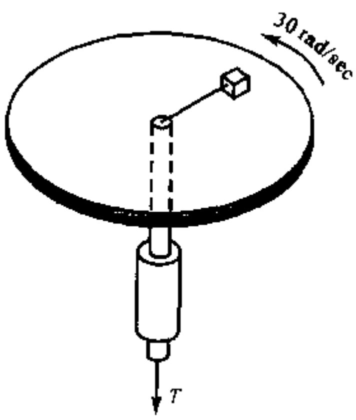


图 16-127

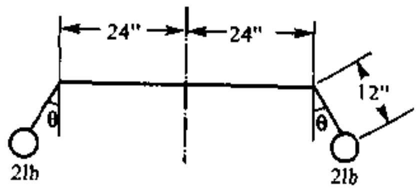


图 16-128

16.155　图 16-128 中的水平构件长 48 in，并以 20 rpm 的角速度绕过其中点的铅直轴转动. 在构件两端用长 12 in 的绳分别系住两个 2 lb 重的球. 求每绳与铅垂线的夹角 θ 是多大？用试错法求解.

用惯性力方法求解下题

16.156　解 16.78 题.
16.157　解 16.79 题.
16.158　解 16.90 题.
16.159　解 16.93 题.
16.160　解 16.101 题.
16.161　解 16.111 题.
16.162　解 16.115 题.
16.163　解 16.145 题.
16.164　解 16.149 题.

第 17 章　功　和　能

17.1　功

作用在运动质点上的力 $\boldsymbol{F}$ 沿任一路径所做的功 U，被定义为时刻 t_1 的位置 P_1 到时刻 t_2 的位置 P_2 的线积分；

$$U = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的微分.

功的表达式也可写成(见图 17-1)，

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_t \cdot \mathrm{d}s$$

其中，s_1、s_2 分别表示质点运动离参考点 P_0 的初始与终了距离；
F_t 是力 $\boldsymbol{F}$ 沿切向分量的大小，如图 17-1 示；$\mathrm{d}s$ 是质点位置沿轨迹的微分.

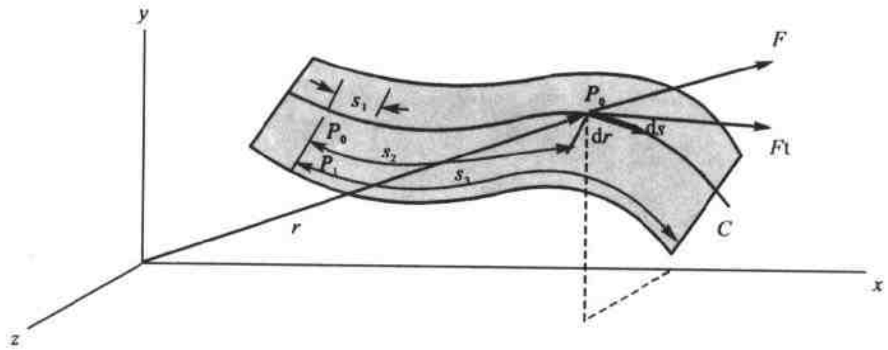


图 17-1

由于有

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k} \text{ 和 } \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}$$

上面的线积分可以写成

$$U = \int_C (F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}) \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}) = \int_C (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$$

也可以导出对时间积分关系如下：

$$U = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t$$

17.2　特殊情形

特殊情形如下：

1. 力的大小为常量，作用线方向沿直线，则有

$$U = Fs$$

其中 U 为力做的功；F 为常力；s 为沿直线运动的位移.

2. 力的大小为常量，但与直线位移成一常角度，则有

$$U = Fs\cos\theta$$

其中 U 是力的功；F 为常力；s 为沿直线运动的位移；θ 为位移与力的作用线之间的夹角.

3. 组成力偶的力(转动出现):

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta$$

其中 M 是力偶;$\mathrm{d}\theta$ 的角位移的微分;θ_1、θ_2 分别是初角位移和末角位移.

如果作用力与运动方向一致则为正功;如果力与运动方向相反则为负功.

作用在刚体上汇交力系在位移上所做的功等效于力系的合力在相同位移上做的功.

功是代数量.在美国通用单位制中,其单位是英尺-磅(ft-lb).

在国际单位制中,单位是牛顿·米(N·m),也称焦耳(J).(1N·m=1J).

17.3 功率

功率是功关于时间的变化率,等于 $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$.在力偶情形中,功率是$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$

(a) 在美国通用单位制中,功率的单位是英尺-磅每秒(ft-lb/s).这个单位很小,因此,使用的大单位是马力,1马力等于 550 ft-lb/s.

马力的公式是

$$\mathrm{hp} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{550} \quad 和 \quad \mathrm{hp} = \frac{\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}}{550}$$

其中,$\boldsymbol{F}$ 是力,单位用 lb;$\boldsymbol{v}$ 是速度,单位用 ft/s;$\boldsymbol{M}$ 是力偶矩,单位用 lb-ft;$\boldsymbol{\omega}$ 是角速度,单位用 rad/s.

(b)在国际单位制中,功率的单位是焦耳每秒(J/s),也有称瓦特(W)(1J/s=1W).

17.4 效率

效率等于在相同时间里输出功与输入功之比,也可表示为输出功率与输入功率之比.由于功的消耗,输出功率小于输入功率(克服摩擦).

17.5 质点的动能

具有质量为 m,运动速度为 v 的质点,其动能 T 定义为$\frac{1}{2}mv^2$.

在美国通用单位制中,动能的单位是英尺·磅(ft-lb).

在国际单位制中,单位为焦耳(J).

17.6 质点的动能定理

质点上所有力做的功等于质点动能 T 的变化量.

证明:

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= m\int_{r_1}^{r_2} (\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{r}})^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_{v_1^2}^{v_2^2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1 \end{aligned}$$

其中,U 是所有力做的功;m 是质点的质量;v_1, v_2 分别是位置 P_1 和 P_2 时的初速度和末速度;T_1, T_2 分别是位置 P_1 和 P_2 时的初动能和末动能.

17.7 刚体平行移动的动能

刚体平行移动的动能是 $T = \frac{1}{2}mv^2$.

证明:刚体上所有质点都具有相同的速度 v.则 m_i 是第 i 个质点的质量,因此有

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} m v^2$$

其中，m 是整个刚体的质量；v 是刚体的速度.

17.8　转动刚体的动能

转动刚体的动能 T 是 $T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

证明：令 $\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个质点的位置矢量，并且 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 是它的速度，如图 17-2 所示. 则有

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\dot{\boldsymbol{r}}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

其中，I_0 是刚体关于转动轴的转动惯量；ω 是角速度.

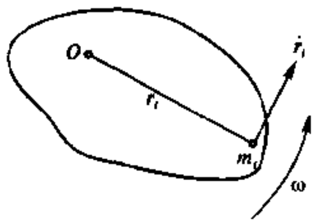


图 17-2

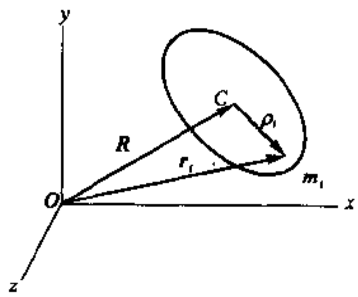


图 17-3

17.9　刚体平面运动的动能

刚体平面运动的动能 $T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$.

证明：研究第 i 个质点的运动，并选择质心为基点，参见图 17-3. 则有

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}_i \quad 和 \quad \dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = (\dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \cdot (\dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = \dot{\boldsymbol{R}}^2 + 2\dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2$$

即

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^2$$

由于 $\dot{\boldsymbol{R}}^2 = \bar{v}^2$，$\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ 和 $m_i \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = m_i \dot{\boldsymbol{R}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times m_i \boldsymbol{\rho}_i)$.

则

$$T = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\rho}_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \omega_i \boldsymbol{\rho}_i^2$$

因为 $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0$，即 $\boldsymbol{\rho}$ 缩到质心轴上，所以

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 - 0 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

其中，$\bar{v}$ 是质心的速度；ω 是角速度；$\bar{I}$ 为关于对平行于 z 轴的质心轴的转动惯量.

17.10　势能

保守力做功的大小与路径无关，只与它的始末位置有关.

物体的势能是由克服作用在物体上的保守力将物体从某一参考面或位置基准面带到另一位置所做的功来决定的，因此，势能为作用在物体上的保守力将物体从基准面带到另一位置的

负功.基准面的选择是任意的,通常以方便为准则.

17.11 刚体的动能定理

刚体动能定理表明,作用在刚体上的外力在一定位移下所做的功等于刚体在相同位移下的动能的改变量.

17.12 能量守恒定律

能量守恒定律证明,如果质点(或刚体)受保守力系作用,则势能与动能之和等于常量.

证明:令 P 和 Q 分别表示质点的初、末位置.质点上的保守力从 P 运动到 Q 所做的功等于 $U=\int_P^Q \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$,取位置矢量 $\boldsymbol{r}_s$ 为标准位置 s,则可写成

$$U=\int_P^S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_S^Q \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_P^S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_Q^S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

令势能 $V_P=\int_P^S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $V_Q=\int_Q^S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 有

$$U=V_p-V_Q$$

也可用动能表示,即

$$U=T_Q-T_P$$

所以有 $V_P-V_Q=T_Q-T_P$ 和 $V_P+T_P=V_Q+T_Q$.

例 题

17.1 质量为 m 的物体,在基准面(设为标准位置)之上 h 高度,求其势能 V.设重力加速度在高度 h 区间内为常量.

解 ☞ 势能 V 是作用在物体上的力沿任一光滑路径从 S(基准面)到 P 所做的功之负.这个力是重力 mg,设为常量,见图 17-4(a).

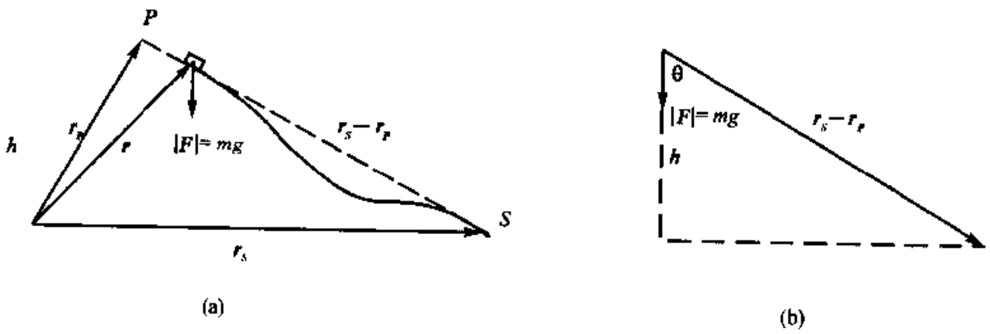


图 17-4

由于力是常量,可写成

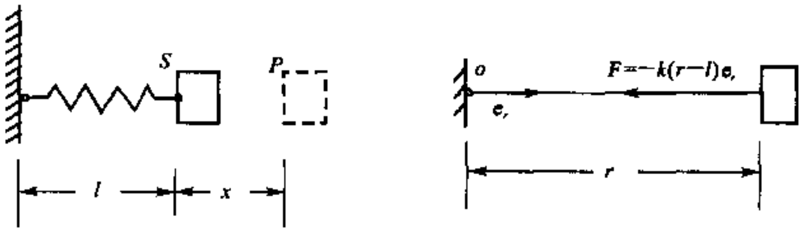
$$V=\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot\int_{r_S}^{r_P}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_S)$$

由图 17-4(b)表示

$$-\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_S)=\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_S)=mg\,|\,\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_S\,|\cos\theta=mgh$$

即,具有质量 m,在基准面之上 h 高的物体的势能是 mgh.

17.2 物体在无摩擦的水平面,被劲度系数为 k lb/in 的弹簧系住.图 17-5(a)是一俯视图.当物体在 S 点时,离墙的距离为 l,此时弹簧中的力为零($kl=0$).将此位置定位标准位置.当物体达到 P 点时,离墙的距离为 $l+x$,求系统的势能(因为物体只在水平面内运动,物体的重力势能没有变化,只有弹性势能).



(a)　　　　(b)

图 17-5

解 ☞ 图 17-5(b)表明，取墙为原点，物体离原点距离为 r. 在此位置，作用在物体上的力与弹簧相对于原长的变形量成比例，即，$F=-k(r-l)e_r$. 此力在微分变量 dr（其中 $dr=dre_r$）上做的功等于 $-k(r-l)e_r\cdot dre_r=-k(r-l)dr$. 因为 $e_r\cdot e_r=1$. 则势能为

$$V_P=-\int_l^{l+x}[-k(r-l)]dr=\frac{1}{2}kx^2$$

由于弹簧被拉伸，则物体具有势能. 弹簧拉力（内力）总沿着弹簧作用，既使弹簧在光滑水平面上倾斜移动，只要距 O 点距离没变化，则在给定的变形下势能仍相等. 这个倾斜运动可设想为沿弹簧方向与微小位移的和垂直（弹性力在与其垂直位移上做的功为零）.

在题 17.1 中，将地球引力是在给定高度 h 内视为常量，因此物体具有势能. 在题 17.3 中，介绍与距离平方成反比的引力.

17.3 试求物体受与引力中心距离 r 的平方成反比例的万有引力的势能.

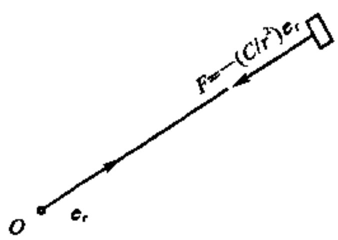


图 17-6

解 ☞ 将物体的标准位置选在无穷远处.（提示：有的学生选择引力中心为标准位置，但由于 V 的定义是力从标准位置移动所做的功，而当物体趋于 O 时，力则趋于无穷大，因此，选择 O 点是不妥当的）. 物体距原点的距离 r 如图17-6所示. 则在此位置作用在物体上的力是 $F=-(C/r^2)e_r$. 由题 17.2，势能为

$$V_P=\int_\infty^r-\left(\frac{C}{r^2}\right)e_r\cdot(-dre_r)$$

$$=\int_\infty^r+\left(\frac{C}{r^2}\right)dr=-C\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r=-\frac{C}{r}$$

17.4 弹簧初瞬时由原长 8 in 压缩到长度 6 in，实际纯压缩量是 2 in. 当弹簧又被压缩了 3 in（总压缩量 5 in）时长度为 3 in 时，求其做的功的大小？设弹簧的劲度系数 $k=20$ lb/in.

解 ☞ 由定义，弹簧的压缩量从 2 in 到 5 in 的功是

$$U=\int_{S_1}^{S_2}F_t ds=\int_2^5 20s ds=210\ \text{in-lb}$$

用例题 17.2 的求弹簧从 2 in 到 5 in 的压缩所做的功的方法也可得到相同的值. 注意到此两压缩量的功是相对于未压缩或零位置的功，因此其积分值应是

$$U=\int_0^5 20s ds-\int_0^2 20s ds=250-40=210\ \text{in-lb}$$

17.5 用图解法求解题 17.4.

解 ☞ 变化力 $F=20$ s 对应位移的图解如图 17-7 所示.

注意，从 2—5 in 之间包含的面积是由水平的 ft 和铅垂的 lb 表示.

因此，阴影面积等于力的功，或等于用 lb 表示的平均高度乘以用 in 表示的位移：

$$U=\frac{1}{2}(40\ \text{lb}+100\ \text{lb})(3\ \text{in})=210\ \text{in-lb}$$

17.6 质量为 5 kg 的物体受力拉动，沿与水平面有 30° 夹角的斜平面向上移动 6 m，如图 17-8 所示. 试求总功. 设摩擦系数 $\mu=0.20$.

解 由隔离体图,可将其上所有力沿与斜面垂直的方向投影求和得到 N_A,即

$$\sum F_y = 0 = -5 \times 9.8\cos30° + N_A + 70\sin10°$$

解出 $N_A = 30.3$ N.

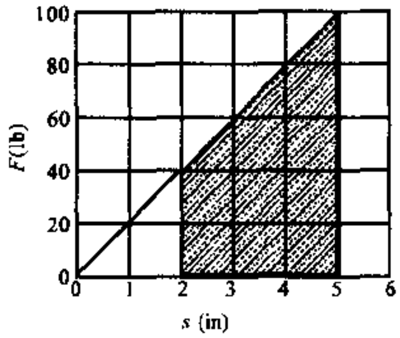


图 17-7

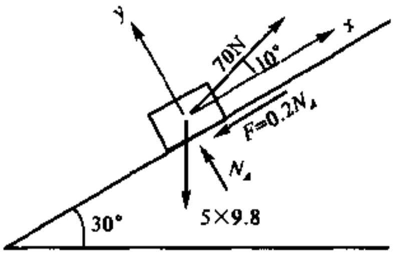


图 17-8

另外,需求出每个力所做的功.如果作用力与物体运动方向一致为正.

力	功的符号	功的大小	结果(N·m)
70 N	+	(70 cos10°)(6)	+413.6
5×9.8	−	(5×9.8 sin30°)(6)	−147
N_A			0
F	−	(0.20×30.3)(6)	−36.4

因此,总功 = 413.6 − 147 − 36.4 = 230 N·m.

另外,求所有力的合力并求出合力的功.由于只有合力的 x 方向的分力做功,因此只需求 R_x

$$R_x = \sum F_x = +70\cos10° - 0.20(30.3) - 5 \times 9.8\sin30° = 38.4$$

38.4 N 是常量,则总功即为 $R_x(6) = 38.4(6) = 230$ N·m.

17.7 质量为 20 kg 的车轮,沿与水平面成 30°角的斜面向上滚动了 1.5 m 的距离,试求其所做的功.设摩擦系数为 0.25.

解 法向力 N_A 不做功,因为 N_A 与运动方向垂直.

摩擦力 F 也不做功.由于摩擦力与运动的车轮接触的点上,两者没有发生相对运动,因此,摩擦力的功为零.如果不是上述情况,而物体沿斜面出现滑动,则摩擦力做负功.

另外一种考虑摩擦力做功的方法是,让摩擦力 F 与作用在圆心的与 F 平行、方向相同且大小相等的力和一个力偶等效,如图 17-10 所示(略去其它的力).

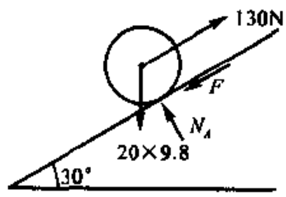


图 17-9

等效力系的功等于力 F(在原心)的功与力偶 M(等于 FR)之和.令车轮滚动了 2π rad,则中心移动的距离是 $2\pi R$,因此,力的功是:F 力的功是 $-F(2\pi R)$;力偶的功是 $+M\theta$ 即 $2\pi FR$.其总功等于零.

因此,给定的系统所做功的力,只有 130 N 的力和重力沿斜面方向的分力(见图17-9).重力的分力是$20 \times 9.8\sin30°$,所以

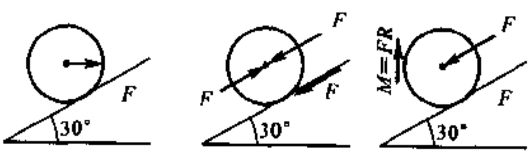


图 17-10

$$力的功 = +130(1.5) - (20 \times 9.8\sin30^\circ)(1.5) = 48\ \mathrm{N \cdot m}$$

17.8 功的表达式为 $U = \int(\sum F_x)\mathrm{d}x$，其中 $\sum F_x$ 是力的合力在 x 方向的分量. 证明图17-11所示的简单发动机中的气体膨胀的功是 $U = \int p\mathrm{d}V$，其中 p 是气体压力用lb/ft^{2}表示，V 是体积用 ft^3 表示.

解 ☞ 作用活塞上的力是 $F = pA$，其中 A 是活塞的面积用 ft^2 表示. 则体积的变化是 $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}x$，因此有

$$U = \int(\sum F_x)\mathrm{d}x = \int(pA)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}A} = \int p\mathrm{d}V$$

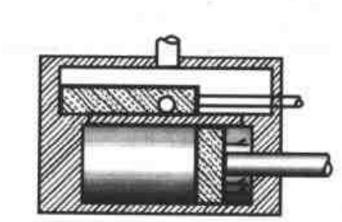


图 17-11

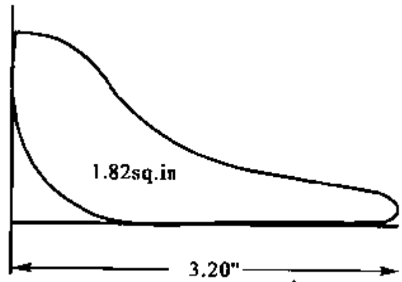


图 17-12

17.9 图 17-12 所示是指示器卡片记录下来的蒸汽发动机头的压力变化的波形. 水平线与发动机的冲程成比例，因此蒸汽的体积用 ft^3 计. 卡片高度表明内压力用 psi 或 lb/ft^2 计，设卡片是 3.20 in 并且发动机接触面积尺寸是 6 in×8 in. 指示器的比例系数是 100，意指 100 psi 的压力对应卡片上 1 in 的距离. 测出卡片上波形面积是 1.82 in^2，试由卡片中图形确定功.

解 ☞ 水平 3.20 in 表示发动机中的体积. 因为镗直径是 6 in，冲程是 8 in，这个体积是

$$V = Al = \frac{\pi}{4}d^2 l = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{6}{12}\right)^2\left(\frac{8}{12}\right)\ \mathrm{ft^3} = 0.131\ \mathrm{ft^3}$$

每水平英寸表示(0.131 ft^3)/3.20 = 0.041 ft^3.

铅直英寸代表(100 lb/in^2)(144 in^2/ft^2) = 14 400 lb/ft^2.

则卡片的 1.82 in^2 面积代表 1.82(14 400)(0.041) = 1075 ft-lb 的功.

17.10 电力火车某瞬时沿水平轨道加速，其电驱动拉力是 100 kN. 如果火车的速度是 90 km/h，则功率是多少？

解 ☞

$$功率 = (100\ 000\ \mathrm{N})\left(\frac{90\ 000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}}\right) = 2\ 500\ 000\ \mathrm{N \cdot m/s}$$
$$= 2.5 \times 10^6\ \mathrm{J/s} = 2.5\mathrm{M\ J/s}\ 或\ 2.5\ \mathrm{MW}$$

17.11 皮带缠绕在直径为 600 mm 的滑轮上，皮带紧边张力为 800 N，松边张力是180 N. 如果角速度是 200 rpm，求传动功率是多少？

解 ☞ 由皮带张力关于对滑轮中心的取矩的代数和，可求出转矩 M：

$$M = 800 \times 0.3 - 180 \times 0.3 = 186\ \mathrm{N \cdot m}$$
$$功率 = M(\mathrm{N \cdot m}) \cdot \omega(\mathrm{rad/s})$$
$$= (180\ \mathrm{N \cdot m})(200 \times 2\pi/60\ \mathrm{rad/s})$$
$$= 3.9\ \mathrm{kW}$$

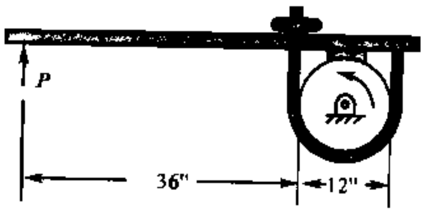


图 17-13

17.12 如图 17-13 所示的刹车装置上作用力 P = 25.6 lb. 由发动机轴输送力矩使鼓轮产生逆时针转动的角速度 600 rpm，求制动消耗的功率. 略去闸的重量.

解 ☞ 由轴带动的传输力矩 M 等于力 P 关于对鼓轮中心之矩，即(25.6 lb)(42/12 ft) = 89.6 lb-ft.

$$\text{hp} = \frac{M\omega}{550} = \frac{89.6\ \text{lb-ft} \times (2\pi \times 600/60)\,\text{rad/s}}{550\ \text{ft-lb/s}} = 10.2$$

即轴的输送功率是 10.2 hp(马力).

17.13 从连在制动装置的发动机飞轮闸上测出的功率是 3.8 hp，而指示器卡面显示的功率是 4.1 hp，求发动机效率是多少？

解 ☞
$$\text{效率} = \frac{\text{输出功率}}{\text{输入功率}} = \frac{3.8\ \text{hp}}{4.1\ \text{hp}} = 93\%$$

17.14 质量为 m 的物块沿水平面以初速度 v_0 射出. 如果物块滑行了 s 距离之后停下来，则问摩擦系数是多少？设摩擦力与正压力成正比.

解 ☞ 初动能是 $T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$，末动能是零.

法向反力是 mg. 因此摩擦力是 μmg，并且所做的功是 $-\mu mgs$.

由 $U = T_2 - T_1$，即 $-\mu mgs = -\frac{1}{2}mv_0^2$，得 $\mu = \frac{v_0^2}{2gs}$.

17.15 磁场强度是 $F = -\frac{3}{x}$，其中 F 用磅计，x 是离磁石的距离用英尺计. 一圆盘重 40 盎司放在光滑水平面上，离磁石 6 ft 远. 求当圆盘离磁石 3 ft 时速度是多少？

解 ☞ 使用动能定理 $U = \Delta T$，得到

$$U = \int F\mathrm{d}x = \int_6^3 -\frac{3}{x}\mathrm{d}x = [-3\ln x]_6^3 = 2.08\ \text{ft-lb}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\left(\frac{4/16}{g}\right)v^2 - 0 = 2.08\ \text{ft-lb}$$

所以
$$v = 23.1\ \text{ft/s}$$

17.16 细杆长 2 m，质量 4 kg，相对于过端点的铅直轴加速度转动，在 10 周内角速度由 20 增到 50 rpm，求需要多大的常力矩？

解 ☞ 杆关于对其转轴的转动惯量 I_O 是

$$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}(4)(2)^2 = 5.33\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$\omega_1 = 2\pi(20/60) = 2.09$ rad/s，$\omega_2 = 2\pi(50/60) = 5.23$ rad/s，并且 $\theta = 2\pi(10) = 62.8$ rad.

功 = 转动刚体的动能改变量

$$M\theta = \frac{1}{2}I_O(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$M(62.8) = \frac{1}{2}(5.33)(\overline{5.23^2} - \overline{2.09^2})$ 得 $M = 0.975$ N·m.

17.17 细直杆质量为 m，长为 l，其端点与水平面铰接. 初瞬时杆在铅直位置，受到扰动后倒下. 见图 17-14. 当杆碰到地面时求其角速度是多少？

解 ☞ 只有重力 mg 作功. 设重心碰地时的铅直距离是 $\frac{1}{2}l$. 则重力的功是 $\frac{1}{2}mgl$.

动能变化从 $T_1 = 0$

到 $T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$. 则有

$$U = T_2 - T_1 \quad \frac{1}{2}mgl = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

得到

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

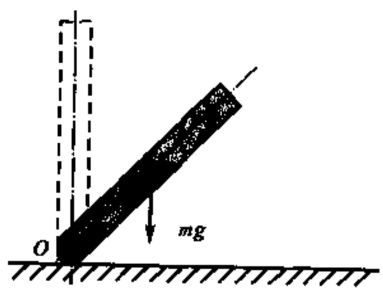


图 17-14

17.18 车与 4 个轮子共重 1800 lb. 每个车轮重 200 lb，直径为 2.5 ft. 车开始的运行速度为 15 mi/h，在水平行驶 2 mi 后停下. 求滚动阻力 F 是多大？

解 ☞ 初动能 T_1 是 1000 lb 车(平行移动)的动能和 4 轮的动能(转动和平移移动). 末动能 $T_2 = 0$. 滚动阻力 F 的功等于 $F(2)(5280)$ ft-lb. 有 15 mi/h = 22 ft/s. 则

$$U = T_2 - T_1$$

$$10\,560F = 0 - \frac{1}{2}(100/32.2)(22)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(200/32.2)\left[(22)^2 + \frac{1}{2}r^2\omega^2\right]$$

将 $\omega^2 r^2 = v^2 = (22)^2$ 代入上式, 得 $F = -1.57$ lb.

17.19 100 lb 的细直杆 4 ft 长, 由水平位置静止下落至 45°角位置, 如图 17-15 所示. 在此瞬时, 杆上 O 铰处的支撑反力是多大?

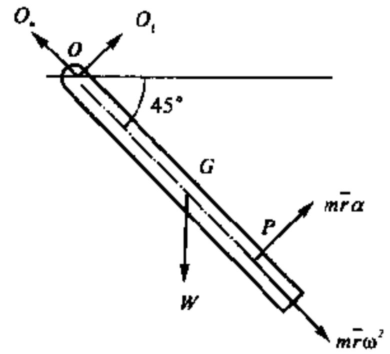


图 17-15

解 ☞ 选择 n 和 t 轴分别沿杆及杆的垂直方向. 过撞击中心 P 施加惯性力以维持杆的"平衡状态".

为求图示瞬时的角 α, 使用方程 $\sum M_O = 0$, 即 $-W(2)(0.707) + m\bar{r}\alpha(k_0^2/\bar{r}) = 0$. P 的距离是 $k_0^2/\bar{r} = I_O/m\bar{r} = \frac{8}{3}$ ft, 则方程为 $-100(2)(0.707) + (100/32.2)(2\alpha)\left(\frac{8}{3}\right) = 0$, 得 $\alpha = 8.53$ rad/s.

沿 t 轴方向对力求和, $O_t + m\bar{r}\alpha - 100\cos 45° = 0$, 得 $O_t = 17.7$ lb. 沿所设方向.

为了求 O_n, 应先求出 ω. 使用动能定理, 只有重力做功, 重心 G 下落距离 $2(0.707) = 1.414$ ft. 则, 功 $= 100(1.414) = 141.4$ ft-lb.

动能的改变量等于动能值

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(100/32.2)(4)^2\right]\omega^2$$

$$= 8.28\omega^2$$

由于 $U = T$ 的改变量, 有 $141.4 = 8.28\omega^2$, 得 $\omega^2 = 17.1$.

力沿杆的方向求和

$$-O_n + 100(0.707) + (100/32.2)(2)(17.1) = 0$$

得 $O_n = 177$ lb

17.20 均质圆柱体半径为 R, 质量为 m, 绕关于对纸面垂直的固定水平轴自由转动, 初瞬时静止(G 在 O 轴的铅垂线上). 求圆柱体在位置 θ 时的角速度是多少? 见图17-16.

解 ☞ 由观察, G 下落的铅垂距离是 $R - R\cos\theta$. 圆柱体由重力做功等于 $mgR(1-\cos\theta)$.

静止位置的动能是 $T_1 = 0$, θ 位置时的动能是 $T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2$, 由转动惯量的平行轴定理

$$I_O = \bar{I} + mR^2 - \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

则, $U = T_2 - T_1 \quad mgR(1-\cos\theta) = \frac{3}{4}mR^2\omega^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{4g(1-\cos\theta)}{3R}}$.

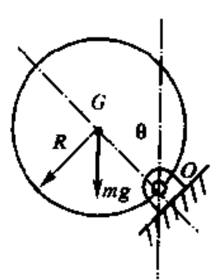


图 17-16

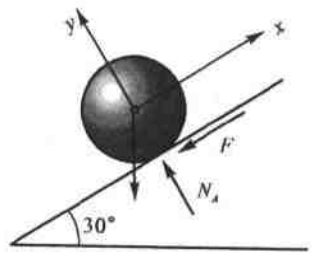


图 17-17

17.21 一球以初速度 9 m/s 沿与水平成 30° 角的斜面向上滚动，如图 17-17 所示．求沿斜面能滚多远？

解 在初动能下沿斜面向上到 $T_2=0$．只有重力沿斜面的分量做功(负值)．

功 $=-(mg\sin 30°)x$，其中 x 是所需求的距离．

T_1 为刚体平面运动的动能是 $T_1=\frac{1}{2}m\bar{v}_1^2+\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$．

由 $\bar{I}=\frac{2}{5}mR^2$，$v_1=\omega_1 R$ 得 $T_1=\frac{1}{2}m\bar{v}_1^2+\frac{1}{5}m\bar{v}_1^2=\frac{7}{10}m(9)^2$，则有

$$U=T_2-T_1,\quad -(mg\sin 30°)x=0-\frac{7}{10}m(9)^2,\quad x=11.6\ \text{in}$$

17.22 如图 17-18(a)所示，重 322 lb 的均质体，在水平面上只滚不滑，在水平力 12 lb 的作用下从静止开始运动．求转过 90° 角时，圆柱体的角速度．圆柱体直径是 3.2 ft．

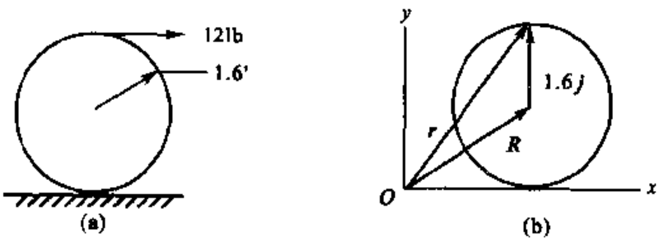


图 17-18

解 在图 17-18(b)的隔离体图中，只有 12 lb 的力做功．选 (x, y) 坐标系如图示，顶点的位置矢量是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+1.6\boldsymbol{j}$．

当圆柱体滚动的微分角位移为 $d\phi$ 时，可写成

$$d\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{R}+1.6(d\phi)\boldsymbol{i}$$

注意到 $d\boldsymbol{R}=1.6(d\phi)\boldsymbol{i}$，12 lb 力所做的元功是

$$dU=12\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{r}=12\boldsymbol{i}(1.6d\phi\boldsymbol{i}+1.6d\phi\boldsymbol{i})=38.4d\phi$$

并且

$$U=\int_0^{\pi/2}38.4d\phi=60.3\ \text{ft-lb}$$

此结果也可用作用在顶部的 12 lb 力的等效力求得，即用作用在圆心的一个水平的 12 lb 的力及一个等于 $12\times1.6=19.2$ lb-ft 顺时针转动的力偶的总功来表示．

它们的功是

$$U=12\times1.6\times\frac{\pi}{2}+19.2\left(\frac{\pi}{2}\right)=60.3\ \text{ft-lb}$$

再求圆柱体的动能

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2+\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{322}{g}\right)\left(\frac{\omega}{1.0}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{322}{g}\right)(1.6)^2\right]\omega^2$$

令其与功相等，可得到 $\omega=2.69$ rad/s．

17.23 均质圆柱体沿水平面只滚不滑．圆柱体的质量是 90 kg，在图 17-19 所示位置静止．劲度系数为 450 N/m 的弹簧具有 600 mm 的原长度．当圆柱体中心向右运动了 500 mm，求圆柱体的角速度是多大？

解 圆柱体初动能 $T_1=0$，末动能 $T_2=\frac{1}{2}m\bar{v}_2^2+\frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2$．将 $\bar{v}_2=r\omega_2=0.15\omega_2$ 和 $\bar{I}=\frac{1}{2}mr^2=\frac{1}{2}(90)(0.15)^2=1.01\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ 代入，得 $T_2=1.52\omega_2^2$．

由于摩擦力作用点的运动与圆柱体对应点的运动相同(因此摩擦力不做功)，则为保守系统．应由能量守恒定律，由于弹簧的特性，系统具有势能(见例题 17.2)．

弹簧的初和末的长度是 $s_1=\sqrt{(0.6)^2+(0.9)^2}=1.08$ m 和 $s_2=\sqrt{(0.6)^2+(0.4)^2}=0.72$ m．则

$$V_1 = \frac{1}{2}k(1.08 - 0.6)^2 = \frac{1}{2}(450)(0.48)^2 = 51.8\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$V_2 = \frac{1}{2}k(0.72 - 0.6)^2 = 3.24\ \text{N}\cdot\text{m}$$

最后，由能量守恒定律，可写出

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2,\quad 0 + 51.8 = 1.52\omega_2^2 + 3.24,\quad \omega_2 = 5.65\ \text{rad/s}$$

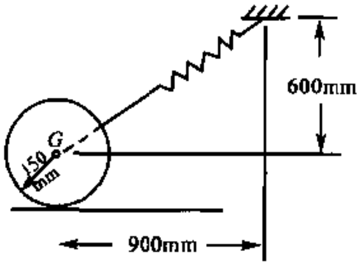


图 17-19

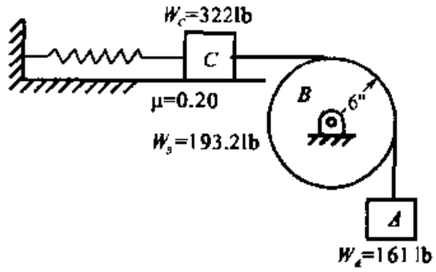


图 17-20

17.24 在图 17-20 所示瞬时，物块 A 向下运动的速度为 5 ft/s. 均质圆柱体 B($r = 6'' = \frac{1}{2}$ft) 绕无摩擦轴承转动. 劲度系数为 6 lb/ft 的弹簧被压缩了 6 in. 求 A 下降 4 ft 后的速度是多大?

解 ☞ 以 A、B 和 C 组成的系统为研究对象，以求动能和力的功. 初动能 T_1 为

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{W_C}{g}\right)v_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_B\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{W_A}{g}\right)v_1^2 = 225\ \text{ft-lb}$$

其中 $\bar{I}_B = \frac{1}{2}(W_B/g)v^2$, $\omega_1 = v_1/r = 5/\frac{1}{2} = 10$ rad/s, 由于圆柱体在绳上无滑动，则末动能 T_2 用速度 v 表示为

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{W_C}{g}\right)v^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_B(2v)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{W_A}{g}\right)v^2 = 9.0v^2$$

系统做功如下：W_A 做正功；C 上的摩擦力(0.20×322)做负功；对于开始压缩 6 in$\left(\frac{1}{2}\text{ ft}\right)$的弹簧做正功，后来又伸长的力做负功. 即

$$\text{总功 } U = -161(4) - 64.4(4) + \int_0^{1/2} ks\,\mathrm{d}s - \int_0^{3.5} ks\,\mathrm{d}s = +26.4\ \text{ft-lb}$$

则 $U = T_2 - T_1$, $26.4 = 9.0v^2\quad 225$, 得 $v = 5.29$ ft/s.

17.25 在斜面上的圆柱体，用一绳索吊住并跨过无摩擦的滑轮系住一质量 70 kg 的物块，如图 17-21 所示. 圆柱体质量为 45 kg，半径为 600 mm，并由静止开始向上运动了 5 m 的距离. 求它的速度是多少?

解 ☞ 圆柱体和物块的初动能是 $T_1 = 0$. 系统的末动能是

$$T_2 = T_c + T_m = \left(\frac{1}{2}m_c\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_c\omega^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_m\bar{v}^2\right) = 6.75\bar{v}^2$$

其中 $m_c = 45$, $m_m = 70$, $\bar{I}_c = \frac{1}{2}m_cR^2$ 和 $R^2\omega^2 = \bar{v}^2$.

设圆柱体的初势能为零，则之后得到势能(9.8×45)(5 sin50°). 设 70 kg 质量的初势能为零，之后失去的势能(9.8×71)(5). 则有

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2\quad 0 + 0 = 68.75\bar{v}^2 + (9.8\times45)(5\sin50^\circ) - (9.8\times45)(5)$$

得　$\bar{v} = 5.03$ m/s.

17.26 图 17-22 所示中的物块 96.6 lb 重，静止在光滑斜面上，并用柔软不可伸长绳连接，跨过无重的光滑滑轮组之后固定. 重物 128.8 lb 重，如图连接. 求系统静止释放后，放在斜面上物块速度达到 8 ft/s 时运动的距离.

解 ☞ 128.8 lb 重的物块的距离是 96.6 lb 重的物块距离的一半，其速度也是 96.6 lb 重物块速度的一半.

系统的初动能是 $T_1=0$，它的末动能是

$$T_2 = \frac{1}{2}(3)(8)^2 + \frac{1}{2}(4)\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 128 \text{ ft-lb}$$

128.8 lb 物体的重力和沿斜面物体的重力分量的功是(设沿平面向上运动)：

$$U = -(96.6\sin 30^\circ)s + 128.8\frac{s}{2} = 16.1s$$

$$16.1s = 12.8 \qquad 得\ s \approx 7.95 \text{ ft} \qquad (沿斜面向上)$$

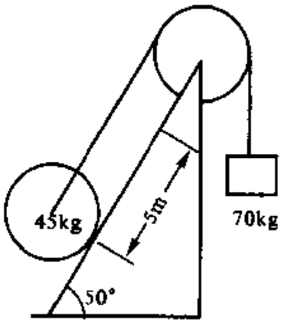


图 17-21

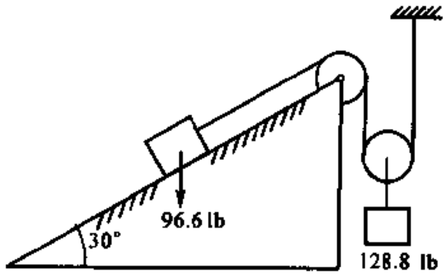


图 17-22

17.27 柔性链条长 l，密度为 a kg/m，伸展放在桌面上.当链条中有 c 米长的部分自由垂挂在桌边时，求静止释放后，链条全部离开光滑桌面时的速度是多大?

解 ☞ 自由垂挂的部分链条的质量是 ac，长度是 $l-c$；其重力做功等于 $gac(l-c)$.桌子上的部分链条下落的平均距离是 $\frac{1}{2}(l-c)$，重力的功是 $ga(l-c)\times\frac{1}{2}(l-c)$.总功等于末动能 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}alv^2$.则重力的功是

$$ga(l-c)\times\frac{1}{2}ga(l-c)^2 = \frac{1}{2}alv^2 \quad 得 \quad v = \sqrt{\frac{g(l^2-c^2)}{l}}$$

17.28 均质缆绳缠绕在绕水平轴转动的鼓轮上.如果绳的自由长度是 6 m，质量为 50 kg，求其所做的功.

解 ☞ 图 17.23 是缆绳的原始瞬时.在分析中，注意到任意微元 dx 上作用的重力是 $9.8(50/6)dx = 81.5dx$.

设微元 dx 离自由端底的距离为 x.则微元上升的距离是 $(6-x)m$.所做的功是重力与上升距离的乘积.

总功是微元功的积分.x 是从 0 到 6 变化.

$$功 = \int_0^6 81.7(6-x)dx = 1470 \text{ N}\cdot\text{m}$$

17.29 见图 17-24.如果重物 W 由弹簧自由吊挂，此时弹簧伸长量为 c.证明使重物由弹簧原长释放时，当弹簧的长度为 $2c$ 时，重物开始向上运动.

解 ☞ 重物在顶上(初位置)和在底部的动能为零.因此重物上的力的总功为零.总功包括：重力的正功(Ws)和弹性力的负功是$\left(\frac{1}{2}ks^2\right)$.因此有

$$Ws - \frac{1}{2}ks^2 = 0$$

在自由吊挂位置时，W 和弹性力 kc 是平衡力.将 $W=kc$ 代入上式，得到 $s=2c$.

此时的弹性张力是载荷的二倍.

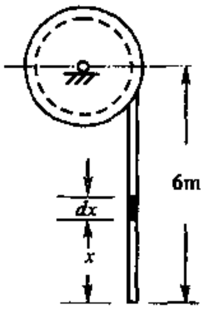


图 17-23

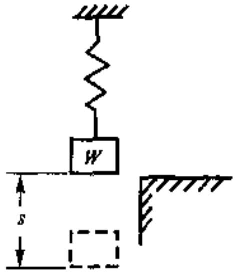


图 17-24

17.30　在图 17-25 所示的弹簧枪中，球 W 静放在劲度系数为 k 的弹簧上. 弹簧的初压缩量是 x_0，求此球飞出枪口的速度是多大? 设弹簧在枪口位置为原长.

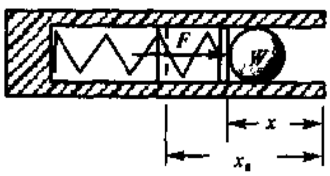


图 17-25

解　☞ 球所示的位置离枪口为 x 距离. 只有弹性力 $F=kx$ 做功. 功 $=\int_0^{x_0} kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx_0^2$，它等于球获得的动能，即是 $\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2$，所以得 $v_0=x_0\sqrt{\frac{kg}{W}}$.

17.31　两球被一弹簧相连接，弹簧原长为 450 mm，劲度系数是 0.044 N/mm. 将两球往一齐靠拢，使之相距为 150 mm(弹簧受压). 然后在光滑水平桌面上释放，求当它们返回原始相距的距离时做了多少功?

解　☞ 由变化的弹性力在球上所做功等于弹簧从 450 到 150 mm 的压缩中做的功，即

$$U=\int_0^{300} kx\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{300}=\frac{1}{2}(0.044)(300)^2=1.98\ \mathrm{N\cdot m}$$

17.32　绳索缠绕着质量为 10 kg 的均质圆柱体如图 17-26 所示. 当圆柱体从静止向下运动了 1.2 m 后，求其质心 G 的速度.

解　☞ 只有重力 $10\times9.8=98$ N 做功.

初动能是零，末动能是

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2+\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2=\frac{1}{2}m\bar{v}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\bar{v}^2}{r^2}\right)=\frac{3}{4}m\bar{v}^2=7.5\bar{v}^2$$

所以，$U=98\times1.2=7.5\bar{v}_1^2$，$\bar{v}=3.96$ m/s

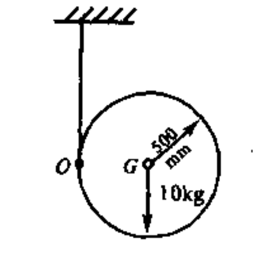


图 17-26

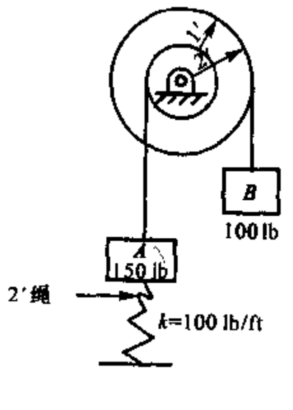


图 17-27

17.33　系统如图 17-27 所示，物块 A 静止在弹簧上，在物块 A 与弹簧之间连接了 2 ft 的柔软

绳索,系统静止释放后,该绳紧张.问当系统达到静止时,弹簧的伸长量是多少?设圆柱体均质,重 161 lb 绕无摩擦轴承转动.

解 ☞ 首先确定系统运动到弹簧被拉伸之前,即物 A 上升 2.0 ft 之前的动能,此时,力的功等于 $100s_B - 150s_A$.

当物 A 上升 2.0 ft 时,重物 B 下降 4.0 ft 时,引起弹簧做功的动能,即 $T_1 = 100(4.0) - 150(2.0) = 100$ ft-lb.系统的末动能 $T_2 = 0$.

当伸长 x ft 时,重力和弹性力对系统(A 和 B)所做的功是

$$U = -100(2x) - 150(x) - \frac{1}{2}kx^2 = 50x - 50x^2$$

根据 $U = T_2 - T_1$,得 $50x - 50x^2 = 0 - 100$, $x^2 - x - 2 = 0$ 和 $x = 2.0$ ft.

17.34 在图 17-28 中,圆柱体的转动惯量为 $I = 100$ slug-ft^2,系统从静止开始运动,求圆柱体逆时针转过 6 rad 后,B 物多重才能使其具有 4 rad/s 的角速度?

解 ☞ 由逆时针转过的角位移的功是

$$U = \left[W_B(2) - 64.4\left(\frac{1}{2}\right)\right]\theta = 12W_B - 193$$

系统的初动能 $T_1 = 0$,末动能 $T_2 = \frac{1}{2}m_Bv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_Cv_C^2$

由 $v_B = 2\omega$, $v_C = \frac{1}{2}\omega$ 和 $\omega = 4$ rad/s,得到

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{W_B}{32.2}\right)(8)^2 + \frac{1}{2}(100)(4)^2 + \frac{1}{2}(2)(2)^2 = 0.994W_B + 804$$

根据 $U = T_2 - T_1$,有 $12W_B - 193 = 0.994W_B + 804$,得 $W_B = 90.6$ ft.

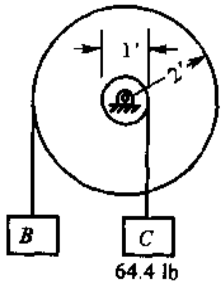


图 17-28

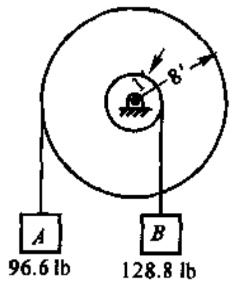


图 17-29

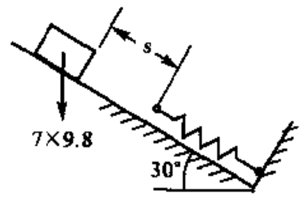


图 17-30

17.35 在图 17-29 中,物 A 重 96.6 lb,物 B 重 128.8 lb,鼓轮的转动惯量 $\bar{I} = 12$ slug-ft^2,求物 A 速度达到 6 ft/s 时,其下落的距离是多少?

解 ☞ 做功 $= 96.6s_A - 128.8s_B = 53.7s_A$,得 $s_B = \frac{1}{3}s_A$.

系统的初动能 $T_1 = 0$,末动能 $T_2 = \frac{1}{2}m_Av_A^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_Bv_B^2 = 86$ ft-lb,有 $v_A = 6$ ft/s, $v_B = 2$ ft/s和 $\omega = \frac{v_A}{r} = \frac{6}{3} = 2$ rad/s.

因此,$53.7s_A = 86$,得 $s_A = 1.60$ ft.

17.36 如图 17-30 所示,质量 7 kg 的物块静止释放,沿斜面下滑 s 距离后,撞上弹簧.在与弹簧一起运动之前,将弹簧压缩了 75 mm.设摩擦系数为 0.25,弹簧的劲度系数为 $k = 2.8$ N/mm,求 s 的值.

解 ☞ 初动能和末动能(即物块运动距离是 $s + 0.075$ m)均等于零.因此,摩擦力、重力和弹性力的功之和也等于零.

法向反力 $= 9.8 \times 7\cos30° = 59.4$ N,不做功.

摩擦力 $= 0.25 \times 59.4 = 14.85$ N.重力沿斜面的分量 $= 9.8 \times 7\sin30 = 34.3$ N.每个力在位移 $s + 0.075$ m上做功,摩擦力做负功,其它做正功.

弹性力的功是负的，并且等于$\frac{1}{2}k(0.075)^2 = 7.88\ \text{N·m}$.

$U = (34.3 - 14.85)(s + 0.075) - 7.88$，得 $s = 330\ \text{mm}$.

17.37 质量 5 kg 的物块，在弹簧的劲度系数为 10 N/mm 的弹簧上下移 2 m. 求弹簧又被压缩 100 mm 时，物块的速度是多少？

解 ☞ 质量块下落$(2+0.1)\ \text{m} = 2.1\ \text{m}$. 重力做功是$9.8\times5\times2.1 = 102.9\ \text{N·m}$. 弹簧在质量块上所做的功是负的，并等于$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(10\ 000\ \text{N/m})(0.1\ \text{m})^2 = 50\ \text{N·m}$.

物块动能的从零增加到$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(5)v^2 = 2.5v^2$.

U = 动能改变量 $102.9 - 50 = 2.5v^2$，所以 $v = 4.6\ \text{m/s}$.

17.38 重物在劲度系数是 20 lb/in 的弹簧上，从静止下落 6 ft，使弹簧产生了最大变形量为 8 in. 求重物的重量是多少？

解 ☞ 重力的功 $= W(72+8) = 80W$ in-lb.

弹性力的功 $= -\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}(20)(8^2) = -640$ in-lb.

由于物体开始时静止，运动后又静止，因此动能的改变量是零. 则 $U = 0$，$80W - 640 = 0$，得 $W - 8$ lb.

17.39 在地面上发射质点，当质点可运动到足够高时，将不会再返回地面，求发射的逃逸速度（即初速度.）

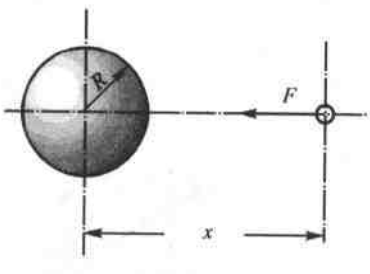


图 17-31

解 ☞ 如图 17-31 所示，质点（重 W）与地球（半径 R）的中心之间的距离是 x. 地心的引力 F 与距离 x 平方成反比，即 $F = -\frac{C}{x^2}$

为求 C，注意，地球表面的引力等于重量 W，即 $-W = -\frac{C}{R^2}$，$C = WR^2$，因此 $F = -WR^2/x^2$.

质点从 $x = R$ 到 $x = \infty$ 所做的功是

$$\int_R^{-\infty} F\mathrm{d}x = \int_R^{\infty} -\left(\frac{WR^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = WR^2\left[\frac{1}{x}\right]_R^{\infty} = -WR$$

此功等于动能的改变. $T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v_0^2$ 和 $T_2 = 0$（因 $x\to\infty$ 时，$v = 0$），得

$$-WR = -\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v_0^2 \quad 得 \quad v_0 = \sqrt{2gR}$$

设地球的直径为 7900 mi，则逃逸速度为 6.93 mi/s.

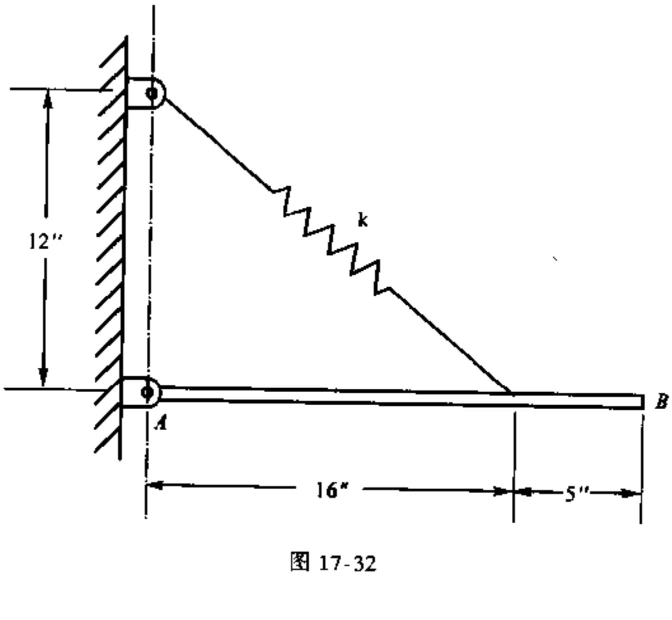


图 17-32

17.40 在图 17-32 中，细直杆 AB 在水平位置静止.若释放后，AB 恰巧能运动到铅直位置，求弹簧的劲度系数 k.弹簧图示位置时伸长量为 1 in，杆重 8 lb.

解 ☞ 弹簧原长是 19 in.在铅直位置时，弹簧伸长量 28 in − 19 in = 9 in.

弹性力的功是

$$-\frac{1}{2}k(s_2^2-s_1^2)=-\frac{1}{2}k\left[\left(\frac{9}{12}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2\right]=-0.278k\ \text{ft-lb}$$

重力的功是

$$mgh=(8)\left(\frac{10.5}{12}\right)=7\ \text{ft-lb}$$

由于杆初和末都处于静止状态，所以动能改变量为零.则有

$$U=T_2-T_1\qquad -0.278k+7=0$$

得 $k=25.2$ lb/ft.

17.41 见图 17-33.圆柱体重 100 lb，半径 1 ft，在力 80 lb 的作用下只滚不滑.弹簧系一绳索并缠绕在圆柱体上，当圆柱体中心运动 6 in 时，求其速度为多大？弹簧在 80 lb 力的作用下没有变形.

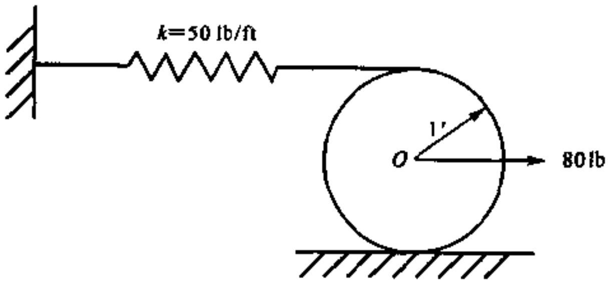


图 17-33

解 ☞ 由于圆柱体只滚不滑，当圆柱体中心向右移动 6 in 时，弹簧伸长了 12 in.注意到摩擦力和法向反力都不做功(见例 17.7)，则功是

$$U=\frac{1}{2}50(s_2^2-s_1^2)+Fs=-\frac{1}{2}50\left[\left(\frac{12}{12}\right)^2-0\right]+80\left(\frac{6}{12}\right)=15\ \text{ft-lb}$$

被动能为零，并 $v_0=1\omega$ 时无滑动，则动能的改变量为

$$\Delta T=T_2-T_1=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}I_0\omega^2=\frac{1}{2}\frac{100}{g}v_0^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{100}{g}\times 1^2\right)\left(\frac{v_0^2}{1}\right)$$

则由　$U=T_2-T_1, 15=\frac{3}{4}\left(\frac{100}{g}\right)v_0^2$，得 $v_0=2.54$ ft/s.

补 充 习 题

17.42 圆筒状的水井深 12 m，直径是 2 m.如果井中水深为 3 m，求用泵将水抽到地面时所做的功.

答案：970 kN·m.

17.43 如题 17.42 中，如果泵的效率是 60%，求功是多少？

答案：1620 kN·m.

17.44 一人想用 60 lb 的力，将重为 200 lb 的圆桶，滚动到地面之上 3 ft 高的卡车中，问使用多长的跳板及人做多大的功才能将圆桶滚到车中？

答案：10 ft，600 ft-lb.

17.45 重 10 lb 的物块沿水平面滑行 4 ft.(a)如果摩擦系数是 0.3，物块沿表面做多少功？(b)表面对物体做了多少功？

答案：(a)U = 0，(b) = 12 ft-lb.

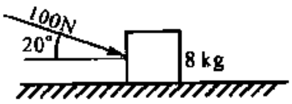


图 17-34

17.46 质量 8 kg 的物块，受到 100 N 力的作用，如图 17.34 所示．如果滑动摩擦系数是 0.30，求物块向右移动 4 m 后，所有力做的功．

答案：$U = 241$ N·m.

17.47 重 10 lb 的物块，沿与水平面成 40°夹角的斜面向下滑动 6 ft．试求作用在物块上所有的力的功．设滑动摩擦系数是 0.40．

答案：$U = 20.2$ ft-lb.

17.48 质点沿轨迹 $x = 2t$，$y = t^3$ 运动，其中 t 以秒计距离以英尺计．求在 $t = 0$ 时刻到 $t = 3$ s 区间，由力的分量 $F_x = 2 + t$ 和 $F_y = 2t^2$ 所做的功是多少？ 力以磅计．

答案：$U = 313$ ft-lb.

17.49 重 2 oz 的小珠子沿无摩擦的金属丝，缓慢地从 A 点运动到 B 点，如图 17-35 所示．求做了多少功？

答案：$U = 0.5$ ft-lb.

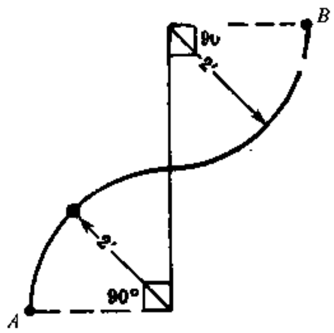


图 17-35

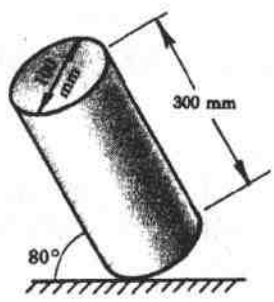


图 17-36

17.50 移动式起重机的水平臂 250 ft 长，并位于地面之上 400 ft 的高度．如果起重机缓慢地吊起重 8000 lb 的物体 300 ft 高，求所做的功是多少？ 并求在起吊中，起重机的倾倒力矩是多少？

答案：$U = 2.4 \times 10^6$ ft-lb, $M = 2.0 \times 10^6$ ft-lb.

17.51 质量 20 kg 的圆柱体由如图 17-36 所示的位置静止释放，求当圆柱体的底面碰到地面时，地球引力的功．

答案：$U = 1.25$ N·m.

17.52 在图 17-37 中，由方桶 B 向空圆形桶 A 中放水．水的密度是 1000 kg/m³．设开始时 B 桶水已注满，求 A 桶充满水时所做的功是多少？

答案：$U = 176$ kN·m.

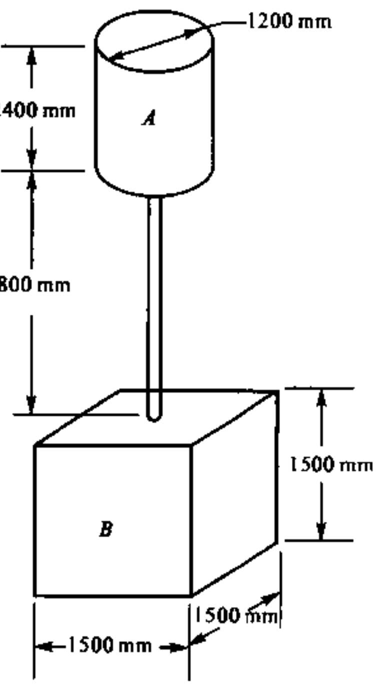


图 17-37

17.53 在图 17-38 中，质量 16 kg 的物块下降 2.5 m．其物块用一缠在无摩擦转动的鼓轮上的轻绳吊住．作用在鼓轮上的常力转矩 $M = 80$ N·m．求系统所做的功是多少？

答案：U = 59 N·m.

17.54 如图 17-39 所示的鼓轮绕无摩擦轴承转动．当重 60 lb 的物块下落 3 ft 时，系统做功是多少？

答案：$U = 60$ ft-lb.

17.55 如图 17-40 所示，均质物体厚 25 mm，质量密度是 7840 kg/m³．当由水平落到铅直位置时，物体所做功是多少？

答案：$U = 138$ N·m.

17.56 受到力偶 $M = 2\theta^3 - \theta$ 的一根杆，由 $\theta = 0°$ 转到 $\theta = 90°$，试求其做了多少功？ M 的单位是 N·m.

答案：$U = 181$ N·m.

17.57 一弹性绳伸长 250 mm 时，需要 30 N 的力，当改变绳的伸长，使其伸长了 1500 mm 时，求绳中力的功是多少？

答案:135 N·m.

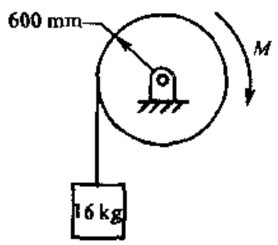


图 17-38

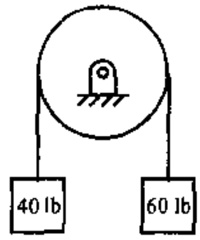


图 17-39

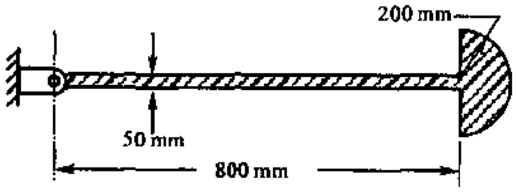


图 17-40

17.58 压缩弹簧 4 in 时,需力 200 lb.求弹簧被压缩 9 in 时,力的功是多少?
答案:2025 in-lb.

17.59 火车沿水平轨道匀加速行驶,其驱动力是 90 kN.求火车速度为 60 km/h 时,其功率是多大?
答案:1.5 MW.

17.60 重 2500 lb 的汽车,以 15 mi/h 的速率均速爬坡,其效率是 10%.如果阻力是 20 lb/ton,求车的马力是多大?
答案:11.0 hp.

17.61 蒸汽发动机垂直升起 1800 kg 的质量块,并使其速率为 9 m/s.求发动机有多大马力? 设效率是 70%.
答案:227 kW.

17.62 从发动机飞轮上的制动块上测出功率是 6.3 马力(hp).由指示器卡片上指示出的马力是 7.1.求发动机的效率是多少?
答案:89%.

17.63 需用多大马力,才能在 4 秒内将 100 lb 重物升到 8 in 高?
答案:0.36 hp.

17.64 质量 50 kg 的均质圆盘,直径 1200 mm,绕轴转动的角速度是 100 rpm.要想保持此速度不变,需转矩 30 N·m(克服摩擦).求需多大的功率?
答案:314 W.

17.65 直径为 6 in 的滑轮以 2000 rpm 的角速度转动.两端皮带中的张力分别为松弛边是1 lb,张紧边是3 lb.求滑轮运动的驱动马力是多大?
答案:0.19 hp.

17.66 100 g 的物体从 1500 mm 高处,落到地面上.求其碰到地面时的动能是多大?
答案:$T = 1.47$ N·m.

17.67 50 kg 的物体,受 300 N 水平拉力的作用,沿地面从静止开始运动.如果动摩擦系数是 0.1.当物块运动 2 m 后,力不再作用,求物体运动多少距离后静止?
答案:10.2 m.

17.68 子弹射入 2 in 厚板的速度是 2000 ft/s,飞出时的速度是 800 ft/s.求子弹能穿透此厚板的最大厚度.
答案:2.38 in.

17.69 在题 17.6 中,如果物块从静止开始运动,求其运动 6 m 后的速度是多大?
答案:9.6 m/s.

17.70 质量 2 kg 的物块与水平成 50°夹角的斜面向下滑动.物块与斜面间的摩擦系数是 0.25.设物块开始运

动时具有 2 m/s的速度，求运动 4 m 后物块的速度.

答案：$v=7.17$ m/s.

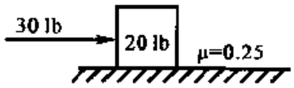


图 17-41

17.71 重 80 lb 的物块，受 30 lb 水平力作用. 摩擦系数是 0.25. 求物块从静止运动 20 ft 后的速度，见图 17-41.

答案：$v=12.78$ ft/s.

17.72 质量 100 kg 的圆盘，直径是 500 mm，厚度是 75 mm，绕中心以角速度 100 rpm 转动，求圆盘具有的动能.

答案：171 N·m.

17.73 重 100 lb 的球，直径 6 in. 绕离中心 16 in 的轴转动，角速度是 120 rpm. 求转动动能是多大？

答案：442 ft-lb.

17.74 均质圆柱重 20 lb，半径是 8 in，质心速度是 6 ft/s. 求其动能是多大？

答案：$T=16.8$ ft-lb.

17.75 质量 4 kg 的球，半径是 1000 mm，回转半径是 600 mm，沿水平面滚动，角速度是 3 rad/s. 求球的动能是多大？

答案：$T=24.5$ N·m.

17.76 在图 17-42 中，由柄 CD 的角速度是 1.5 rad/s，顺时针方向. 细杆的重分别是：AB 杆是3 lb，BC 是 5 lb，CD 是 4 lb. 求系统的动能.

答案：4.09 ft-lb.

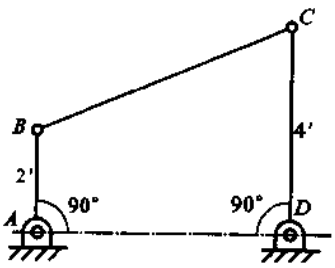


图 17-42

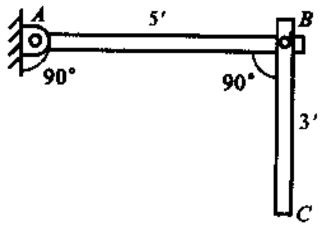


图 17-43

17.77 在图 17-43 中，细直杆 AB 和 BC 分别重 10 lb 和 6 lb. AB 以角速度 8 rad/s 顺时针转动，BC 以 6 rad/s 逆时针转动. 求系统的动能.

答案：243 ft-lb.

17.78 质量 900 kg 的圆柱形飞轮直径是 1200 mm. 如果轴的直径是 150 mm 及摩擦系数是 0.15，求飞轮由角速度 1800 rpm 到运动停止，需多长时间？

答案：85.5 s.

17.79 电机转子重 20 lb，回转半径 $k=1.83$ in，其上作用摩擦转矩 8 oz-in，求转子从角速度 500 rpm 到停止转动共转了几周？

答案：$\theta=979$ rev.

17.80 鼓轮以 20 rpm 的角速度，提升 1 ton 的罐笼，其中绳索是无重的柔软缆绳如图17-44所示. 如关掉电源，求罐笼静止前上升的高度为何？略去轴承摩擦.

答案：$h=0.36$ ft.

17.81 小车沿光滑斜面下滑后进入环形轨道，如图 17-45 所示，求 h 的值最小为多大，才能使车至圈顶时仍能与轨道接触？

答案：$h=25$ m.

17.82 4 kg 的均质细杆长 1 m，并绕其端点转动. 令杆在水平位置时静止释放，由于重力和常转矩 5 N·m 的作用，开始向下转动，求杆通过最低位置时的角速度是多少？

答案：$\omega=4.19$ rad/s.

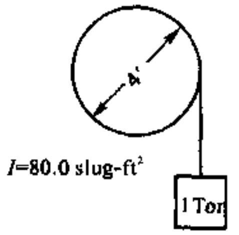


图 17-44

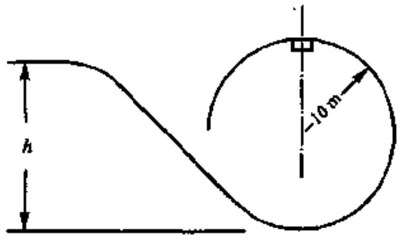


图 17-45

17.83 在图 17-46 中,质量 30 kg 的鼓轮的回转半径是 $k=800$ mm. 假设没有摩擦,求鼓轮从静止到转动一周后的角速度.

答案:$\omega=3.35$ rad/s.

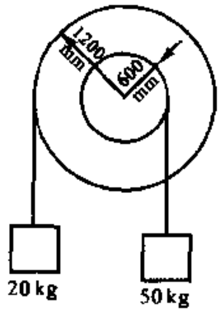


图 17-46

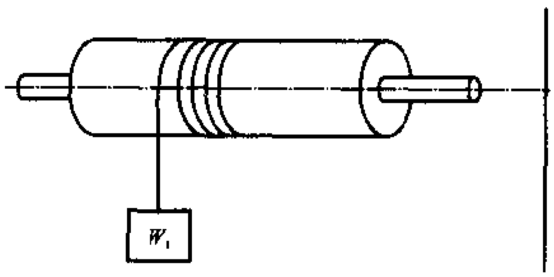


图 17-47

17.84 水井吊桶重 W_1,绞盘重 W_2,回转半径 k,如图 17-47 所示. 如果绞盘半径为 r,求需用多长时间,能将吊桶从水平面下降距离 s? 忽略轴承摩擦和绳子重量.

答案:$t=\sqrt{2s(1+W_2k^2/W_1r^2)/g}$.

17.85 均质杆长 L,绕离端点 a 距离的轴转动,如图 17-48 所示. 如果杆从 30°角位置静止释放,求杆通过铅直位置时的角速度是多大?

答案:$\omega^2=\dfrac{0.402g(L-2a)}{L^2-3La+3a^2}$.

17.86 重 200 lb 的球,直径 2 ft,从静止沿 25°斜面滚下距离 100 ft,求此时球的动能.

答案:8450 ft-lb.

17.87 在题 17.86 中,球运动 100 ft 后,其形心速度是多大?

答案:44.2 ft/s.

17.88 均质球沿与水平面夹角为 θ 的斜面滚下 s 距离. 如果球从静止开始滚动,求其速度是多大?

答案:$v=6.78\sqrt{s\sin\theta}$.

17.89 一辆汽车,车身质量 900 kg, 4 个车轮 20 kg, 司机 70 kg, 并且车轮直径 700 mm, 回转半径 $k=300$ mm. 求汽车沿 5% 坡度的斜面从静止向下运动 300 m 后,车的速度是多大?

答案:60 km/h.

17.90 重 8 lb 的均质球,由绳缠绕,如图 17-49 所示. 如果球从静止位置开始运动,求形心下落 3 ft 后的速度是多大?

答案:$v=11.8$ ft/s.

17.91 重 5 lb 的均质圆盘,直径为 2 ft, 与另一重 20 lb, 直径为 4 ft 的均质圆盘刚性固结. 如果使其在图17-50 所示位置静止释放,求当 A 圆盘到达底部时,它们的角速度是多大?

答案:$\omega=2.25$ rad/s.

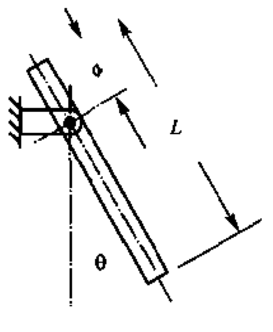


图 17-48

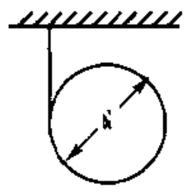


图 17-49

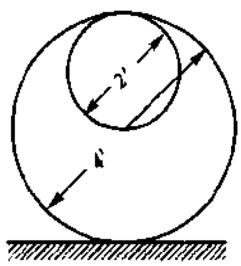


图 17-50

17.92 在图 17-51 中，A 的质量为 7 kg，B 的质量为 4 kg. 如果 B 从静止下落 400 mm 的距离，求它的速度 (a)如果没有摩擦，(b)A 与水平面间的摩擦系数是 0.20.

答案：(a) $v = 169$ m/s，(b) $v = 1.36$ m/s.

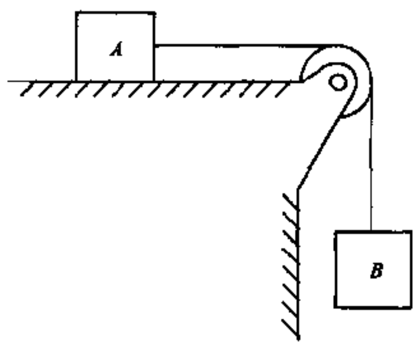


图 17-51

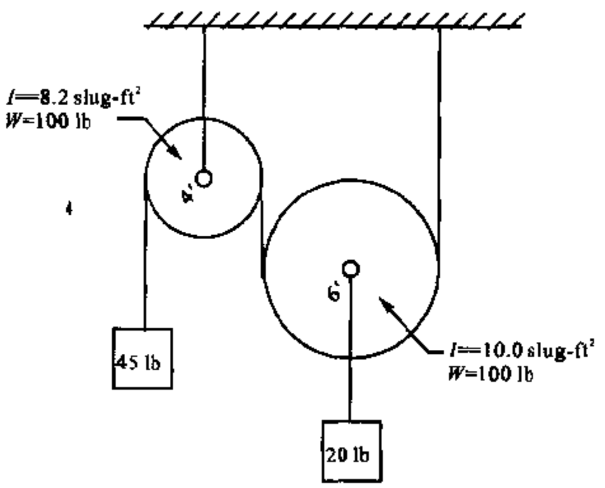


图 17-52

17.93 在图 17-52 所示的系统中，所有的绳索都是铅直的. 重 45 lb 的物块从静止上升 1.6 ft 后，求其速度是多大?

答案：$v = 3.21$ ft/s.

17.94 质量为 36 Mg 的货车以 8 km/h 的速度，在水平方向上撞到具有劲度系数为 1750 N/mm 的缓冲器，求弹簧的最大压缩量是多大?

答案：$d = 320$ mm.

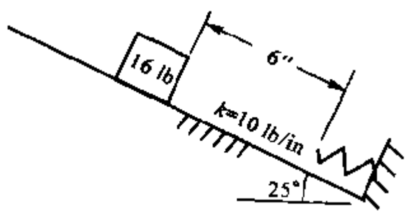


图 17-53

17.95 重 16 lb 的物块，沿 25°斜面从静止下滑 6 in，如图 17-53 所示. 物块撞到了弹簧的劲度系数为 10 lb/in 的弹簧. 动摩擦系数是 0.20，求弹簧的最大压缩量.

答案：2.57 in.

17.96 劲度系数 $k = 5$ N/mm 的弹簧，压缩了 75 mm 后，可将质量为 50 kg 的球体从无摩擦的管中推射出. 如图 17-54 所示. 略去空气阻力，求该球体射出后达到与初始时位于同一高度时的水平距离 r.

答案：$r = 55.4$ m.

17.97 (a)在图 17-55(a)中，重 2 lb 的 W 物块，从静止的 A 点沿无摩擦的弯道滑入 $\frac{1}{4}$ 圆. 弹簧的劲度系数 $k = 1.2$ lb/ft，原长为 18 in. 求其达到 B 点时的速度. (b)如果轨道是椭圆形的如图 17-55(b)所示，则达到 B 点的速度是多大?

答案：(a) $v=11.3$ ft/s, (b) $v=9.49$ ft/s.

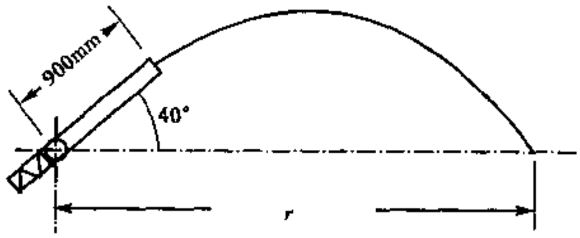


图 17-54

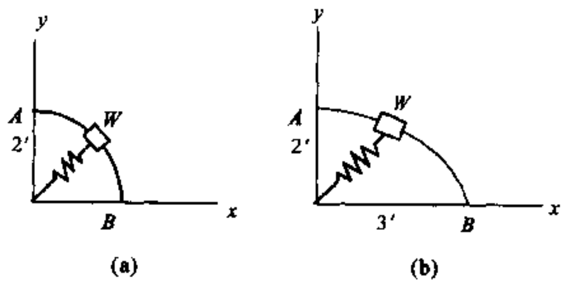


图 17-55

17.98 质点受到地球引力大小，随质点到地心距离的平方成反比的规律变化．如果质点在地面上重 W（半径 R），则当距离为 ρ 时，引力大小为 $\frac{WR^2}{\rho^2}$．(a)求质点从地面到距地心为 x 距离时，克服万有引力所做功的大小？(b)质点到无穷远时做的功？见图 17-56.

答案：(a) $U=WR-WR^2/x$, (b) $U=WR$.

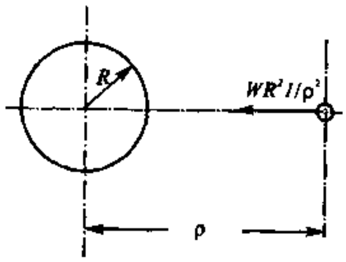


图 17-56

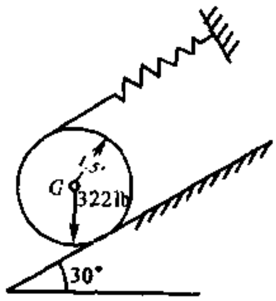


图 17-57

17.99 图 17-57 所示的车轮重 322 lb，关于对质心的回转半径是 1.20 ft．在图示瞬时，G 点处的速度 6 ft/s 沿斜面向下，并且弹簧伸长了 0.50 ft．如果弹簧的劲度系数是 80 lb/ft，求弹簧的总长为何？

答案：3.78 ft.

17.100 在题 17.40 中，若杆铅直向上时弹簧为原长，则杆开始以角速度 2 rad/s 顺时针转动并通过 180°时，求其角速度是多大？

答案：$\omega=7.63$ rad/s.

17.101 利用题 17.100 的结果，求当杆水平向左时，使杆趋于静止的关于绕 A 点的力矩．

答案：$M=4.74$ lb-ft.

17.102 在图 17-58 中，圆盘质量 3 kg，细直杆 AB 质量 8 kg．圆盘的初角速度 6 rad/s．求使圆盘逆时针旋转 90°之后停止转动的力矩 M 多大？设滚动轮 B 的质量忽略不计．

答案：0.54 N·m 逆时针．

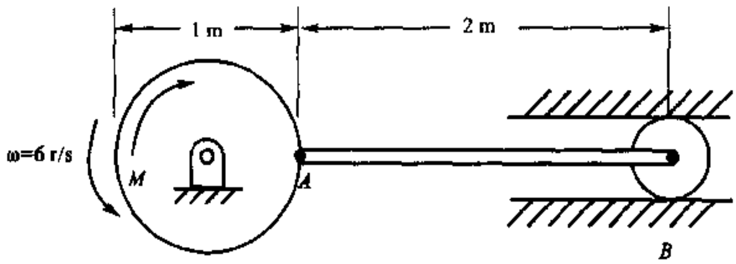


图 17-58

17.103　在图 17-59 中，厚板的质量为 7 kg. 辊轮 D 和 E 相同，其质量均为 5 kg，直径为 0.5 m. 厚板与在 A 点下的 D 轮和质心 C 点下的 E 轮一起从静止释放. 略去摩擦，求 E 轮滚到 B 点之下时，厚板的速度.

答案：7.11 m/s.

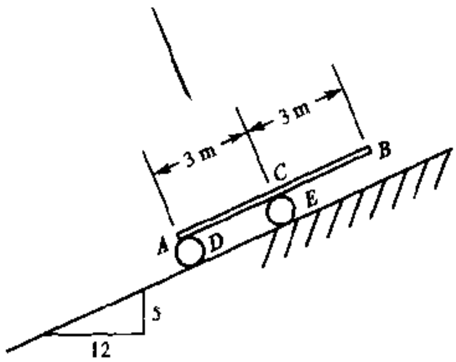


图 17-59

17.104　图 17-60 中，质量 5 kg 的细杆 AB 与质量 3 kg 的均质圆盘在 A 点用销钉连接. 杆静止在水平面的 B 点. 如果系统在图示位置静止释放，当杆水平时，求圆盘中心的速度是多大？圆盘滚动而不滑动，并略去杆 B 处的摩擦.

答案：$v_0 = 1.81$ m/s 向右.

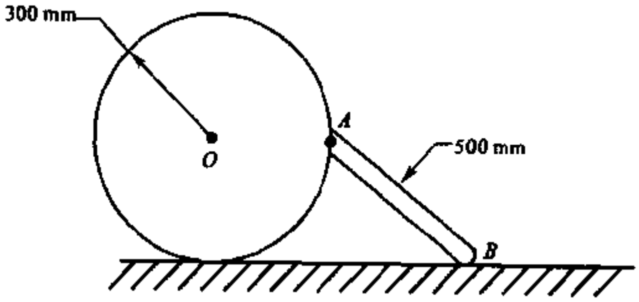


图 17-60

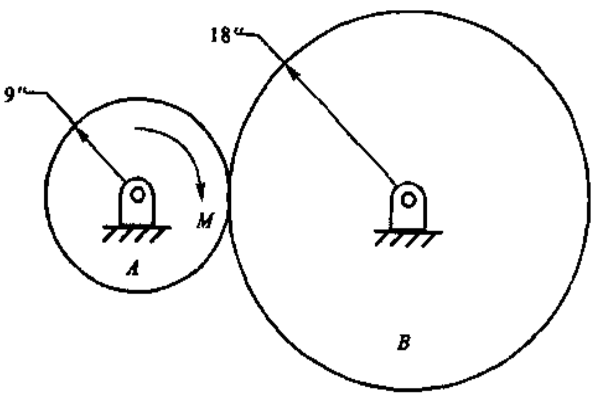


图 17-61

17.105　在图 17-61 中，齿轮 A 在顺时针力矩 $M = 250$ lb-in 作用下驱动齿轮 B 转动. 设力矩作用初瞬时，两齿轮均静止，求当齿轮 A 旋转 4 周后，齿轮 B 的角速度是多大？设齿轮 A 和 B 分别重为 8 lb 和 32 lb.

答案：$\omega_B = 27.4$ rad/s.

第 18 章　冲量与动量

18.1　质点的动量定理

质点的线动量由 13.1 节中定义为

$$G = m v$$

其中，　m 是质点的质量；

v 是质点的速度.

作用在质点上外力的矢量和等于质点的线动量 G 对时间的变化率：

$$\sum F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dG}{dt} = \dot{G} \tag{1}$$

在表达式中质点的速度从 v_1 变到 v_2 时间的间隔上积分得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F dt = \int_{G_1}^{G_2} dG = G_2 - G_1 = m v_2 - m v_1 \tag{2}$$

方程左边叫作合力 ($\sum F$) 在 t_1 到 t_2 的时间间隔上的线冲量 $\bar{I}$. 即，线冲量等于在相同时间中的线动量的改变量.

18.2　质点系的动量定理

作用在由 n 个质点组合的质点系上的外力的矢量和等于质点系的线动量对时间的变化率. 其中质点系的线动量是 n 个质点的质量和 m 与质点系质心的速度的乘积，即

$$\sum F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d\bar{G}}{dt} \tag{3}$$

其中，　$\sum F$ 是作用在质点系上外力的矢量和

$m = \sum_i^n m_i$ 是 n 个质点的质量和

v 是质点系质心的速度

同一个质点的情况相同，上面方程可用积分表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F dt = \int_{v_1}^{v_2} d(m\bar{v}) = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \Delta\bar{G} \tag{4}$$

这表明，所有作用力在一定时间间隔的线冲量 $\bar{I}$ 等于质量 m 在相同时间间隔下的线动量的改变量. 注意到，一般情况下，矢量 ΔG 不一定通过质点系的中心.

18.3　动量矩

动力矩 H_O(也称角动量)，是线动量矢量 G 关于对任意 O 点之矩. 在图 18-1 中，O 点是任意点，既可以是定点也可以是动点. 即

$$H_O = \rho \times G = \rho \times (mv) \tag{5}$$

其中，　ρ 是质点 P 关于对 O 点的位置矢量；

v 是 P 的绝对速度(沿轨迹切线方向).

作用在质点上的外力，关于对固定点 O 之矩的矢量和等于质点的动量矩 H_O 对时间的变化率，即

$$\sum \bar{M}_O = \frac{dH_O}{dt} = \dot{H}_O \tag{6}$$

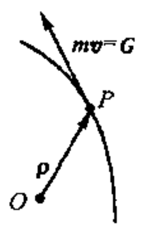


图 18-1

证明:由方程(5),$\boldsymbol{H}_O=\boldsymbol{r}\times(m\,\boldsymbol{v})$,其中 $\boldsymbol{r}$ 是质点 m 在惯性坐标系下的位置矢量,$\boldsymbol{v}$ 是质点的绝对速度.对时间求导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}\times(m\boldsymbol{v})+\boldsymbol{r}\times(m\dot{\boldsymbol{v}})$$

由

$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0,m\dot{\boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{a}=\sum\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{r}\times(m\boldsymbol{a})=\boldsymbol{r}\times(\sum\boldsymbol{F})=\sum\boldsymbol{M}_O$,得到$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{M}_O$.

将方程(6)作如下积分:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\boldsymbol{M}_O\mathrm{d}t=\int_{\boldsymbol{H}_1}^{\boldsymbol{H}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O=\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{r}\times(m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1)\tag{7}$$

(7)式的左边积分是作用时间间隔为 t_1 到 t_2 的角冲量,右边是在相同时间间隔角动量的改变量.

方程(6)对质点系也适用.在 n 个质点的质系中,作用的外力关于对 O 点之矩的矢量和等于质系关于对O 点的动量矩$\boldsymbol{H}_O$ 对时间的改变率,其中 O 点一定满足:(a)O 点是固定点,或者(b)O 点是质心且静止,或者(c)O 点与质心速度平行(当然 O 点通过质心也一定是对的).参见例题 18.1,它证明了关于质点系方程(6)成立.

18.4　相对动量矩

相对动量矩 $\boldsymbol{H}'_O$ 是质点的质量与质点关于O 点的位置矢量对时间的变化率的乘积关于对O 点之矩(见图 18-2):

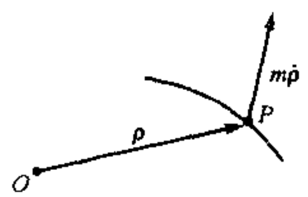


图 18-2

$$\boldsymbol{H}'_O=\boldsymbol{\rho}\times(m\dot{\boldsymbol{\rho}})\tag{8}$$

其中,　$\boldsymbol{\rho}$ 是质点P 关于对O 点的位置矢量;

$\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 是$\boldsymbol{\rho}$ 对时间的变化率.

作用在由 n 个质点的质心上的外力关于对O 点之矩的矢量和等于其关于对O 点的相对动量矩对时间的变化率,即

$$\sum\boldsymbol{M}_O=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_O}{\mathrm{d}t}\tag{9}$$

其中O 点一定要满足(a)O 点是质心,或(b)O 点的速度是常量(或静止),或(c)O 点的加速度过质心.参见例题 18.2 和 18.3.

18.5　相应的代数方程组

对于作平动的刚体(所有质点有相同的速度),方程(3)可写成代数方程组

$$\sum(\mathrm{Im\ p})_x=\Delta G_x=m(v''_x-v'_x)\tag{10}$$

$$\sum(\mathrm{Im\ p})_y=\Delta G_y=m(v''_y-v'_y)\tag{11}$$

其中,　$\sum(\mathrm{Im\ p})_x,\sum(\mathrm{Im\ p})_y$ 是外力的冲量沿 x 和 y 方向的分量;

m 是物体的质量;

v''_x,v''_y 是物体的末速度沿 x 和 y 方向的分量;

v'_x,v'_y 是物体的初速度沿 x 和 y 方向的分量;

对于绕固定轴转动的物体,上面方程可写为

$$\sum(\mathrm{Ang\ Imp})_O=\Delta H_O=I_O(\omega''-\omega')\tag{12}$$

其中,　$\sum(\mathrm{Ang\ Imp})_O$ 是外力关于对过O 点的转轴的角冲量;

I_O 是物体关于对转轴的转动惯量;

ω''物体的末角速度;

ω'物体的初速度.

证明请参见题 18.4.

对于平面运动刚体,上面方程可写为

$$\sum(\text{Imp})_x = \Delta G_x = m(\bar{v}''_x - \bar{v}'_x) \tag{13}$$

$$\sum(\text{Imp})_y = \Delta G_y = m(\bar{v}''_y - \bar{u}'_y) \tag{14}$$

$$\sum(\text{Ang Imp})_G = \Delta\bar{H} = \bar{I}(\omega'' - \omega') \tag{15}$$

其中, $\sum(\text{Imp})_x$, $\sum(\text{Imp})_y$ 是外力的冲量沿 x 和 y 方向的分量;

m 是物体的质量;

$\bar{v}''_x$, $\bar{v}''_y$ 是物体质心的末速度沿 x 和 y 方向的分量;

$\bar{v}'_x$, $\bar{v}'_y$ 是物体质心的初速度沿 x 和 y 方向的分量;

$\sum(\text{Ang Imp})_G$ 是外力关于对过质心轴的角冲量;

$\bar{I}$ 是物体关于对质心 G 轴的转动惯量;

ω'' 物体的末角速度;

ω' 物体的初角速度.

证明请参见题 18.5.

另外,对于刚体的一般平面运动情况,如果角动量的轴不是质心轴,则角动量的代数值为

$$H_O = I_O\omega + m\bar{x}v_{Oy} - m\bar{y}v_{Ox}$$

其中, H_O 是过 O 点轴的角动量;

I_O 是过 O 点的转动惯量;

ω 是物体的角速度;

m 是物体的质量;

$\bar{x}$, $\bar{y}$ 是质心的坐标;

v_{Ox}, v_{Oy} 是 O 点的速度分量.

关于此角动量的公式适用于专门的偏心碰撞的问题.

18.6 单位

单位名称	工程单位	国际单位
质量	slug = lb-s²/ft	kg
线冲量	lb-s	N·s
线动量	slug-ft/s = lb-s	kg·m/s = N·s
角冲量	lb-s-ft	N·m·s
角动量	(slug-ft²)(rad/s) = lb-s-ft	(kg·m²)(rad/s) = N·m·s

18.7 线动量守恒

如果外力沿某方向的代数和为零,则线动量在该方向上守恒.即,在某个方向上没有线冲量,则就没有线动量的变化.

18.8 角动量守恒

如果外力关于某轴之矩的代数和为零,则关于对相同轴的角动量守恒.也即,关于某轴没有角冲量,则也没有角动量的变化.

18.9 碰撞

在碰撞情况中,外力作用的时间间隔非常小,通常是不可确定的.两个物体的碰撞接触面有一个公法线,即为碰撞线.

(a) 如果两碰撞物体的初速度沿碰撞线,则为正碰撞.

(b) 在(a)情况下,如果质心也在碰撞线上,则为对心正碰撞.

(c) 如果初速度与碰撞面的法向平行,但不重合,则为偏心碰撞.

(d) 如果初速度不沿碰撞线,则为斜碰撞.

在两物体的对心正碰撞中,恢复系数是两物体的相对分离速度与其相对追赶速度的比.即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = -\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}$$

其中,　e 是恢复系数;

u_1, u_2 分别是物体 1 和 2 的碰前速度(物体沿同一方向运动,若 $u_1 > u_2$,发生碰撞);

v_1, v_2 分别是物体 1 和 2 的碰后速度.

注意,当斜碰撞时,速度的法向分量的关系可应用上式.

两物体的相互碰撞力相等(大小相等,方向相反),碰前的动量之和等于碰撞之后的动量之和,即动量守恒.这关系可表示为

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

18.10 变质量

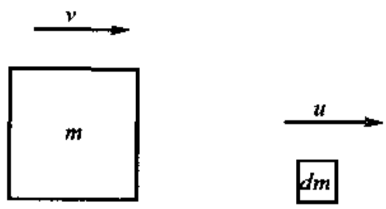


图 18-3

设在某瞬时 t,质量 m 沿直线运动的绝对速度为 v(见图 18-3),同一瞬时质量 m 之前有质量 $\mathrm{d}m$ 也沿同一直线运动,绝对速度为 u.在 $\mathrm{d}t$ 时间间隔中,质量 m 与 $\mathrm{d}m$ 相互吸引,成为 $(m + \mathrm{d}m)$,并有共同的运动速度 $(v + \mathrm{d}v)$.

在时刻 t 时,系统的动量是 $(mv + \mathrm{d}mu)$,在 $(t + \mathrm{d}t)$ 时刻,动量是 $(m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v)$,则动量的变化为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G &= (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) - (mv + \mathrm{d}mu) \\ &= mv + m\mathrm{d}v + \mathrm{d}mv + \mathrm{d}m\mathrm{d}v - mv - \mathrm{d}mu \end{aligned}$$

由于 $(\mathrm{d}m\ \mathrm{d}v)$ 为二次微量,可略去,并用 $\mathrm{d}t$ 去除上式,得

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v - u)$$

如果质量释放(减少),则 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 是负的.

以上公式,虽然是从直线运动推证出的,但它可适用于更一般的情况.

作用力的和等于动量对时间的变化率,

$$\sum F = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v - u) \tag{16}$$

例　题

18.1 已知质系中 n 个质点的质量为 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$,证明外力关于对 O 点之矩的矢量和等于质系关于对 O 点的动量矩对时间的变化率,其中 O 点一定满足(a) O 点是固定点,或(b) O 点是质心且(c) O 点速度与质心的速度平行(O 点只能是质心).

解 ☞ 如图 18-4 所示,第 i 个质点的质量是 m_i,已知点 O 相对惯性坐标系原点 O' 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$;P 点的位置矢量是 r_P.令 $\boldsymbol{H}_O$ 为质点关于 O 点的角动量.即

$$\boldsymbol{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) \tag{a}$$

将方程(a)对时间求导数

$$\dot{\boldsymbol{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\rho}_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i) \tag{b}$$

由图中看出，$r_P = r_O + \rho_i$，因此 $\dot r_P = \dot r_O + \dot\rho_i$. 将 $\dot\rho_i$ 的表达式代入(b)中

$$\dot H_O = \sum_{i=1}^{n}(\dot r_P - \dot r_O)\times(m_i v_i) + \sum_{i=1}^{n}\rho_i\times(m_i v_i) \tag{c}$$

将(c)式右边的第一项展开为

$$\sum_{i=1}^{n}\dot r_P\times(m_i v_i) - \sum_{i=1}^{n}\dot r_O\times(m_i v_i) \tag{d}$$

由于 $\dot r_P$ 是 P 点的绝对速度 v_i，所以(d)式中的第一项是零. 又由于 $\dot r_O$ 不依赖于 i，即不是求和号的变量，因此(d)式中的第二项可写成

$$\dot r_O\times\sum_{i=1}^{n}(m_i v_i) \quad 或 \quad \dot r_O\times(m\bar v)$$

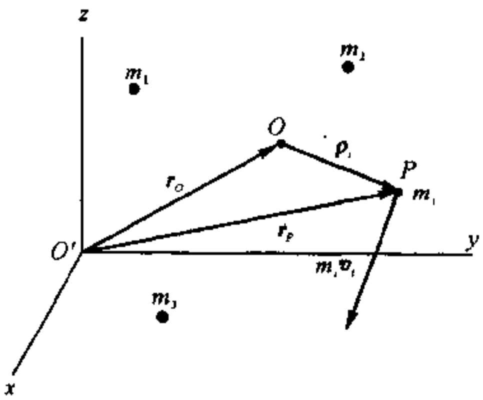


图 18-4

其中 $\bar v$ 是质心的速度.

方程(c)中的最后一项等于 $\sum M_O$，即作用于质系上外力矩的矢量和. 因此，(c)式可写成

$$\dot H_O = -\dot r_O\times(m\bar v + \sum M_O) \tag{e}$$

方程(e)表明，若质系关于对 O 点的动量矩相对于时间的变化率等于 $\sum M_O$，则必需有 $-\dot r_O\times(m\bar v) = 0$，因此需要满足必要的条件是(1)$O$ 点是固定点，即 $\dot r_O = 0$；(2) $\bar v = 0$，或(3)$\dot r$ 和 $\bar v$ 相互平行，(平行矢量叉乘为零)，又如果 O 是质心，则 $\dot r_O = v$，即 $\dot r_O\times m\bar v = 0$.

18.2 已知质系中 n 个质点的质量为 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$，证明外力关于对 O 点之矩的矢量和等于质系关于对 O 点的相对动量矩对时间的变化率，但必须满足(a)O 点是质心；或(b)O 点的速度是常量(或静止)；或(c)O 点的加速度过质心.

解 ☞ 如图18-5所示，第 i 个质点的质量是 m_i，已知点 O 相对于惯性坐标的固定原点 O' 的位置矢量是 r_O；P 点的矢量是 r_P. 令 H'_O 是质系关于 O 点的相对角动量. 由方程(8)得

$$H'_O = \sum_{i=1}^{n}\rho_i\times(m\dot\rho_i) \tag{a}$$

将(a)式对时间求导数

$$\dot H'_O = \sum_{i=1}^{n}\dot\rho_i\times(m_i\dot\rho_i) + \sum_{i=1}^{n}\rho_i\times(m\ddot\rho_i) \tag{b}$$

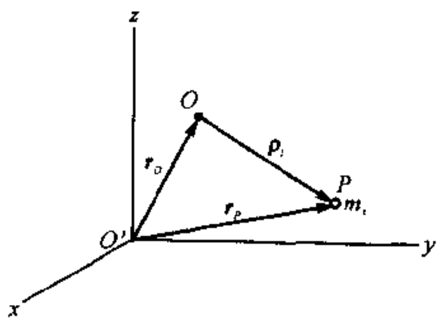


图 18-5

由图看出，$r_P = r_O + \rho_i$，因此 $\ddot r_P = \ddot r_O + \ddot\rho_i$. 将 $\ddot\rho_i$ 代入(b)式中，并注意到(b)式右边的第一项为零($\dot\rho_i\times\dot\rho_i = 0$)，得到

$$\dot H'_O = \sum_{i=1}^{n}\rho_i\times(m\ddot r_P) - \sum_{i=1}^{n}\rho_i\times(m\ddot r_O) \tag{c}$$

(c)式中最后一项可写为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\rho_i\right)\times\ddot r_O$$

因在上式对 n 个质点求和时，$\ddot r_O$ 不变，因此有

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i\times(m_i\ddot r_P) = \sum M_O \quad 和 \quad \sum_{i=1}^{n}m_i\rho_i = m\bar\rho$$

其中 $\bar\rho$ 是质心关于 O 点的位置矢量，则

$$\dot H'_O = \sum M_O - m\bar\rho\times\ddot r_O \tag{d}$$

若(d)式中最后一项为零，且仅当(1)O 点是质心($\bar\rho = 0$)；(2)O 点的速度是常量($\ddot r = 0$)；或(3)O 点的加速度过质心，即沿着 $\bar\rho$ (平行矢量叉乘等于零).

18.3 4个相等质量 m，分别放置在半径为 R 的无质量薄圆环的四分之一的点上. 证明用绝对速度表示的关于对质心 O 的动量矩等于用相对速度表示的关于对质心 O 的相对动量矩.

解 ☞ 令 v 为圆环向右滚动时，质心的速度.

如图 18-6(a)所示，质量 m_2 和 m_4 在圆环的铅垂线上．如图 18-6(b)所示，线动量 $\boldsymbol{G}$ 由每个质点的绝对速度表示．即 $v_1=\sqrt{2}v$，与 x 轴正向夹角 315°；$v_3=\sqrt{2}v$，45°角；$v_2=2v$；$v_4=0$，在瞬心上．

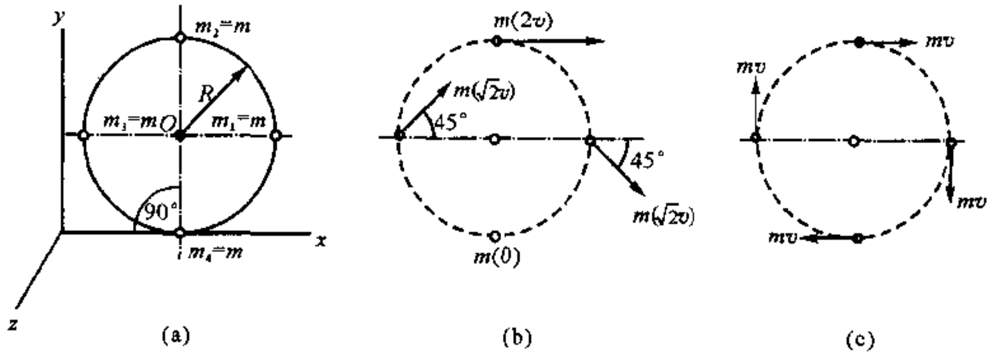


图 18-6

动量矩沿 z 轴负向，由 1，2，3 和 4 点求和，得到

$$\boldsymbol{H}_O=-\left[(m_1\sqrt{2}v)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}R\right)+m_2(2v)R+m_3(\sqrt{2}v)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}R\right)+0\right]\boldsymbol{k}=-(4mvR)\boldsymbol{k}$$

图 18-6(c)表示的是用每个质点相对于质心的速度与质量乘积表示的关于 O 点的相对动量矩．

$$\boldsymbol{H}_O=-4(mvR)\boldsymbol{k}\qquad(\text{同上})$$

18.4 物体绕过 O 点且垂直于纸面的固定轴转动，证明外力的冲量关于对固定轴之矩求和等于角动量 $I_O\boldsymbol{\omega}$ 的变化量．其中 $I_O\boldsymbol{\omega}$ 是整个物体的角动量 $\boldsymbol{H}_O$．

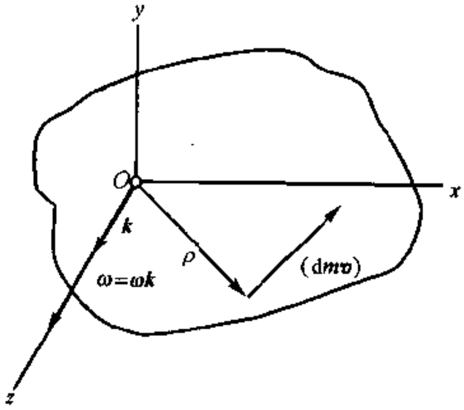


图 18-7

解 ☞ 在图 18-7 所示的纸平面中，取微元质量 $\mathrm{d}m$ 及位置矢量 $\boldsymbol{\rho}$，则 $\mathrm{d}m$ 的角动量是 $\boldsymbol{\rho}\times(\mathrm{d}m\,\boldsymbol{v})$．整个物体的角动量是

$$\boldsymbol{H}_O=\int\boldsymbol{\rho}\times(\mathrm{d}m\boldsymbol{v})$$

在纸平面中，矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\rho}$ 成直角，所以矢量 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ 的大小为 $\rho\omega$，而矢量 $\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})$ 大小为 $\rho^2\omega$，其方向垂直纸面向外．有

$$\boldsymbol{H}_O=\int\rho^2\omega\mathrm{d}m\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 是垂直于纸面，并指向读者方向的单位矢量．

由于 ω 和 $\boldsymbol{k}$ 不随 $\mathrm{d}m$ 而变化，因此可提到积分号外面．且 $\int\rho^2\mathrm{d}m=I_O$．因而，

$$\boldsymbol{H}_O=I_O\omega\boldsymbol{k}$$

然后，利用方程(6)，得到

$$\sum\boldsymbol{M}_O=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(I_O\omega)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

由于力矩与 $\boldsymbol{\omega}$ 都沿 $\boldsymbol{k}$ 方向，所以方程可写为代数式

$$\int\left(\sum M_O\mathrm{d}t\right)=\Delta H_O=I_O(\omega''-\omega')$$

其中 ω' 和 ω'' 分别表示物体的初、末角速度，并且有 $\int\left(\sum M_O\mathrm{d}t\right)=\sum(\mathrm{Ang\ Im\ p})_O$．

18.5 对于质量为 m 的平面运动的刚体(设纸平面即为运动平面)，证明方程(13)(14)和(15)是正确的．见图 18-8．

解 ☞ 由于刚体是内部任意两点距离始终不变的质点系，因此，可应用方程(4)．即

$$\sum\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}(m\,\bar{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}\quad\text{或}\quad\int_{t_1}^{t_2}\sum\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\Delta\bar{\boldsymbol{G}}=m\bar{\boldsymbol{v}}_2-m\bar{\boldsymbol{v}}_1$$

该矢量方程与代数方程(13)(14)等效

$$\sum(\text{Im p})_x = m(v''_x - v'_x) \quad (13)$$

$$\sum(\text{Im p})_y = m(v''_y - v'_y) \quad (14)$$

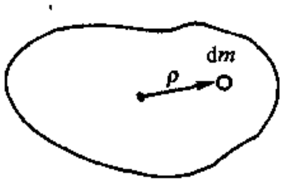


图 18-8

利用方程(9)写出方程(15). 如例 18.2, 选择质心为矩心, 可应用方程(9), 即 $\boldsymbol{H}'_O$ 变成 $\overline{\boldsymbol{H}}'$, 则刚体关于对质心的相对动量矩为

$$\overline{\boldsymbol{H}}' = \int \boldsymbol{\rho} \times (\mathrm{d}m\, \dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}})$$

由于刚体的原因, 矢量 $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ (微元 dm 到质心的距离)大小不改变, 只有方向改变. 因此, $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 垂直于 $\boldsymbol{\rho}$(在纸面中), 并且大小为 $\rho\omega$. 则矢量 $\boldsymbol{\rho}\times(\mathrm{d}m\dot{\boldsymbol{\rho}})$ 垂直于纸面, 大小为 $\rho^2\omega$, 矢量方程可用代数方程表示为

$$\overline{H}' = \omega\int\rho^2\mathrm{d}m = \bar{I}\omega$$

并且方程(9)成为

$$\sum M_G = \dot{\overline{H}}' = \frac{\mathrm{d}(\bar{I}\omega)}{\mathrm{d}t}$$

最后得表达式为方程(15)

$$(\text{Ang Imp})_G = \int\sum M_G\mathrm{d}t = \Delta\overline{H} = \bar{I}(\omega'' - \omega') \quad (15)$$

18.6 质量为 m 的薄圆环, 半径 R, 沿水平面只滚不滑, 如图 18-9(a)所示. 水平力 P 作用在环顶端. 证明外力关于对质心 G 的力矩之和等于关于对 G 的相对动量矩对时间的变化率的表达式与外力关于对速率瞬心 A 的力矩之和等于关于对 A 的相对动量矩对时间的变化率的表达式相等.

解 ☞ 图 18-9(a)中的隔离体图, 画出了法向力 N, 摩擦力 F, 和主动作用力 P, 重力 mg(画在质心 G).

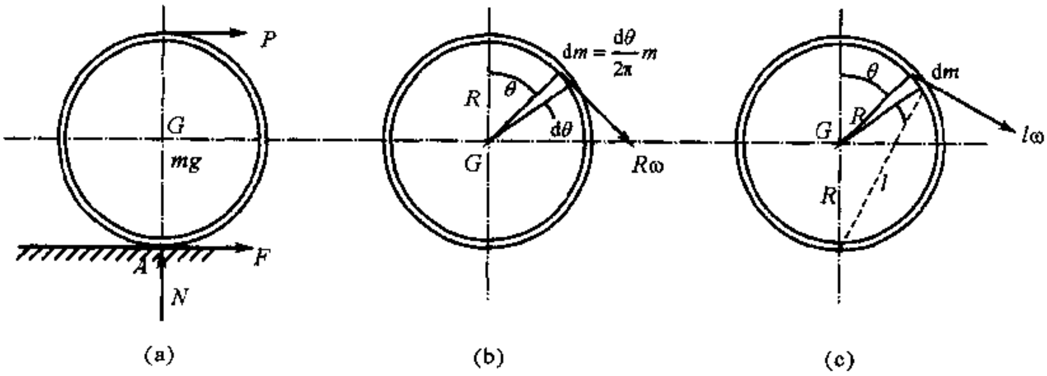


图 18-9

在此题的讨论中, 使用代数方程.

(a) 图 18-9(b)所示, 环的微元 dm 与铅垂线夹角 θ, dm 质量对应的角度为 dθ, 因面, $\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\cdot m$ 相对于质心 G 的速度为 $R\omega$, 如图所示. dm 对 G 的相对动量矩是 $\mathrm{d}m\cdot R^2\omega$. 则全环相对动量矩为

$$H'_G = \int_0^{2\pi} mR^2\omega\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = mR^2\omega$$

外力对 G 点之矩求和(以顺时针为正)是

$$\sum M_G = PR - FR$$

对于做任意运动的质系(本题环的质心速度 $v = r\omega$), 有

$$\sum F_x = \dot{G}_x \qquad \text{即} \qquad P + F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mR\omega)$$

由此得

$$F = -P + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mR\omega)$$

由方程 $\sum M_G = \dot{H}'_G$ 得到

$$PR \quad \left[-P + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mR\omega)\right]R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mR^2\omega)$$

所以

$$2PR = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2mR^2\omega)$$

(b) 使用瞬心 A 作为矩心，令 l 为 $\mathrm{d}m$ 质点到瞬心 A 的距离，如图 18-9(c)所示，$\mathrm{d}m$ 相对于 A(静止)的速度是 $l\omega$，并垂直于 l，如图示．l 的长是

$$l = \sqrt{R^2 + R^2 + 2RR\cos\theta}$$

$\mathrm{d}m$ 对 A 的相对动量矩为 $\mathrm{d}m(2R^2 + 2R^2\cos\theta)\omega$．由 $\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$，得

$$H'_A = \int_0^{2\pi} mR^2\omega(2 + 2\cos\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = 2mR^2\omega$$

外力对 A 点取矩之和是：

$$\sum M_A = 2PR = \dot{H}'_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2mR^2\omega)$$

这与(a)部分所得结果相同．

注意，由于 $2mR^2$ 是薄圆环关于对瞬心的转动惯量 I_A，则上面方程可写为

$$\sum M_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_A\omega) = I_A\alpha$$

18.7 如果质系的质心静止，则方程(6)可适用，并且还可用于对任意点 O 的问题．设质量均为 m 的两个质点，位于半径为 R 的无重圆环上，证明 $\sum M_O = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)(2mR^2\omega)$．见图18-10.

解 ☞ 轴承反力是 F，方向向左和 $2mg$ 向上．力对点 O 之矩求和为 $\Sigma M_O = FR$，与矩心 O 的选择无关．有

$$\begin{aligned} H_O &= m(R\omega\cos\theta)(x_O + R\cos\theta) + m(R\omega\sin\theta)(y_O + R\sin\theta) \\ &\quad - m(R\omega\cos\theta)(x_O - R\cos\theta) - m(R\omega\sin\theta)(y_O - R\sin\theta) \\ &= 2mR^2\omega \end{aligned}$$

即，$FR = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2mR^2\omega)$，可以证明，此式与关于对质心 G 为矩心的方程所得结果相同．

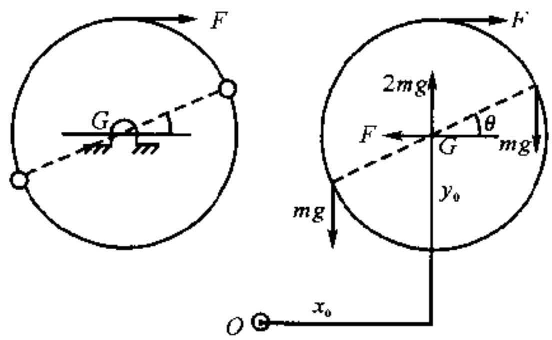


图 18-10

18.8 重 100 lb 的物体，受水平拉力并沿水平面运动，设摩擦系数是 0.2．在作用了 5 s 的时间间隔中，物体的速度由 5 变到 10 ft/s，求力 F 的值．

解 ☞ 法向反力等于重力 100 lb．摩擦力与运动方向相反等于 $0.2\times100 = 20$ lb．水平方向的线冲量等于线动量的改变量．即

$$\int_0^5 (F - 20)\mathrm{d}t = \frac{100}{g}(10) - \frac{100}{g}(5)$$

解出　$F = 23.1$ lb.

18.9 10 kg 质量的物块，由静止开始，沿与水平面夹 30°角的斜面向下运动．设物块与平面间

的动摩擦系数为 0.3，求物块在在 5 s 后的速度是多大？

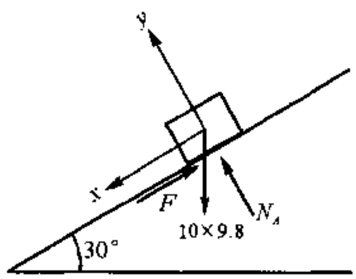


图 18-11

解 ☞ 本题可用上题的方法求解，但由于时间是已知量，应用动量定理更简单．这是一个平行移动的例子．

画隔离体图，将作用在物块上所有外力画上（见图 18-11）．由于运动只沿斜面方向，因此，应用一个方向的动量定理即可．

由

$$\sum(\text{Im p})_x = \Delta G_x$$

或 $$(\sum F_x)(t) = m(v''_x - v'_x)$$

其中 t 为作用时间；m 是物块质量；v''_x 末速度；v'_x 初速度．设运动向下为正，方程为

$$(+98\sin30° - \mu N_A)(5) = 10(v''_x - 0) \tag{A}$$

为了求解 N_A，必须应用力沿斜面垂直方向求和等于零的方程，因为在 y 方向没有运动：

$$\sum F_y = 0 = N_A - 98\cos30° \quad 得 \quad N_A = 84.9\ \text{N}$$

将 N_A 代入方程（A）中，解得 $v''_x = 11.8$ m/s.

18.10 重 80 lb 的物块，静止放在水平面上．一水平变力 $F = 20t$ 作用在物块上，求作用 5 s 后，物块的速度是多大？设静摩擦系数是 0.25，动摩擦系数是 0.20．

解 ☞ 力 F 逐渐增大，其静摩擦力达到极限值，即 $F = 20t = 0.25\times80$，则 $t = 1$ s，在 $t = 1$ s之后物块开始运动，其动摩擦力等于 $0.2\times80 = 16$ lb，是常量．

在 $t = 1$ s 以后，水平线冲量等于水平线动量的改变量．即

$$\sum(\text{Im p})_x = \Delta G_x \quad 或 \quad \int_1^5 F\text{d}t - \int_1^5 16\text{d}t = \frac{80}{32.2}(v - 0)$$

由 $F = 20t$，得 $v = 70.8$ ft/s.

18.11 质量为 1.5 kg 的物块，在水平变力 $F = 3t - 5t^2$ 的作用下，沿光滑水平面从静止开始运动．求速度的最大值．

解 ☞ $\sum(\text{Imp})_x = \Delta G_x$ 或 $\int_0^t F\text{d}t = \int_0^t(3t - 5t^2)\text{d}t = 1.5(v - 0)$ 得到 $v = t^2 - 1.11t^3$．再由 $\frac{\text{d}v}{\text{d}t} = 2t - 3.33t^2 = 0$，解出 t，则 t 时刻对应的速度，即为最大值．因此，得到 $t = 0.6$ s，则极值为 $v = 0.12$ m/s.

18.12 如图 18-12 所示，40 kg 质量的物块具有向上的初速度 2.5 m/s．求 P 为多大的常力，才能使其在 12 s 内将速度提高到向上 5 m/s？设滑轮不计摩擦，另物块与水平面间的摩擦系数是 0.10．

解 ☞ 将系统的冲量和动量的改变量沿轨迹方向求和，可解出此题．如，力 P 和 10 kg 质量块的重力分别沿自身运动轨迹是正冲量，而摩擦力则是负冲量．10 kg 与 15 kg 的质量块间各自受到绳子张力的方向相反，因此线冲量为零．依照此方法，动量方程可写为

$$\sum(\text{Imp}) = \Delta G$$

$$[P + 9.8\times10\sin45° - 0.10(9.8\times10\cos45°) - 0.10(9.8\times15) - 9.8\times40](12)\text{N}\cdot\text{s}$$
$$= (10 + 15 + 40)(5 - 2.5)\ \text{N}\cdot\text{s}$$

由此解出，$P = 358$ N.

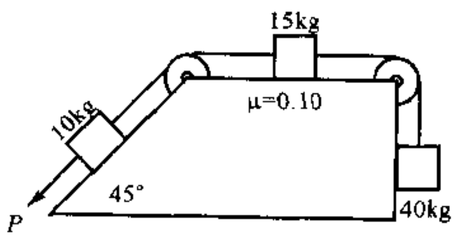


图 18-12

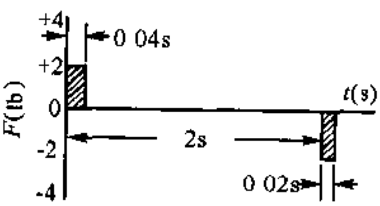


图 18-13

18.13 4 lb 重的重物静止在光滑水平面上.用 2 lb 力敲击重物 0.04 s,从开始第一次敲击后的 2 s,又以 −2 lb 的力敲击第二次,时间是 0.02 s.求重物 3 s 后的速度是多大?

解 ☞ 本题中的力与时间的关系如图 18-13 所示.线冲量是时间长度 2.02 s 下的两个面积的代数和,即 $+2(0.04)-2(0.02)=0.04$ lb-s.则有

$$\sum \text{Imp} = \Delta G,\quad 0.04 = \left(\frac{4}{32.2}\right)(v-0)$$

得　$v=0.322$ ft/s.

18.14 图 18-14 中,压力计的左边的水银柱以 1 in/s 的速率下降.左边水银柱高 18 in,右边高 22 in.求水银的铅直方向的动量是多大?压力计由(1/4)in 的玻璃管制造(内直径).水银比重 850 lb/ft^3.

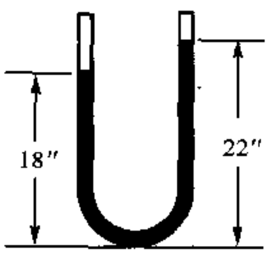


图 18-14

解 ☞ 略去管子的弯曲,很明显,左边水银柱向下运动,而右边水银柱向上运动.则实际上动量是由长 4 in,直径 $\frac{1}{4}$ in 体积中的以 $\frac{1}{12}$ ft/s运动的水银产生.

$$\text{动量} = \left[\frac{(1/4)\pi(1/4)^2 4}{(12)^3}\text{ft}^3\right]\left(\frac{850}{32.2}\text{slug/ft}^3\right)\left(\frac{1}{12}\text{ft/s}\right) = +0.00025 \text{ lb-s}$$

18.15 飞轮质量 2000 kg,回转半径 1200 mm,绕固定中心 O 转动.在 200 s 内角速度从零变到 120 rpm,则受到的力矩 M 是多大?

解 ☞

$$\sum(\text{Ang Imp})_O = \Delta H_O = I_O(\omega_2-\omega_1)$$

$$M(200\text{ s}) = [2000(1.2)^2\text{ kg}\cdot\text{m}^2][240\pi/60-0)\text{ rad/s}]$$

得　$M=181$ N·m.

18.16 单摆是由质量 m 的摆锤和轻质细杆组成.见图 18-15.证明其运动微分方程是 $\ddot{\theta}+(g/L)\sin\theta=0$.

解 ☞ 由隔离体图所示,单摆相对于垂直线的角位移为 θ.摆锤相对于支撑点角动量 $\boldsymbol{H}_O=I\dot{\theta}\boldsymbol{k}$,其中 $\boldsymbol{k}$ 是垂直于纸面的单位矢量,箭头指向读者.

只有摆锤的重力有力矩,转向为顺时针设为负.则

$$\sum \boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t},\quad -mg(L\sin\theta)\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\dot{\theta}\boldsymbol{k})$$

由于摆锤的 $I=mL^2$,得代数方程 $\ddot{\theta}+(g/L)\sin\theta=0$.

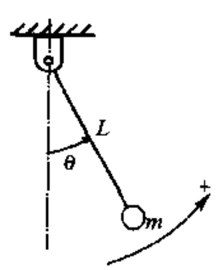


图 18-15

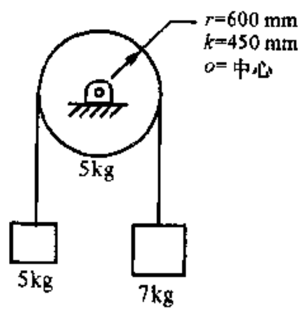


图 18-16

18.17 图 18-16 中,一轻绳系住两个质量分别为 5 kg 和 7 kg 的质量块,并吊在滑轮上.滑轮质量为 5 kg,半径为 600 mm,回转半径是 450 mm.试求需用多长时间,质量块的速度可由 3 m/s 变到 6 m/s^2?

解　☞ (A)令 T_1 和 T_2 分别表示作用在 5 kg 和 7 kg 质量块上的绳中张力.

使用如下的动量定理的方程,其中方程(1)对应与 5 kg 质量块,方程(2)对应 7 kg 的质量块;方程(3)对应滑轮的运动:

$$(T_1 - 5\times 9.8)t = 5(6-3) \tag{1}$$

$$(7\times 9.8 - T_2)t = 7(6-3) \tag{2}$$

$$(T_2 - T_1)(0.6)t = \bar{I}(\omega_{末} - \omega_{初}) \tag{3}$$

将 $\bar{I} = mk^2 = 5(0.45)^2 = 1.01\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $\omega_{末} = \dfrac{6}{0.6} = 10$ rad/s 和 $\omega_{初} = \dfrac{3}{0.6} = 5$ rad/s,代入方程(3)中,联立求解方程(1)(2)和(3),得到 $t = 2.27$ s.

解　☞ (B)研究整体,以滑轮中心为矩心.应认识到,吊挂质量的线动量关于对滑轮中心取矩即为此质量的角动量.则有

$$(初角动量)_O + (角冲量)_O = (末角动量)_O \tag{4}$$

由于绳中的张力都是成对出现,因此相互抵消,在方程中没有此力的角速度冲量出现.只有两个吊挂质量的重力对 O 点有角冲量.方程写为

$$\begin{aligned}&(I_O\omega_{初} + 5v_{初}\times 0.6 + 7v_{初}\times 0.6) + (7\times 9.8t - 5\times 9.8t)0.6\\ &= (I_O\omega_{末} + 5v_{末}\times 0.6 + 7v_{末}\times 0.6)\end{aligned} \tag{5}$$

得

$$\begin{aligned}&(1.01\times 5 + 5\times 3\times 0.6 + 7\times 3\times 0.6) + 11.76t\\ &= 1.01\times 10 + 5\times 6\times 0.6 + 7\times 6\times 0.6\end{aligned} \tag{6}$$

解出,$t = 2.27$ s.

18.18　见图 18-17.要使 50 kg 的质量块 A 的速度在 6 s 钟内从 4 m/s 变到 8 m/s,求 B 的质量应为多大?设鼓轮绕轴承无摩擦地转动.

解　☞ 研究整个系统,注意到系统关于对鼓轮中心 O 的初角动量加上所有外力的角冲量等于末角动量.且 $N_A = 50\times 9.8$, $F = 0.25\times 50\times 9.8 = 123$ N.鼓轮的角速度分别是4/0.8到 8/0.8(5 rad/s 和 10 rad/s).

$$\begin{aligned}&[30(5) + m_B(4)(0.8) + 50(4)(0.8)]\\ &+ [9.8m_B(0.8) - 123\times 0.8]6\\ &= [30(10) + m_B(8)(0.8) + 50(8)(0.8)]\end{aligned}$$

解出　$m_B = 20.5$ kg.

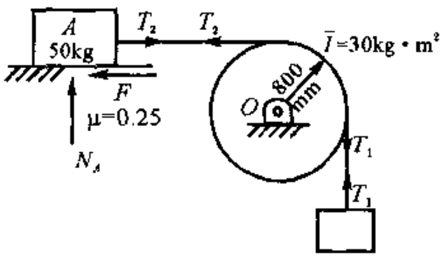


图 18-17

18.19　图 18-18 所示的鼓轮是由两个均质圆柱体固连而成.小圆柱体重 64.4 lb,大圆柱体重 161 lb.问需用多长时间,使鼓轮的速度从 100 变到 300 rpm?

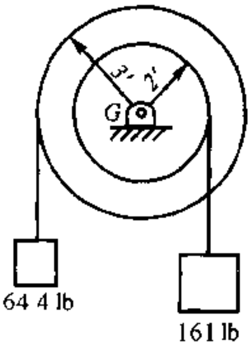


图 18-18

解　☞ 鼓轮的转动惯量等于

$$\frac{1}{2}\left(\frac{500}{g}\right)(3)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{250}{g}\right)(2)^2 = 85.4\ \text{slug-ft}^2$$

161 lb 重力对 G 点的角冲量顺时针,大小为 $2(161)(t) = 322t$ lb-s-ft;64.4 lb 重力的角冲量逆时针,并等于 $-3(64.4)t = -193t$ lb-s-ft.总角冲量为此二值之和,即 $129t$ lb-s-ft.总角冲量作用在系统上关于对 G 的总角动量的改变量.

鼓轮角动量的改变量等于

$$I(\omega_2 - \omega_1) = 85.4\left(300\,\frac{2\pi}{60} - 100\times\frac{2\pi}{60}\right) = 1790\ \text{lb-s-ft}$$

每个重物的线动量乘以各自对转轴的臂,即得到其关于 G 的动量矩(角动量矩).161 lb 重物向下运动,因此线动量关于对 G 的动量矩为顺时针(设为正).则角动量变化量等于

$$2\left[\left(\frac{161}{32.2}\right)\left(2\times\frac{600\pi}{60} - 2\times\frac{200\pi}{60}\right)\right] = 419\ \text{lb-f-ft}$$

同样地,64.4 lb 重物的线动量的变化量向上,因此对 G 点之矩为正(顺时针).其值是

$$3\left[\left(\frac{64.4}{32.2}\right)\left(3\times\frac{600\pi}{60}-3\times\frac{200\pi}{60}\right)\right]=377\ \text{lb-f-ft}$$

总角冲量等于系统的总角动量的改变量,即

$$129t = 1790 + 419 + 377$$

解得 $t = 20.0$ s.

18.20 见图 18-19.圆柱体半径为 r,质量 m,转动惯量 $\bar{I}$(关于质心),沿与水平面成 θ 的斜面由静止向下滚动.求在某时刻 t 的速度是多大?

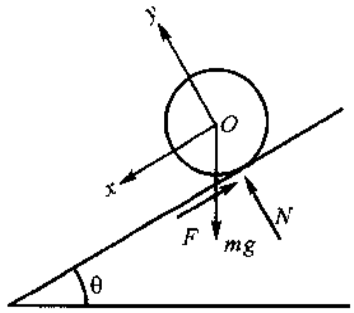


图 18-19

解 ☞ 在圆柱图的隔离体图中,画出了所有的外力.设摩擦力 F 等于摩擦系数乘以法向反力 N.

由于圆柱体做平面运动,因此应用冲量-动量方程为

$$\sum(\text{Im p})_x = \Delta G_x \tag{1}$$

和

$$\sum(\text{Ang Imp})_O = \Delta H_O \tag{2}$$

注意到,只有 F 力对 O 点有矩.方程(1)和(2)变成

$$(mg\sin\theta - F)t = m(\bar{v} - 0) \tag{3}$$

$$Frt = \bar{I}(\omega - 0) \tag{4}$$

在以上的方程中,摩擦力 F 和速度 $\bar{v}$ 是未知的。$\left(\text{由于假设无滑动,则 } \omega = \frac{\bar{v}}{r}\right)$.

由方程(4),$F = (\bar{I}\omega)/(rt)$,再代入方程(3),利用 $\omega = \frac{\bar{v}}{r}$,得

$$\bar{v} = \frac{mg\sin\theta}{m + \bar{I}/r^2}t$$

18.21 重 300 lb 的均质圆柱体,直径为 3 ft,沿 20°的斜面,在 250 lb 的与斜面平行的力作用下滚动.设无滑动,求圆柱体 6 s 后的速度.设初速度为零.见图 18-20.

解 ☞ 画圆柱体的隔离体图.设摩擦力 F 沿斜面向上.由平面运动的冲量-动量方程:

$$\sum(\text{Imp})_{\|} = \Delta G_{\|},\ (250 + F - 300\sin 20^\circ)6 = \frac{300}{g}\bar{v} \tag{1}$$

$$\sum(\text{Ang Imp})_G = \bar{I}\omega,\ \left[250\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right)\right]6 = \frac{1}{2}\left(\frac{300}{g}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\bar{v}}{3/2}\right) \tag{2}$$

得 6 s 后的速度 $\bar{v} = 171$ ft/s,平行于斜面.

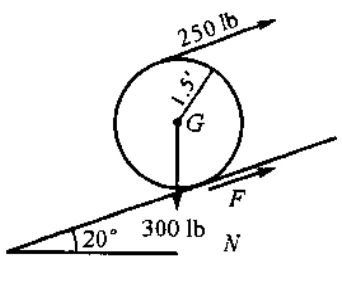


图 18-20

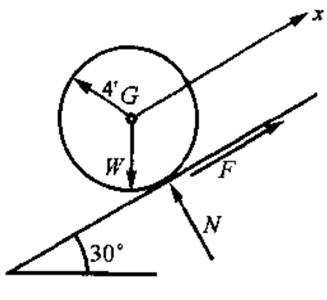


图 18-21

18.22 见图 18-21.均质圆柱体沿 30°斜面向上滚动,其质心的初速度为 20 ft/s.如圆柱体自由滚动到停止,求达到最高点所用的时间有多长?

解 ☞ 圆柱体质心 G 的初速度 $\bar{v} = 20$ ft/s,初角速度 $\omega = 20/4 = 5$ rad/s,末速度为零.在隔离体图中画出了作用在圆柱体上的所有外力.

由平面运动的冲量-动量关系方程:

$$\sum(\text{Imp})_x = \Delta G_x,\quad (F - W\sin 30^\circ)t = \frac{W}{g}(0 - 20) \tag{1}$$

$$\sum(\text{Ang Imp})_G = \Delta H_G,\quad (-4F)t = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(4^2)(0 - 5) \tag{2}$$

解出　$t = 1.86$ s.

也可以使用对瞬心为矩心的方程，由方程得

$$\sum(\text{Ang Imp})_I = \Delta H_I, \quad (-4\sin 30°)Wt = \frac{3}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(4^2)(0-5)$$

也可解出 $t = 1.86$ s.

18.23　在图 18-22 中，75 kg 质量的车轮，关于对 G 的回转半径是 900 mm. 滑轮质量不计并绕无摩擦轴承转动. 车轮滚动的初角速度为 10 rad/s 逆时针. 求需用多长时间，车轮的角速度为 6 rad/s 顺时针转动？

解　☞ 在隔离体图中，假设摩擦力向左作用. 由运动学关系，G 点的初速度是 $v_G = -1.2$ m/s，指向左.

其末速度是 $+1.2(6) = +7.2$ m/s 向右. 为求 30 kg 质量块的速度，先求车轮上 B 点的初速度和末速度. 由 $\bar{v}_B = \bar{v}_{B/G} + \bar{v}_G$，$B$ 点的初速度是 $-0.8\omega - 12 = -0.8(10) - 12 = -20$ m/s. 同样，B 点的末速度是 $+12$ m/s. 因此，30 kg 质量块的初速度是 20 m/s 向上，末速度是 12 m/s 向下.

在方程中，使用了以下的符号约定. 对于车轮，规定右为正和顺时针为正；对于 30 kg 质量块，在方程(3)中，向下为正.

$$\sum(\text{Imp})_h = \Delta G_h, (T - F)t = 75[+7.2 - (-12)] \tag{1}$$

$$\sum(\text{Ang Imp})_G = \Delta H_G, \ (0.8T + 1.2F)t = 75(0.9)^2[+6 - (-10)] \tag{2}$$

$$\sum(\text{Imp})_v = \Delta G_v, \quad (9.8 \times 30 - T)t = 30[+12 - (-20)] \tag{3}$$

解出　$t = 7.86$ s.

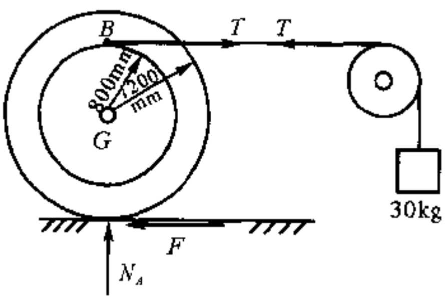


图 18-22

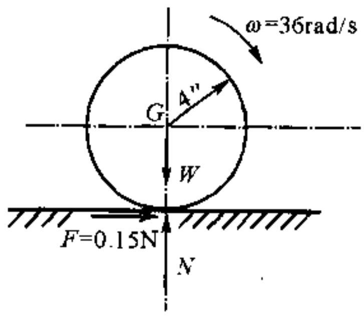


图 18-23

18.24　见图 18-23. 均质圆柱体重 96.6 lb，直径为 8 in，并以 36 rad/s 的角速度绕水平的几何轴顺时针旋转，然后将其突然放在水平面上. 设摩擦系数为 0.15，求圆柱体开始纯滚动时，其质心的速度 $\bar{v}$，并求此瞬时质心已走过的距离是多少？

解　☞ 首先画出圆柱体与水平面接触时的隔离体图. 在圆柱体上画出与纯滚动发生时相同的力系. 由于摩擦力的作用(1)角速度减小，并且(2)质心的速度从零开始增大到 $\bar{v} = r\omega$，即出现纯滚动.

有 $N = W = 96.6$ lb, $F = 0.15\text{ N} = 14.5$ lb, $m = 3$ slugs 和

$$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(3)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}\ \text{slug-ft}^2$$

冲量-动量的关系方程是

$$\sum(\text{Imp})_h = \Delta G_h, Ft = m(\bar{v} - 0) \tag{1}$$

$$\sum(\text{Ang Imp})_G = \Delta H_G, \ -Frt = \bar{I}(\omega - 36) \tag{2}$$

在方程(2)中，设顺时针为正. 方程变为 $14.5t = 3\bar{v}$ 和 $-14.5\left(\frac{1}{3}\right)t = \frac{1}{6}(\omega - 36)$，其中 $\omega = \frac{\bar{v}}{r} = 3\bar{v}$. 解出 $\bar{v} = 4.0$ ft/s, $t = 0.83$ s. 则有 $s = \frac{1}{2}(\bar{v} + 0)t = 1.66$ ft.

18.25　水流的直径为 2 in，并以 80 ft/s 的水平速度冲击铅直平板，如图 18-24 所示. 当水流冲

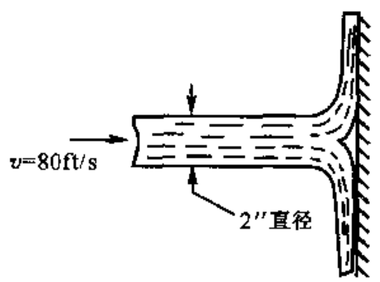


图 18-24

击平板后，水沿平板的平行方向流动．求水流对平板施加了多大的力？

解 ☞ 研究在时间间隔 Δt 流动的所有水质点的质量，则总质量 m 是

$$m = Av(\Delta t)\delta = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{2}{12}\right)^2(80)(\Delta t)\left(\frac{62.4}{32.2}\right)$$
$$= 3.39(\Delta t)\ \text{slugs}$$

其中 A 是水流的截面积，用 ft^2 表示；v 是水流的速度，用 ft/s 表示；δ 是水的密度，用 $slugs/ft^3$ 表示．

令 P 为平面对质量为 m 的水的作用力．则

$$\sum F_x(\Delta t) = \Delta G_x = m(v''_x - v'_x)$$

得

$$P(\Delta t) = 3.39(\Delta t)(0 - 80)$$

从而，解出 $P = -271$ lb．则水作用在板面上的力是 $+271$ lb，即指向右．

18.26 求解 18.25 题，并设平板以 20 ft/s 的速度向右运动．

解 ☞ 仍然研究 Δt 时间内的所有水质点的质量．水相对于板的速度是 $v = (80 - 20) = 60$ ft/s，则 $m = Av(\Delta t)\delta = 2.54(\Delta t)$，由动量定理，沿 x 方向有

$$P(\Delta t) = 2.54(\Delta t)(20 - 80)$$

其中，末速度是板的速度．求出板作用于水的力为 $P = -153$ lb，当然，水对板的作用力是 $+153$ lb 向右．

18.27 水流的截面积是 2000 mm^2，并以 10 m/s 的水平速度冲击固定的弯曲扇叶，如图 18-25 所示．设水的速度相对扇叶是常量(不考虑摩擦)．求扇叶受到的水平和垂直作用力分量．

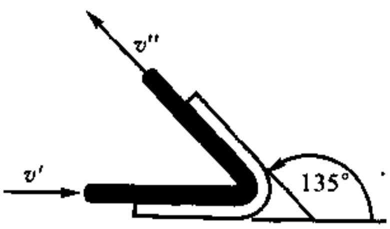


图 18-25

解 ☞ 注意到水的末速度 v'' 与初速度 v' 具有相同的大小即为 v，但方向不同．研究 Δt 时间内的水质量 m，有

$$m = Av(\Delta t)\delta$$
$$= (2000 \times 10^{-6}\text{m}^2)(10\ \text{m/s})(\Delta t)(1000\ \text{kg/m}^3)$$
$$= 20(\Delta t)$$

由动量定理，得 x 和 y 方向的两个方程

$$\Delta F_x(\Delta t) = \Delta G_x = m(v''_x - v'_x), \quad P_x(\Delta t) = (20\Delta t)(-10\cos 45^\circ - 10)$$
$$\Delta F_y(\Delta t) = \Delta G_y = m(v''_y - v'_y), \quad P_y(\Delta t) = (20\Delta t)(+10\sin 45^\circ - 10)$$

其中 P_x 和 P_y 分别扇叶对水的沿 x 和 y 方向的作用力的分量．解出 $P_x = -340$ N(作用在水上指向左)和 $P_y = +140$ N(向上)．

18.28 将重 150 lb 的水桶静放在台秤上，铅直水流以速度 20 ft/s 射入水中．水流的截面积是 0.20 in^2，求一分钟后，台秤的读数是多少？

解 ☞ 水的射流是连续的力 F 作用在水桶底部和台秤上．以任意时刻 t 的水为研究对象，根据冲量-动量方程，得到 $\sum \Delta(\text{Imp})_v = \Delta G_v$，$Ft = m(0 - 20)$，其中 $m = Avt\delta$．则有

$$Ft = \frac{0.20}{144}(20)(t)\left(\frac{62.4}{32.2}\right)(0 - 20) \qquad 得\ F = -1.1\ \text{lb}$$

负号表示力向上(桶作用在水的力)，用以使水停止运动．

当 $t = 60$ s 时，水桶装水为 $(0.20/144)(20)(60)(62.4) = 104$ lb．

即，1 分钟后，秤上读数是 $(1.1 + 104 + 150) = 255$ lb．

18.29 重 130 lb 的人在冰上滑行的船中，从船中开枪，在船尾水平地发射出重 2 oz 的子弹(沿船头到船尾的直线)．如果子弹离枪时的速度是 1200 ft/s，求发射后，船的速度是多大？设无摩擦．

解 ☞ 研究整体，由于作用于子弹上的力等于人、枪和船受到的反作用力，因此外力冲量等于零，

所以整个系统动量仍然为零.即对于整体初动量为零,子弹发射后的动量也为零.设子弹速度是正的,可写成

$$\frac{W_{船}+W_{人}}{g}v+\frac{W_{弹}}{g}1200=0$$

有

$$\frac{150+130}{g}v+\frac{2/16}{g}1200=0$$

解出 $v=-0.54$ ft/s,负号表明人与船沿子弹射出的相反方向运动.

18.30　60 g 重的子弹水平射入 50 kg 重的沙袋中,沙袋用长 900 m 的绳索系住,如图18-26所示.当子弹射入沙袋后,由沙袋的偏转角可计算出,沙袋升高了 30 mm.求子弹进入沙袋前的速度是多大?

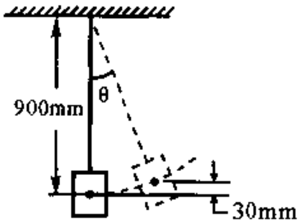


图 18-26

解　☞ 令 v_1 是子弹射入之前的速度,v_2 是子弹射入后沙袋和子弹的速度 $=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.8)(0.03)}=0.767$ m/s.

系统碰前动量 = 碰后动量.

$$(0.06\ \text{kg})v_1+0=(0.06+50)\ \text{kg}\times 0.767\ \text{m/s}$$

解出 $v_1=640$ m/s.

18.31　研究大炮的反冲力.这是线动量守恒的一个例子.

解　☞ 初瞬时大炮静止.当发射炮弹时,大炮对炮弹作用推射力,与此同时,炮弹对大炮又产生一个反推力.因为,在发射过程中,没有外力作用在炮弹与大炮组成的整体上,因此,炮弹向前发射的动量与大炮向后的动量之和等于系统的初动量,即等于零.则有

$$m_p v_p+m_g v_g=0$$

其中,　m_p, m_g 分别表炮弹与大炮的质量;

v_p, v_g 分别表炮弹与大炮在发射后瞬时的速度.

解出反冲速度,$v_g=-(m_p/m_g)v_p$,负号表示大炮与炮弹的运动方向相反.

大炮质量越大,则反冲速度就越小.因此,利用反冲弹簧和其它装置吸收能量,以减少反冲力.当然,为了便于移动,重量的设计是有极限的.

18.32　60 kg 质量的子弹,以 500 m/s 的速度,射中了 5 kg 质量的物块后,一同以 30 m/s 速度,沿相同方向运动.求子弹与物块的合速度 v 是多大?设子弹在物块之中.

解　☞

$$\text{系统碰前动量}=\text{系统碰后动量}$$

$$(0.06\ \text{kg})(500\ \text{m/s})+(5\ \text{kg})(30\ \text{m/s})=(0.06+5)\ \text{kg}\times v$$

$$v=35.6\ \text{m/s}$$

18.33　具有原长为 6 in 的弹簧,压缩了 2 in 之后连接两重物,如图 18-27 所示.如果系统在光滑水平面上静止释放,当弹簧恢复到原长时,求每个重物的速度是多大?弹簧的劲度系数是 12 lb/in.

图 18-27

解　☞ 由于弹簧对两重物的作用力相等,但方向相反,所以由两重物组成的系统总线冲量为零,因此两重物的线冲量是常量,即为零.有 $(2/g)v_2+(3/g)v_3=0$,其中 2 lb 和 3 lb 分别是两重物的重量.由此得出关系式 $v_2=-\left(\frac{3}{2}\right)v_3$,在任何时间下都成立.

还应建立 v_2 与 v_3 的关系的方程.弹簧恢复到原长所做的功(势能)等于两重物的动能改变量.设弹簧由压缩位置伸长 x 距离时的压力 $=12(2-x)$ lb.

因此,总功 $=\int_0^2 12(2-x)dx=24$ in-lb 或 2 ft-lb.末动能与此值相等(初动能为零),$2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{g}\right)v_2^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{g}\right)v_3^2$,联立求解方程,得到 $v_3=4.14$ ft/s(向右)和 $v_2=-6.22$ ft/s(向左).

18.34　如图 18-28 所示,重 10 lb 的遥控块,放在无重的水平转台上,距转台中心 4 ft,转台以

2 rad/s的角速度绕铅直轴转动. 在转轴上作用着与转台转动相反的力偶 $M = 2t$ lb-ft. 求(a)需用多长时间, 转台的速度为 1.5 rad/s 及(b)如果撤掉力偶, 当转台速度返回为 2 rad/s 时, 物块移动多远的距离?

解 ☞ (a) 物块的角动量是其线动量 mv 与半径 r 的乘积. 由角冲量等于角动量的变化量, 并由 $v = r\omega$, 得

$$\int_0^t 2t\,dt = \frac{10}{g}(4 \times 1.5)(4) - \frac{10}{g}(4 \times 2)(4)$$

解出, $t = 1.58$ s.

(b) 求解第二问. 由角动量守恒, 确定物体移动位置的半径 r:

$$\frac{10}{g}(4)(1.5)(4) = \frac{10}{g}(4)(2)r$$

则有 $r = 3.46$ ft, 物体沿径向向中心从半径为 4 ft 移到 3.46 ft 即向中心移动 0.54 ft.

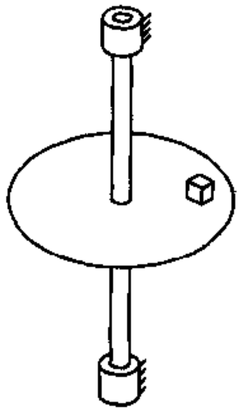


图 18-28

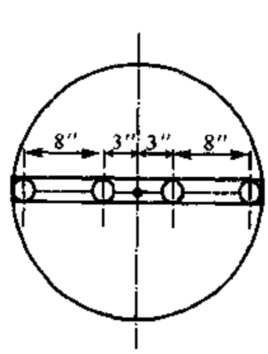


图 18-29

18.35 重量均为 2.5 lb 的两小球, 用一轻绳连接, 如图 18-29 所示. 当绳断开时, 水平平台在无外力矩的情况下, 以 36 rad/s 的角速度转动. 设小球与槽的轨道间无摩擦, 求小球碰到外缘停止时, 系统的角速度. 盘的转动惯量是 0.4 slug-ft^2.

解 ☞ 系统初转动惯量是盘的转动惯量与各距中心 3 ft 的两小球的转动惯量之和, 即

$$I_i = 0.4 + 2\left(\frac{2.5}{32.2}\right)\left(\frac{3}{12}\right)^2 = 0.41 \text{ slug-ft}^2$$

初角动量是 $I_i\omega_i$ 即 0.41(36). 末转动惯量 I_f 是

$$I_f = 0.4 + 2\left(\frac{2.5}{32.2}\right)\left(\frac{11}{12}\right)^2 = 0.531 \text{ slug-ft}^2$$

由于系统无外力矩, 因此角动量守恒, 即

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i,\quad 0.531\omega_f = 0.41(36)\quad 得\ \omega_f = 27.8 \text{ rad/s}$$

18.36 当 v_1 和 v_2 未知时, 求解下列碰撞方程组:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \tag{1}$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \tag{2}$$

其中, e 为恢复系数;

u_1 和 u_2 分别是碰前物体 1 和 2 的速度;

v_1 和 v_2 分别是碰后物体 1 和 2 的速度;

m_1 和 m_2 分别是物体 1 和 2 的质量.

解 ☞ 将方程(1)乘以$(u_1 - u_2)m_1$, 得方程(3)为 $em_1(u_1 - u_2) = m_1v_2 - m_1v_1$. 然后将方程(2)与(3)相加, 得 $m_1u_1 + m_2u_2 + em_1(u_1 - u_2) = (m_2 + m_1)v_2$. 则有

$$v_2=\frac{m_1u_1(1+e)+u_2(m_2-em_1)}{m_2+m_1}$$

同样地
$$v_1=\frac{m_2u_2(1+e)+u_1(m_1-em_2)}{m_2+m_1}$$

18.37　讨论物体的完全弹性碰撞($e=1$).

解　☞ 对于弹性碰撞,将 $e=1$ 代入由题 18.36 得到的 v_1 和 v_2 的方程中:

$$v_1=\frac{2m_2u_2+u_1(m_1-m_2)}{m_2+m_1}\tag{1}$$

$$v_2=\frac{2m_2u_1+u_2(m_2-m_1)}{m_2+m_1}\tag{2}$$

在 $m_1=m_2=m$ 的特殊情况下,方程变为

$$v_1=\frac{2mu_2+0}{m+m}=u_2\tag{1'}$$

$$v_2=\frac{2mu_1+0}{m+m}=u_1\tag{2'}$$

上面方程也用来解释,在光滑表面上运动的硬币与不动的硬币发生碰撞的情况,即运动硬币的末速度等于静止硬币的初速度(本题为零),而不动硬币的末速度等于运动硬币的初速度.换句话说,碰后,运动硬币停止,而不动的硬币获得了它的速度.此情况也适用于按直线排列的一排硬币,可传递速度.

18.38　求非弹性碰撞的情况又如何?

解　☞ 非弹性碰撞是,一个物体与另一物体碰后结合在一起,具有共同的末速度.注意到 $e=0$,并将其代入题 18.36 得到 v_1 和 v_2 的方程中,得

$$v_1=\frac{m_2u_2+m_1u_1}{m_2+m_1},\qquad v_2=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_2+m_1}$$

即 $v_1=v_2$.

18.39　两个相等的台球相碰的速度是 6 ft/s 和 −8 ft/s.求碰后的速度各是多大?设碰撞恢复系数是 0.8.

解　☞ 令球 1 的速度为 6 ft/s,球 2 的速度是 −8 ft/s.两质量相等($m_1=m_2=m$).

由 $u_1=6$ ft/s 和 $u_2=-8$ ft/s,确定 v_1 和 v_2.可由下列方程求解,或应用题 18.36 的结果:

$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2},\quad 0.8=\frac{v_2-v_1}{6-(-8)}\quad 得\ v_2-v_1=11.2\text{ ft/s}\tag{1}$$

$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2,\quad m(+6)+m(-8)=mv_1+mv_2$ 得

$$v_1+v_2=-2\text{ ft/s}\tag{2}$$

由两方程联立解得 $v_1=-6.6$ ft/s 和 $v_2=4.6$ ft/s.

18.40　一球碰到水平地面后弹回高度是 20 m,而再次弹回高度为 14 m.求地面与球之间的恢复系数是多大?

解　☞ 令下标 1 代表球.由于地面碰撞前、后不动,因此地面的初、末速度 u_2 和 v_2 都等于零.

球第二次击地时,从距地面高度为 20 m 下落,则速度 u_1 是

$$u_1=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{m})}=19.8\text{ m/s}$$

同理,可得 v_1.即由上升高度 14 m,得 $v_1=\sqrt{2(9.8)(14)}=16.6$ m/s.

应用下列碰撞方程,并选择向下为正,得

$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=\frac{0-(-16.6)}{19.8-0}=0.84$$

e 的值也可由弹回高度的平方根解出.由于 e 是速度的比值,而速度之比又由高度的平方根决定,即 $e=\sqrt{\frac{14}{20}}=0.84$.

18.41　如图 18.30(a)所示,2 lb 重的球以 12 ft/s 的水平速度击中刚性细杆的底端.杆重 5 lb,顶端铰接.如碰撞恢复系数是 0.7,求碰撞后杆的角速度和球的线速度.

解 ☞ 第一阶段，选碰撞时间从零到 t_1，作用在球与杆间的线冲量，引起球的速度变慢并且与杆底端的点具有相同的速度 u. 这第一阶段情况的隔离体图如图 18-3(b)所示. 增大的力的线冲量引起了球的线动量的改变如方程(1)所示，其中令向右为正：

$$-\int_0^{t_1} F\mathrm{d}t = \Delta G = \frac{2}{g}(u-12) \tag{1}$$

此线冲量对杆的支点 O 的矩又引起了杆角动量的改变如方程(2)，其中令逆时针为正：

$$+\int_0^{t_1} F(6)\mathrm{d}t = \Delta H_O = I_O(\omega - 0) \tag{2}$$

其中 $I_O = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{g}\right)(6^2) = \frac{60}{g}$ slug-ft², $\omega = \frac{u}{6}$ rad/s，将这些值代入方程(2)并用 6 去除，得

$$+\int_0^{t_1} F\mathrm{d}t = \frac{5u}{3g} \tag{3}$$

将方程(1)和(3)相加，得 $u = 6.55$ ft/s. 即在第一阶段的结束时(压缩阶段)，球和杆的底端点具有相同的速度 6.55 ft/s 向右. 则杆的角速度 $\omega = \frac{6.55}{6} - 1.09$ rad/s 逆时针方向.

在此阶段下的线冲量可由方程(1)计算出：

$$\int_0^{t_1} F\mathrm{d}t = -\frac{2}{g}(6.55-12) = \frac{10.9}{g}\ \text{lb-s}$$

此值可与将 $u = 6.55$ ft/s 代入方程(3)后校核.

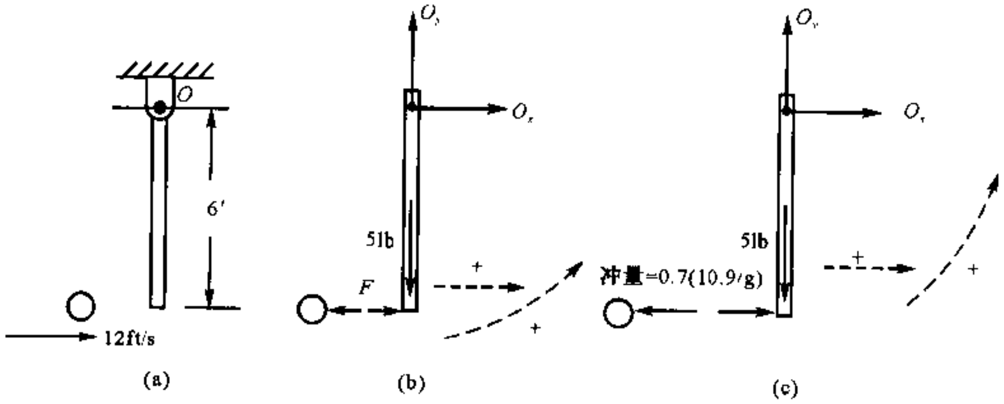


图 18-30

在第二阶段中(恢复阶段)，在压缩阶段，线冲量大小为 0.7，如图 18-30 (c)所示. 将第一阶段末作为第二阶段的始，因此，用 v 表示碰撞后瞬时求的速度用 ω 表示杆的角速度，则球和杆的方程分别为：

$$-0.7\left(\frac{10.9}{g}\right) = \frac{2}{g}(v - 6.55) \tag{4}$$

$$+0.7\left(\frac{10.9}{g}\right)(6) = \frac{60}{g}(\omega' - 1.09) \tag{5}$$

解出 $v = 2.72$ ft/s 向右和 $\omega' = 7.73$ rad/s 逆时针.

18.42 如图 18-31 所示. 9 kg 质量的球以 3 m/s 的速度撞击 5.5 kg 的以 2.5 m/s 速度运动的球. 恢复系数 $e = 0.80$. 求碰后速度 v_1 和 v_2.

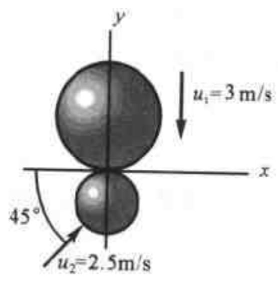


图 18-31

解 ☞ 为求末速度的 y 向分量，选用如下二方程：

$$e = \frac{(v_2)_y - (v_1)_y}{(u_1)_y - (u_2)_y} \quad 和$$

$$m_1(v_1)_y + m_2(v_2)_y = m_1(u_1)_y + m_2(u_2)_y$$

代入条件得

$$0.8 = \frac{(v_2)_y - (v_1)_y}{(-3) - (1.77)} \quad 和$$

$$9(v_1)_y + 5.5(v_2)_y = 9(-3) + 5.5(+1.77)$$

解出 $(v_2)_y=-3.56$ m/s,向下;$(v_1)_y=+0.26$ m/s,向上.

在 x 方向上,5.5 kg 的球仍以不变的水平速度向右运动,即 $(v_2)_x=1.77$ m/s 向右;$(v_1)_x=0$.

总之,9 kg 的球以 0.26 m/s 的速度向上弹回,5.5 kg 的球分别以 1.77 m/s 和 3.56 m/s 的分速度向右下方运动.

18.43 见图 18-32.物体在光滑桌面上由静止开始自由运动,在距质心 d 的位置上受到碰撞力 F 的作用.求运动和物体速度瞬心的位置,用符号 d 和关于对质心的回转半径表示.

解 ☞ 利用平面运动的冲量-动量方程:

$$\sum(\text{Im p})_h=\Delta G_h,\ \int F\mathrm{d}t=m(\bar{v}-0) \tag{1}$$

$$\sum(\text{Ang Im p})_G=\Delta H_G,\ \int Fd\mathrm{d}t=\bar{I}(\omega-0) \tag{2}$$

由于距离 d 是常量,则可从积分号中移出.则 $\bar{v}=\int F\frac{\mathrm{d}t}{m}$ 和 $\omega=\left(\frac{d}{\bar{I}}\int F\mathrm{d}t\right)$.由 $\bar{I}=m\bar{k}^2$,得 $\omega=(d/m\bar{k}^2)\int F\mathrm{d}t$,其中 $\bar{k}$ 是物体关于质心的回转半径.

瞬心的位置,即为物体瞬时转动的支点.选任意点 O 为瞬心,O 距质心的距离为 b,且 OG 连线与碰撞力 F 垂直,如图所示.O 点速度为 $v_O=v_{O/G}+\bar{u}$,$\bar{u}$ 表示线冲量的速度.有 $v_{O/G}=b\omega$,其中 ω 由线冲量决定.注意到,图示物体,$\bar{u}$ 向右为正,ω 逆时针为正,因此,$v_{O/G}$是向左(为负).

代入公式

$$v_O=-b\omega+\bar{v}=\frac{-bd}{m\bar{k}^2}\int F\mathrm{d}t+\frac{1}{m}\int F\mathrm{d}t$$

O 是瞬心,有 $v_O=0$.令上面方程等于零,解得 $b=\frac{\bar{k}^2}{d}$.

不难观察,若距离 $b=\bar{k}^2/d$,则点 O 仍然静止.在这种情况下,力 F 通过撞击中心.

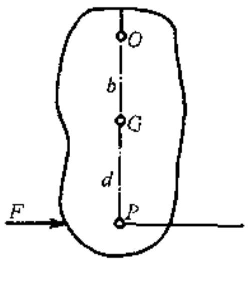


图 18-32

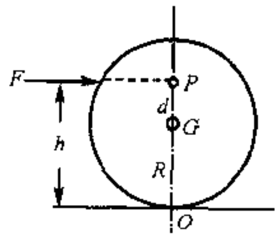


图 18-33

18.44 圆柱体半径为 R,受到水平撞击力 F,为使圆柱体与地面接触点 O 不出现滑动,求 F 距地面的高度 h.利用上题结论.见图 18-33.

解 ☞ 根据原理,为使接触点 O 为瞬时速度中心,F 撞击作用线应通过撞击中心 P.因此,$h=d+R=\frac{\bar{k}^2}{R}+R$.又圆柱体,$\bar{k}^2=\frac{\bar{I}}{m}=\frac{1}{2}mR^2/m=\frac{1}{2}R^2$.得 $h=\frac{1}{2}R+R=\frac{3}{2}R$.

18.45 如图 18-34(a)所示,质量为 m_1 的球在光滑水平面上以速度 u_1 撞质量为 m_2 的细直杆,其质心速度为 u_2 向右和顺时针初角速度 ω_i.如果恢复系数是 e,由建立的方程可求解球的末速度 v_1 和杆质心的末速度 v_2,以及杆的末角速度 ω_f.杆相对于质心 G 的转动惯量是 $\bar{I}$.

解 ☞ 碰撞后瞬时的条件如图 18-34(b)所示.注意到杆上碰撞点的初速度由运动学关系得 $u_2+d\omega_i$;同理,末速度是 $v_2+d\omega_f$.

系统线动量守恒,选右为正,则得

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2 \tag{1}$$

系统关于对杆质心角动量守恒,选顺时针为正,则得

$$m_1u_1d + \bar{I}\omega_1 = m_1v_1d + \bar{I}\omega_f \tag{2}$$

第三个方程由沿碰撞线的 e 决定：

$$e = -\frac{(v_2 + d\omega_f) - v_1}{(u_2 + d\omega_i) - u_1} \tag{3}$$

可求解出 3 个未知量 v_1, v_2 和 ω_f.

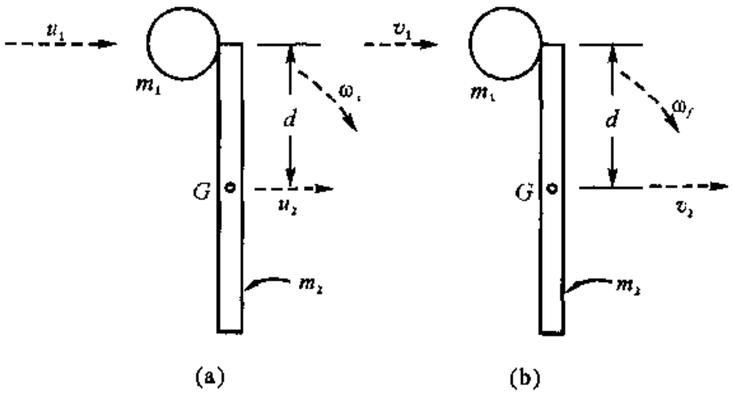


图 18-34

18.46 边长为 1.5 m 的正方形的箱子，以4 m/s速度在地面滑行. 箱侧边的低角撞到了地面抬起的瓦片，发生了完全非弹性碰撞. 求碰到瓦片后的瞬时箱子的角速度是多大? 箱子的质量为 9 kg.

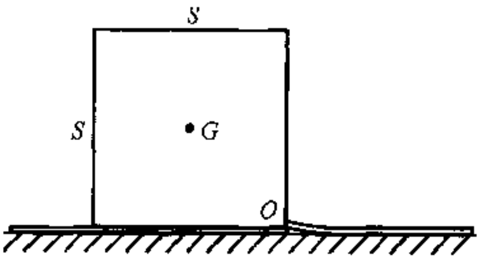


图 18-35

解 作用在箱子上的碰撞力过侧面低角，因此，对箱子低角的角动量守恒. 由于碰撞是完全非弹性的，侧面低角碰撞时速度为零，因此碰后箱子绕 O 点转动，如 18-35 所示，有

$$H_O = H'_O$$

$$mv\left(\frac{1}{2}s\right) = I_O\omega$$

由于 $I_O = \bar{I} + md^2$　即　$I_O = \frac{1}{6}ms^2 + m\left[\left(\frac{1}{2}s\right)^2 + \left(\frac{1}{2}s\right)^2\right]$

$$I_O = \frac{2}{3}ms^2 = \frac{2}{3}(9)(1.5)^2 = 13.5\ \text{kg}\cdot\text{m}$$

代入动量守恒方程，得

$$(9)(4)(0.75) = 13.5\omega$$

得

$$\omega = 2\ \text{rad/s}(\text{顺时针})$$

18.47 火箭和燃料的总共质量为 m. 燃料燃烧规律为常速率，即 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = C$. 气体排放速度相对于火箭为常量. 略去空气阻力，求 t 瞬时火箭的速度.

解 令 m 是时刻 t 时火箭与剩余燃料的质量，即 $m = m_O - Ct$；v 是火箭速度；u 是气体排放速度.

设铅直向上运动为正. 在时刻 t，作用在质系上的外力只有重力 mg，为负的. 得方程为

$$\sum F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v - u)$$

其中 $(v-u)$ 是火箭相对于气体排放速度，并且为常量 K. 则 $-mg = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - CK$，$-(m_O - Ct)g = (m_O - Ct)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - CK$　得　$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{CK}{m_O - CK}$，将最后一个方程积分

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t -g\,\mathrm{d}t + \int_0^t \frac{CK}{m_O - Ct}\mathrm{d}t$$

得　$v=-gt+[-K\ln(m_O-Ct)]_0^t=-gt-K\ln(m_O-Ct)+K\ln m_O=K\ln\frac{m_O}{m_O-Ct}-gt$

18.48 火箭空载时质量为 2000 kg，燃料质量是 8500 kg. 火箭铅直向上发射，排放气体相对于喷嘴的速度为常量 2000 m/s. 求欲使达到加速度向上 9.8 m/s²，则气体排放的速率为多少 kg/s？设排气喷嘴处为大气压力.

解 ☞ 选向上为正，将值代入方程，得

$$\sum F=m\frac{dv}{dt}-\frac{dm}{dt}(v-u)$$

$$-10\,500\times 9.8=10\,500(9.8)-\frac{dm}{dt}(-2000)$$

解出
$$\frac{dm}{dt}=-103\text{ kg/s}$$

负值表明，系统的质量不断失去.

18.49 研究陀螺仪的运动规律. 如图 18-36(a)所示，陀螺仪由自转轮和旋转体组成，其旋转体附于 O 点并可向任意方向自由转动.

分析 ☞ 设轮关于 x 轴旋转的角速度很大为 $\boldsymbol{\omega}_s$，x 轴称为自转轴. 设系统自由释放，因此所受外力是轮重力 W(略旋转体的重)和作用在 O 点的向上反力 R. 重力 W 关于 z 轴产生扭矩作用在系统上，z 轴被称为章动轴. 由实际经验知自转轮不落地而围绕 y 轴转动，y 轴被称为进动轴.

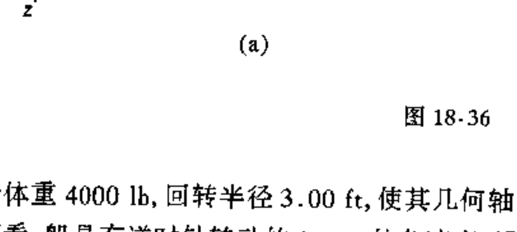
下面具体解释. 系统在释放之前，其角动量等于转动惯量乘以角速度 $\boldsymbol{\omega}_s$，即 $\bar{I}\boldsymbol{\omega}_s$. 可以用矢量 $\boldsymbol{OB}$ 表示，如图 18-36(b)所示，方向沿 x 轴指向右.（按右手规则，四指按 $\boldsymbol{\omega}_s$ 转向卷起，则拇指指向右. 也即在依 $\boldsymbol{\omega}_s$ 转动方向，按右手螺旋规则）.

在释放瞬时，有外扭矩 $\boldsymbol{M}$ 作用在系统上. 当沿着 z 轴正向看去，此扭矩顺时针转动，且大小等于重力与其质心到 z 轴的垂直距离的乘积. 在 dt 时间内，扭矩的冲量是 $M dt$. 它的单位与角动量的单位相同，并按照右手规则所表示的沿 z 轴的矢量或平行于 z 轴的矢量，即如图 18-36(b)所示的矢量 $\boldsymbol{BC}$. 此角冲量 $M dt$ 引起了系统在该方向角动量的改变. 总角动量是矢量 $\boldsymbol{OB}$ 和 $\boldsymbol{BC}$ 的矢量和，即 $\boldsymbol{OC}$ 矢量，$\boldsymbol{OC}$ 位于 xz 平面与 x 轴夹角 $d\phi$. 注意到，自转轴沿 $\boldsymbol{OC}$ 方向. 使用代数方程，并令 $d\phi=\tan d\phi$，得

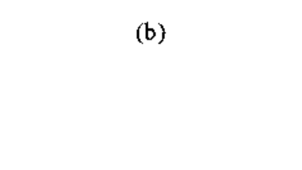
$$d\phi=\frac{M dt}{\bar{I}\omega_s}\qquad 或\qquad M=\bar{I}\omega_s\frac{d\phi}{dt}$$

$d\phi/dt$ 是自转轴关于进动转轴转动的角速度，令为 ω_p.

陀螺的方程是 $M=\bar{I}\omega_s\omega_p$. 注意到自转轴仍在 xz 平面，并有 ω_s.



(a)



(b)

图 18-36

18.50 旋转体重 4000 lb，回转半径 3.00 ft，使其几何轴沿着船的前后连线安装在船上，从上往下看，船具有逆时针转动的 1 rpm 的角速度. 沿船后看旋转体又以逆时针的 300 rpm 的角速度转动. 设两轴承离中心的距离相等，并为 3.5 ft，求前后轴承作用在旋转体上的反力.

解 ☞ 在旋转体的隔离体图上，用 x 轴表示船体前后连线的方向. 见图 18-37. 前后轴承反力分

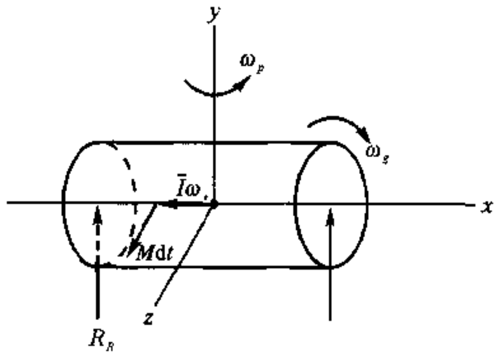


图 18-37

别为 R_F 和 R_R. 按照右手规则，关于对 x 轴的角动量($\bar{I}\omega_s$)沿 x 轴向左. 在运动中旋转体受到的角冲量($M\mathrm{d}t$)的方向沿 y 轴正向如图所示. 按右手规则，当沿 z 轴正向看去时，这个力矩(由反力引起)，按逆时针方向转动，其大小是 $M=(3.50/2)(R_F-R_R)$.

由已知数据，$\omega_s=2\pi(300/60)=31.4$ rad/s, $\omega_p=2\pi(1/60)=0.105$ rad/s, 和 $\bar{I}=m\bar{k}^2=(4000)/(32.2)(3.00)^2=1118$ slug-ft^2.

则 $M=\bar{I}\omega_s\omega_p=3.690$ lb-ft 和 $(R_F-R_R)=M(2/3.50)=2100$ lb.

沿铅直方向求和 $R_F+R_R=4000$ lb. 解为

$$R_F=3055\ \text{lb} \quad 和 \quad R_R=945\ \text{lb}$$

18.51 沿地球的圆形轨道运行的卫星喷出一粒荚果，并沿其轨道的切线方向夹 60°角，求荚果速度为多大？见图 18-38.

解 ☞ 由于荚果的重力方向过地球中心，因此其关于地心的角动量守恒. 有 $\Delta H_O=0$，即 $mv_1(R+500)=mv_2\cos^{\circ}(R)$，其中 R 是地球半径为 4000 mi. 则 $v_2=2.25\ v_1$.

又由动能定理，$U=\Delta T$

$$\int_{R+500}^{R}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)$$

其中　$GM=1.41\times10^6\ \text{ft/s}^2$

$$GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+500}\right)=\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)$$

$$=2.031\ v_1^2$$

$$v_1=6040\ \text{ft/s}$$

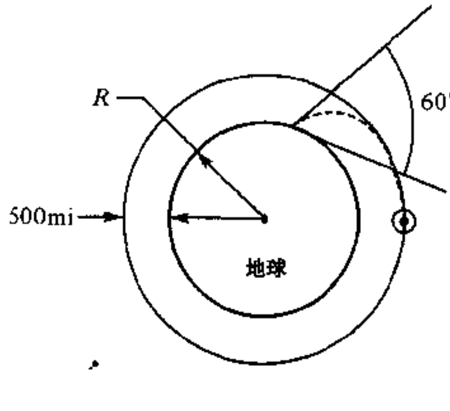


图 18-38

18.52 如图 18-39 所示，板簧的一端与固定销连接，另一端系住重(1/2) lb 的球. 板簧的劲度系数是 4 lb/ft. 当板簧伸长了 1 ft，并且小球获得与板簧垂直的 5 ft/s 的速度时，系统被释放，板簧原长为 2 ft 并设运动平面为光滑平面. 求小球趋于绕固定销转动距离是多少？

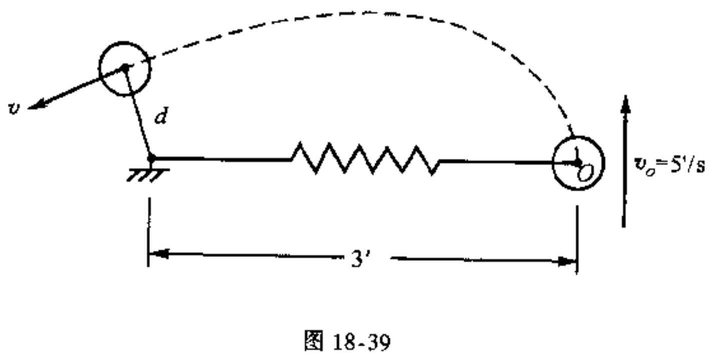


图 18-39

解 ☞ 由于作用在小球上的弹性力，通过 O 点，则关于对 O 点的角动量守恒. 则$(mv_0)3=(mv)d$. 得 $vd=15$. 再由 $U=\Delta T$，得

$$-\frac{1}{2}k(s^2-s_0^2)=\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)$$

$$-\frac{1}{2}4(0^2-1^2)=\frac{1}{2}\frac{1}{2g}(v^2-5^2),\quad v=16.77\ \text{ft/s}$$

代入 $vd=15$ 中，得 $d=0.89$ ft.

补 充 习 题

18.53 在题 18.6 中，证明如果选择最高点为矩心可得 $2PR=\mathrm{d}(4mR^2\omega)/\mathrm{d}t$。这一结果与题 18.6 中所得结果不同.(因为顶点不满足在方程(9)中所论述的 O 点的条件).

18.54 50 kg 的质量，由静止自由下落，求 4 s 后的动量.

答案：1960 kg·m/s = 1960N·m.

18.55 打桩锤重 1000 lb，从高 25 ft 落下.如果打桩时间是(1/20) s，求在此时间下的平均作用力.

答案：25 000 lb.

18.56 物体以 15 m/s 的初速度向上抛出，求需多长时间物体达到 6 m/s 的向下速度.

答案：2.14 s.

18.57 50 lb 重的物体沿 30°斜面，以初速度 20 ft/s 射出.设摩擦系数是 0.25，求需多长时间物体具有向上 10 ft/s的速度.

答案：0.433 s.

18.58 2000 lb 重的球，直径为 10 ft，并以 600 rpm 的角速度绕其直径轴转动.求需多大的转矩，才能使球在 3 min内停止转动？

答案：$T=216$ lb-ft.

18.59 物块重 120 lb，静置在水平地面上.如果受到了水平变力作用，即 $F=15t$.求力作用 10 s 以后，物块的速度是多大？设动摩擦系数与静摩擦系数都等于 0.25.

答案：129 ft/s.

18.60 直径为 1200 mm 的滑轮，在轮缘的切线方向作用变力 $F=0.03t$，求在 0 到 35 s 的时间中，力关于对转轴的角冲量.(提示：利用积分求角冲量)

答案：11.0 N·m.

18.61 300 lb 重的圆盘，直径为 3 ft，并以 1000 rpm 的角速度旋转，求角动量.

答案：1100 lb-ft.

18.62 质量为 m 的振子沿半径为 R 的圆形轨道在光滑面上运动，其振子上系的绳，穿过轨迹中心的孔洞如图 18-40 所示.如果半径为 R 时振子的转动角速度是 ω_1，拉动绳子使其半径为(1/2)R 时，求其角速度为多大？由绳子中的末张力与初张力之比求得.

答案：8.

18.63 质量 12 kg 的圆盘，回转半径是 600 mm.当圆盘受有扭矩 $M=2t$ N·m 的作用.求其从静止开始到 2 s 后的角速度.略去轴承的摩擦.

答案：$\omega=0.93$ rad/s.

18.64 20 lb 重的物块受到水平力 P 的作用，其 P 随时间的关系如图 18-41 中曲线所示.物体从静止开始在光滑水平表面运动.求其在 7 s 的位置和速度为何？

答案：$v=33.8$ ft/s, $s=134$ ft.

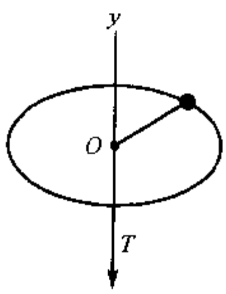


图 18-40

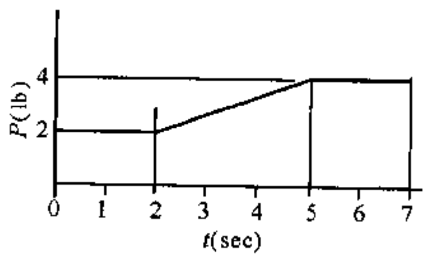


图 18-41

18.65 重 12 lb 的均质转子的回转半径为 1.2 ft，在 85 s 内，角速度从 180 rpm 变到零.求转子受到了多大的摩擦扭矩？

答案：$T=0.119$ lb-ft.

18.66　如图 18-42 所示,两质量块由一根柔软轻绳连接,并跨过圆柱体.该圆柱体质量为 4 kg,直径是 1200 mm.求需用多长时间 7 kg 的质量块的速度由零变到 2 m/s?

答案:$t = 143$ s.

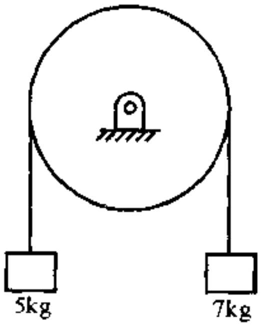


图 18-42

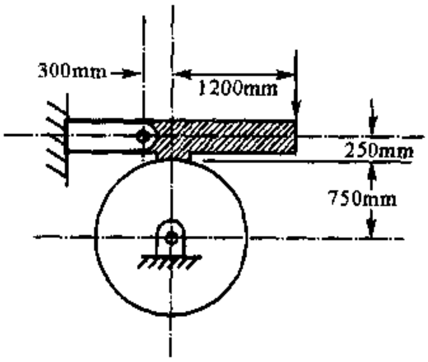


图 18-43

18.67　100 kg 质量的转子,回转半径为 700 mm.当力 P 作用在制动块上时,转子的角速度为 6 rad/s,并逆时针转向,如图 18-43 所示.求 P 为多大,才可使转子在 92 s 内停止转动? 制动块与转子间的摩擦系数是 0.4.

答案:$P = 1.42$ N.

18.68　鼓轮以 20 rpm 的旋转角速度吊起一重为 1 ton 的物品.该物品被一柔软不可伸长的轻绳连接,如图 18-44 所示.如切断电源,求需多长时间,物品停下来? 略去轴承摩擦.

答案:$t = 0.172$ s.

18.69　两个均质圆盘各重 W_1 和 W_2,其半径分别是 r_1 和 r_2.可在一个固定的铅直框中无摩擦地自由转动,W_1 以角速度 ω 顺时针转动并落到了下面的圆盘 W_2 上.设摩擦系数为 μ 是常量,求两圆盘相对滑动停止的时间,及在此时各自的角速度是多大?

答案:$t = \dfrac{r_1\omega}{2\mu g(1 + W_1/W_2)}$, $\omega_1 = \dfrac{\omega}{1 + W_2/W}$顺时针,$\omega_2 = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\dfrac{\omega}{1 + W_2/W}\right)$逆时针.

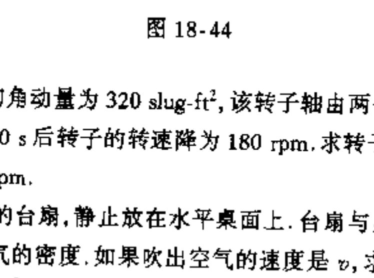


图 18-44

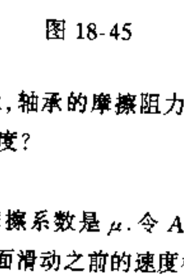


图 18-45

18.70　一转子的初角动量为 320 slug-ft^2,该转子轴由两个轴承支承,轴承的摩擦阻力矩为 250 lb-in,关掉电源后,经 150 s 后转子的转速降为 180 rpm.求转子的初角速度?

答案:273 rpm.

18.71　质量为 m 的台扇,静止放在水平桌面上.台扇与桌面间的摩擦系数是 μ.令 A 为风扇吹出空气的面积,δ 为空气的密度.如果吹出空气的速度是 v,求风扇在桌面滑动之前的速度极大值的表达式.

答案:$v = (\sqrt{\mu m g})/A\delta$.

18.72　在直径为 4 in 的喷嘴中,流出的水的速度是 60 ft/s.求喷嘴作用于支承上的反力.

答案:610 lb.

18.73　喷水器喷嘴直径 50 mm,喷射的水柱与平面垂直,其作用力为 1200 N.求水柱在喷嘴处的速度有多大?

答案:24.7 m/s.

18.74 喷水器喷嘴直径为 25 mm,出口水柱速度为 30 m/s.求其对圆形叶片的总作用力.经叶片的射流方向变化 45°角.设无摩擦.

答案:338 N.

18.75 喷水器的水速度为 30 ft/s,并垂直冲击铅直板,使之在 85 lb 水平力的作用下,由运动到静止.求喷嘴直径是多大?

答案:2.99 in.

18.76 射流对曲面叶片的冲击力为 450 lb,当水流经叶片后改变了 45°的方向.如果喷嘴处的速度为 80 ft/s,计算喷嘴处的直径.

答案:2.95 in.

18.77 见图 18-46.水流的横截面积是 2700 mm^2,具有 30 m/s 水平速度.由水柱冲向固定叶片后,分成两个相等的部分沿叶片滑动.设水与叶片间无摩擦,求水对叶片的作用力.

答案:$P_x = 4150$ N,向右.

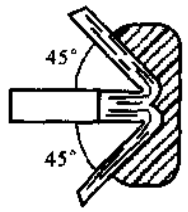


图 18-46

18.78 在上题中,设水柱有 2/3 的水沿叶片上部流动,有 1/3 的水沿叶片下部流出.求水对叶片的反力.

答案:$P_x = 4150$ N 向右,$P_y = 573$ N 向上.

18.79 从横截面积 1700 mm^2 的喷嘴中,喷出了具有 25 m/s 的水平水柱冲击到固定铅直板上,如图 18-47 所示.求平板受到的力有多大?

答案:1060 N,向右.

图 18-47

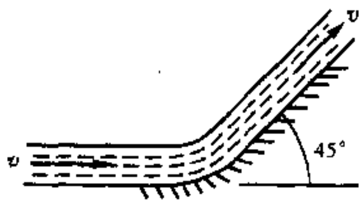


图 18-48

18.80 水流的横截面积为 3 in^2,并以 30 ft/s 的速度冲击静止的曲面叶片如图 18-48 所示.略去摩擦,求叶片对水流的水平和铅垂力的分量.

答案:$P_x = 10.7$ lb 向左,$P_y = 25.7$ lb 向上.

18.81 水平射流从直径为 4 in 的喷嘴喷出,速率为 100 ft/s.当水流射向曲面叶片后改变了 120°的流动方向,求叶片上受到的力.

答案:$F_x = 2540$ lb 向左,$F_y = 1460$ lb 向上.

18.82 将两个均质的滑动圆盘 A 和 B 安装在同一轴上.A 盘的质量 50 kg,直径 1000 mm,厚度 50 mm 且静止;B 盘质量 100 kg,直径 1000 mm,厚度 100 mm,且以 600 rpm 转速顺时针转动.如果将 A 和 B 用约束相连并一起转动,求它们共同的角速度为多大?

答案:400 rpm.

18.83 在题 18.82 中,由于盘的相互配合连接,系统动能损失的百分比是多少?

答案:33.3%.

18.84 重 70 lb 的小孩站在重 100 lb 的船上,初瞬时静止.如果小孩以相对于船 6 ft/s 的水平速度跳动,求船的速度.

答案:2.47 ft/s.

18.85 涨潮后,质量 18 kg 的山羊发现自己站在 2 m 长、25 kg 的圆木的一端,另一端靠在岸边.山羊便向另一端爬去.求当山羊爬到端点时,圆木离岸边多远?

答案:0.837 m.

18.86 0.2 lb 重的子弹从 14 lb 的步枪中射出,出口速度为 1000 ft/s.求步枪的反冲速度是多大?

答案:14.3 ft/s.

18.87 50 Mg 质量的火炮发射了一个 500 kg 的炮弹,如果反冲力为 400 kN 常量,并且火炮向后移动了 200

mm 距离，计算炮弹射离炮口时的速度.

答案：179 m/s.

18.88　重 600 lb 的炮弹发射的初速度是 2000 ft/s. 火炮重 200 000 lb，求火炮反冲速度为多大？

答案：$v_R = 6$ ft/s 向后.

18.89　如图 18-49 所示，n 个小球排在光滑水平面上. 如果标数为 1 的小球以水平速度 u 运动并撞到了第二个球，依次碰撞. 设每个碰撞的恢复系数都为 e，求第 n 个小球的速度.

答案：$v_n = (1+e)^{n-1}u/2^{n-1}$.

图 18-49

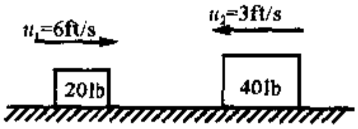


图 18-50

18.90　在图 18-50 中，重 20 lb 的物块以 6 ft/s 的速度向右运动；重 40 lb 的物块以 3 ft/s 的速度向左运动. 设恢复系数为 0.4，求碰撞后瞬时各自的速度.

答案：$v_{20} = 2.4$ ft/s 向左，$v_{40} = 1.2$ ft/s 向右.

18.91　3 kg 质量的球和 5 kg 质量的球，具有相同的直径. 并在光滑水平面上，分别以速度 +5 m/s 和 −3 m/s 沿一直线运动. 求它们碰撞之后的速度. 设碰撞是(a)非弹性的；(b)弹性的和(c)恢复系数为 0.4.

答案：(a)0, 0；(b) −5, +3；(c) −2, −1.2 m/s.

18.92　20 kg 质量的物块 A，以速度 12 m/s 水平地向右运动，与另一 16 kg 物块 B 相碰，B 块速度 8 m/s 水平向左. 如果恢复系数 $e = 0.7$，求 A、B 碰撞后瞬时各自的速度.

答案：$v_A = 3.11$ m/s 向左，$v_B = 10.9$ m/s 向右.

18.93　2000 lb 重的车，行驶速度是 30 mi/h；1500 lb 重的车行驶速度是 15 mi/h. 两车沿同一方向运动. 求两车挂连之后的共同速度是多大？并求损失了多少动能？

答案：34.6 ft/s, 6300 ft-lb.

18.94　30 kg 质量的球(A)的速度 30 m/s 向右运动，10 kg 质量的球(B)以 7 m/s 的速度沿相反方向运动，使两球相碰. 如果恢复系数是 0.6，求碰撞后两球的速度.

答案：$v_A = 15.2$ m/s 向左，$v_B = 37.4$ m/s 向右.

18.95　一球从 5 m 高处静止自由落到与水平面成 30°角的斜面上，如果 $e = 0.5$，求此球的反弹高度是多少？

答案：$h = 0.08$ m.

18.96　一球从 6 m 高处静止下落. 球落地之后的反弹高度为 5 m. 求恢复系数.

答案：$e = 0.91$.

18.97　玻璃球掉到了光滑水平地板上，然后反弹 9 m 高，第二次反弹达到 6 m，求地板与玻璃球间的恢复系数是多少？

答案：0.82.

18.98　重 4 lb 的物体从 0.5 ft 高处，掉到了由弹簧支撑的平台上，其等效弹簧劲度 $k = 50$ lb-ft. 如果是完全塑性碰撞($e = 0$)，求平台相对它的初位置向下移动的最大距离. 见图 18-51.

答案：3.90 in.

18.99　在图 18-52 中，当绳拉紧时质量块 M 运动的速度为 u. 如果恢复系数为 e，求质量块 m 的速度多大？质量块均在光滑水平面上.

答案：$v = Mu(1+e)/(M+m)$.

18.100　质量块 m_1，以速度 u 撞上了质量块 m_2，其 m_2 用一根长 L 的绳吊住，如图18-53所示. 如果恢复系数为 e，求(a)每个质量碰后瞬时的速度和(b) m_2 上升的高度.

答案：(a) $v_1 = u\dfrac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2}$，$v_2 = u\dfrac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2}$；(b) $h = \dfrac{u^2 m_1^2(1+e)^2}{(m_1+m_2)^2 2g}$

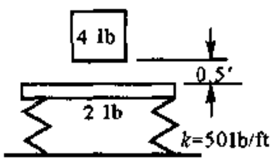


图 18-51

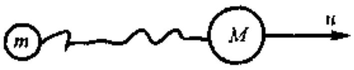


图 18-52

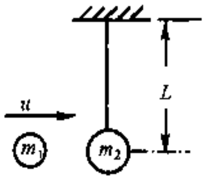


图 18-53

18.101　1 kg 质量的小球，沿无摩擦管道下落的铅垂距离为 900 mm，如图 18-54 所示．当到达管道口时，碰撞上了另一用 900 mm 绳吊住的 1 kg 质量的小球，求吊住的小球上升的高度．设(a)如果为完全弹性碰撞，(b)如果恢复系数为 0.7.

答案：(a)900 mm，(b)650 mm.

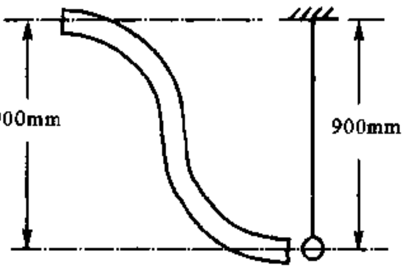


图 18-54

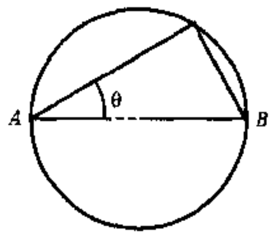


图 18-55

18.102　见图 18-55．从位置 A 将球抛向光滑圆形管，然后球又沿与碰撞垂直的方向击到了位置 B．B 与 A 位于同一直径的另一端．证明恢复系数 $e=\tan^2\theta$．

18.103　一台球沿与光滑水平面夹角 35°的方向，以 4 m/s 的速度碰撞，如图 18-56 所示．如果恢复系数为 0.6，求台球反弹后的速度为何？

答案：$v=3.55$ m/s，$\theta=22.8°$.

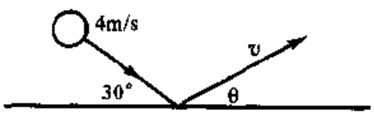


图 18-56

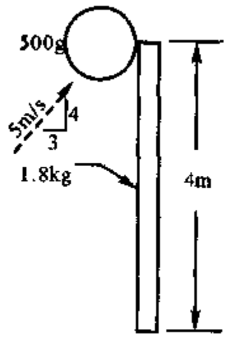


图 18-57

18.104　如图 18-57 所示，500 g 质量的小球，以 5 m/s 的速度沿光滑水平面运动．撞到了 1.8 kg 质量的均质细直杆，该杆长 4 m，如果杆初瞬时静止，并且恢复系数为 0.6，求碰后瞬时球的速度．

答案：4.06 m/s.

18.105　求解题 18.46，设箱子与瓦片是完全弹性碰撞．

答案：$\omega=4$ rad/s 顺时针．

18.106　均质水平细直杆向下落，当其右端欲撞到桌边瞬时的速度为 10 m/s．如果杆与桌子间的恢复系数是 0.45．求撞后瞬时杆的角速度．杆重 3 lb，长 3 ft.

答案：$\omega=7.25$ rad/s 逆时针．

18.107　在图 18-58 中，一大圆桶里装满了比重为 50 lb/ft² 的流体．桶与液体共重 200 lb 并静止放在冰面上，其间摩擦系数是 0.05．如果突然拔出水平面以下 3 ft 的一个 4 in 的塞子，问桶是否移动？

答案：移动.

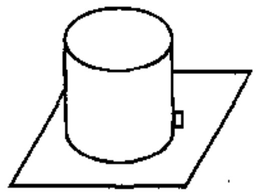


图 18-58

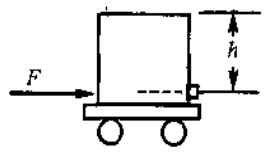


图 18-59

18.108　将桶静止放在小车上，桶中液体的密度为 δ. 如果孔上液体的高度为 h，求需多大的水平力 F，才能使液体从喷嘴流出时，桶仍然静止？

答案：$F = 2Ah\delta g$.

18.109　火箭的质量为 3000 kg. 如果在地面垂直发射时，其携带燃料质量是 7000 kg，计算初加速度. 设相对火箭的气体喷射速度为 2000 m/s 和初瞬时的燃料燃烧率是 150 kg/s.

答案：$a = 20.0\ \mathrm{m/s^2}$.

18.110　陀螺的旋转体是均质的圆柱体，直径为 4 in，重为 6 oz，安装在水平的相距为 6 in 的轴承上. 当顺着其尾部看上去时，旋转体以 9000 rpm 角速度顺时针转动，从上往下看装配整体绕铅直轴以 2 rad/s 角速度顺时针转动. 求作用在旋转体轴上的轴承反力为多大？

答案：$R_F = 12.8$ oz，方向向上，$R_R = 6.8$ oz，方向向下.

18.111　见图 18-60，自转轮直径 6 in，厚度 2 in，自旋角速度为 6000 rpm. 略去旋转架的质量. 设比重为 480 $\mathrm{lb/ft^3}$，求进动角速度.

答案：$\omega_p = 1.10$ rad/s，从上向下看绕 y 轴顺时针转向.

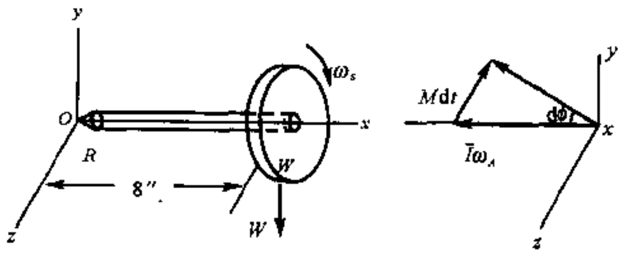


图 18-60

18.112　宇宙飞船连接空间实验室在高 400 km 的轨道上运行. 当断掉飞船发动机开关时，其飞行速度为 4000 m/s，飞行高度为 80 km. 求在关掉瞬时运行速度铅垂线夹角是多大？设弹道轨道与空间实验室轨道相切.

答案：56.8°.

18.113　一颗人造地球卫星在离地 400 mi 的高度平行于地球表面发射，发射速度为20 500 mi/h. 求卫星到达的最大高度.

答案：8420 mi.

18.114　如果卫星以与铅直方向成 60°角发射，重解 18.113 题.

答案：1470 mi.

第 19 章　机械振动

19.1　定义

弹性质量系统的机械振动是其在平衡位置附近所作的确定时间间隔的往复运动.

周期——重复一次振动所需的时间.

循环——在一个周期中,重复完整的运动.

频率——单位时间下,循环的次数.

自由振动——系统不受干扰力的运动.

固有频率——自由振动中系统的频率.

受迫振动——系统受到周期干扰力的运动.

共振——干扰力的频率与系统固有频率相重合的运动.

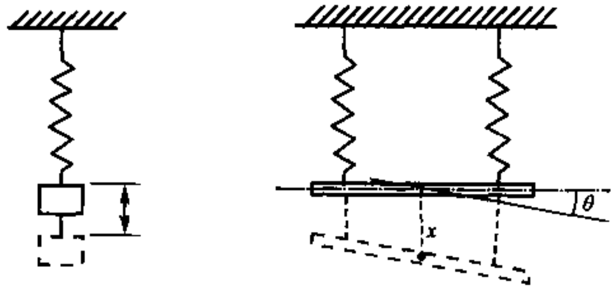
瞬态运动随时间将消失.自由振动具有瞬态振动的特性.

稳态振动随时间作往复运动.受迫振动就是稳态振动的例子.

19.2　自由度

系统的自由度由描述其运动的变量的数目决定.

例如,在图 19-1(a)中,设弹簧上的质量块只沿铅直方向运动,因此描述其运动只有一个坐标,即称之为单自由度系统.在图 19-1(b)中,杆受两根弹簧支撑,因此描述其运动需二变量,如图所示,则称之为二自由度系统.



(a)　　　　(b)

图 19-1

19.3　简谐运动

如 12.2 节中所论述,简谐运动是由时间变量正弦函数或余弦函数所表示.即,$x = X\sin\omega t$ 是简谐运动方程.这种运动可叙述为:当旋转矢量 $\boldsymbol{X}$ 以不变的角速度 ω rad/s 绕端点旋转时,在任一瞬时,长为 X 的旋转矢量在坐标轴上的投影即为简谐运动.其中,

x 是 $\boldsymbol{X}$ 的投影;

X 是旋转矢量的长度;

ω 是角频率用 rad/s 表示;

$\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 是周期用 s 表示;

$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ 是频率即每秒钟循环的次数(Hz).

具有多个简谐运动的物体的振动,即简谐运动的合成运动有不同的频率和振幅.

19.4　多自由度系统

多自由度系统是可简化为由多个质量块、弹簧和阻尼器所组成的系统.求解多自由度系统的微分方程时,使用近似解法.在工程处理中,将其合理简化以符合实际系统.

下面将研究无阻尼和有阻尼的自由振动和受迫振动,同时只研究黏性阻尼系统(即阻尼力与物体的速度成正比).不过有必要提出两种其它类型的阻尼:(1)库仑阻尼,这种阻尼与速度无关,是由物体滑动的干摩擦决定(此力与物体接触面的法向反力成正比);(2)固体阻尼,这种阻尼是物体内部材料摩擦引起的,作为内力(此力与频率无关,与物体中的应力的极值成正比.).

19.5　单位

下表列出了在研究机械振动问题中,使用的工程单位制和国际单位制.

量	工程单位制	国际单位制
长度	in	m
时间	s	s
速度	ft/s 或 in/s	m/s
加速度	ft/s^2 或 in/s^2	m/s^2
质量	slug	kg
转动惯量	slug - ft^2 或 lb · s^2in	kg·m^2
力	lb	N
劲度系数	lb/in	N/mm
阻尼常数	lb - s/in	N·s/m

例　题

自由振动——直线运动

19.1　质量 m 吊在铅直弹簧下面,其弹簧的劲度系数为 k.设弹簧的质量略去不计.如果将质量块拉到平衡位置以下 x_0 距离,并使其具有向下的初速度 v_0,然后释放,求质量块的运动规律.

解　☞ 图 19-2 中,表示了质量块 m 的各种位置.为了清晰,将图中距离放大.X 值是运动的振幅.当然,质量块在平衡位置之上的最大距离也是 X.

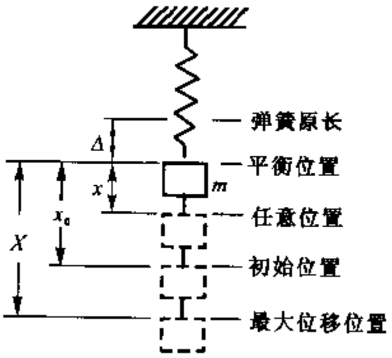


图 19-2

弹簧中的张力 T 等于弹簧的劲度系数 k 与弹簧伸长或压缩量 Δ 的乘积,将伸长时取为正.画平衡位置的质量块的隔离体图,且 x 在平衡位置以下为正.注意到,x 的坐标原点选在平衡位置,且向下为正.

图 19-3 所示,为系统的平衡位置,即加速度矢量为零.则有,$T = k\Delta = mg$,注意到 $\Delta = \frac{mg}{k}$.

在图 19-4 中,质量位于平衡位置以下,位移为正.由于加速度方向是未知量,故设其为正.如为负值则表明指向上.研究隔离体图,应用牛顿定律,得到

$$\sum F_v = ma, \qquad mg - T = ma$$

将 $T = k(\Delta + x)$和 $mg = k\Delta$ 代入,得 $k\Delta - k\Delta - kx = ma$.再由 $a =$

$\frac{d^2x}{dt^2}$方程可得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

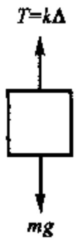


图 19-3　平衡位置

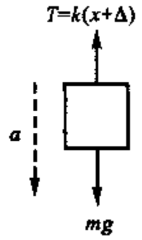


图 19-4　平衡位置以下

该式表明,当 x 为正时(在平衡位置以下),加速度(为负)指向上.即当质量块向下运动到最低位置时,加速度向上,质量块减速;然后当到达最底位置后,便开始向上运动,此时质量块 m 位移仍是正的并加速度指向负,即向上.因此质量块以向上的加速度到达平衡位置.在平衡位置之上时,质量 m 的位移是负的,而加速度指向平衡位置向下.即质量块在向顶点运动的过程中,为减速运动;而在从最高到平衡位置的运动为加速度运动,因此,加速度总是指向平衡位置.

设该微分方程的解为

$$x=A\sin\omega t-B\cos\omega t$$

其中 ω 是角频率用 rad/s 表示.

为确定是否为解,将此方程对时间取二次微分$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$后,再代入原微分方程.注意到

$$\frac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t-B\omega\sin\omega t \text{ 和 } \frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t-B\omega^2\cos\omega t=-\omega^2x$$

将$\frac{d^2x}{dt^2}$代入运动方程,得$-\omega^2x+\left(\frac{k}{m}\right)x=0$.则当 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$时,$x$ 是方程的解,因此解可写成

$$x=A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

注意到,每经过 2π rad,便完成一次完整的循环.例如当$\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\tau=2\pi$,其中 τ 是周期,每循环一次所需的时间.则,$\tau=2\pi\sqrt{k/m}$.频率是周期的倒数,有

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

还应指出,$\Delta=mg/k$,则以上公式可写成 $\tau=2\pi\sqrt{\Delta/g}$和$f=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{g/\Delta}$.

常量 A 和 B 由问题的初始条件决定.设 $t=0$,$x=x_0$ 和 $v=v_0$.将 x 和 v 之值代入运动方程,同时应使 $t=0$.

$$x_0=A\sin(\omega\cdot0)+B\cos(\omega\cdot0)$$
$$v_0=A\omega\cos(\omega\cdot0)-B\omega\sin(\omega\cdot0)$$

由第一个方程得 $B=x_0$,第二个方程得 $A=\frac{v_0}{\omega}$.

因此,解为

$$x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t$$

解还可以写成另外一种形式:$x=X\cos(\omega t-\phi)$,其中振幅 $X=\sqrt{(v_0/\omega)^2+(x_0)^2}$,相位角 $\phi=\arctan(v_0/x_0\omega)$.注意到 $\omega=\sqrt{k/m}$.

本题是自由振动最一般的例子.从理论上讲,质量 m 的振动将无条件地运动下去.由于只用一个变量描述运动,则系统是一个自由度系统.许多问题都可以简化成此种类型.换句话说,实际情况中的弹性支承可由连在物体上的等效弹簧代替.

19.2 重 60 lb 的机器，置放在重 80 lb 的平台上.此平台由 4 根弹簧依次排列支承，设每根弹簧承受 1/4 载荷，求振动的周期.每根弹簧劲度系数均为 18 lb/in.

解 ☞

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(18)(386)}{(60+80)}} = 2.24 \text{ cps}$$

注意，g 用 in/s^2.则周期 $1/f = 0.45$ s.

19.3 用能量的方法求解 19.1 题.

解 ☞ 能量守恒定律表明，对于保守系统，系统势能 V 和动能 T 之和等于常量.(设本题中无摩擦和阻尼).

在平衡位置以下任何位移 x，弹簧张力是 $mg + kx$.弹性势能 V_s 等于此力使弹簧伸长所做的功：

$$V_s = \int_0^x (mg + kx)\mathrm{d}x = mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

在相同位移 x 情况，质量失去势能是 mgx，则系统的总势能是$\frac{1}{2}kx^2$.

在平衡位置以下 x 距离，质量的动能 T，用运动速度$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$表示为$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$.由于弹簧不计质量，则动能为零.因此，系统总动能只有质量块的动能.

由能量守恒定律 $T + V =$ 常量，即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = 0$，则有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right] = 0$，或$\frac{1}{2}m(2)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}k2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$.

简化成如例 19.1 相同的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

则频率为

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{rad/s} \qquad 或 \qquad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{Hz}$$

由此类型的微分方程表明，二阶导数前的系数是 1，而 x 前的系数是圆频率 ω 的平方.($\omega = 2\pi f$，其中 ω 用 rad/s 表示，f 用 Hz 表示.)

19.4 小质量块 m，固结在铅直的金属丝上，金属丝的张力为 T，如图 19-5 所示.若使质量块沿横向有一小位移，然后释放.求质量 m 振动的固有频率为多大？

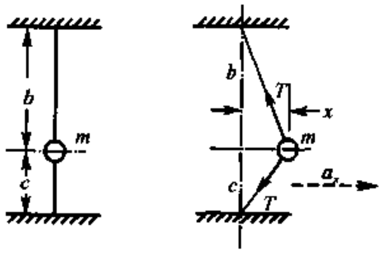


图 19-5

解 ☞ 设质量 m，在运动中的某瞬时距平衡位置之右的距离为 x.

在水平方向上，质量受到两个拉力 T 的分量的作用如图示.对于小位移，张力沿 x 方向的分量是 Tx/b 和 Tx/c 均指向左，即为负.如果设 x 向右为正，则微分方程为

$$-\frac{Tx}{c} - \frac{Tx}{b} = ma_x = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{m}\left(\frac{T}{c} + \frac{T}{b}\right)x = 0$$

注意到，此微分方程与弹簧上的质量块的微分方程相比，只是 x 符号前的系数不同，其它完全相同.因此，根据题 19.3 质量 m 振动的固有频率为

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{m\pi}\left(\frac{b+c}{bc}\right)}\ \text{Hz}$$

19.5 漂浮圆柱体如图 19-6 所示.圆柱体的横截面积是 A，质量是 m.如将圆柱体压下，然后释放，求振动频率是多少？液体的密度是 δ.略去液体阻尼的影响及运动液体惯性的影响.

解 ☞ 当圆柱体在平衡位置 x 以下距离时，所受到的浮力大小等于排出水的重力.此力可简化成如例 19.1 中的弹簧力.由牛顿定律，作用在圆柱体上的向上的不平衡力(由向下的位移引起的)等于

其质量与加速度的乘积．令位移向下为正．则运动微分方程得

$$-\delta gAx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\qquad 即\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\delta gA}{m}x = 0$$

则，频率为

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta gA}{m}}\ \ \mathrm{Hz}$$

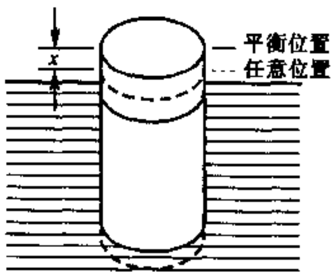


图 19-6

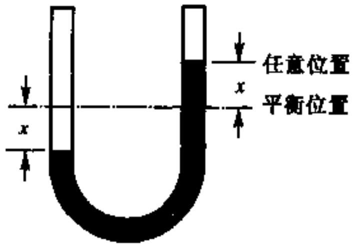


图 19-7

19.6　流体压力计中的液体密度为 δ，总长度为 l，如图 19-7 所示．在管的一边突然施加压力，使液体下降．然后解除压力，则液体振动．略去任何摩擦阻尼，求振动的频率是多大？

解　☞ 设左边液体在平衡位置以下的 x 距离等于右边液体在平衡位置之上的 x 距离．

高 $2x$ 液体体积的重力是引起在平衡位置附近振动的不平衡力．此力为 $2xA\delta g$，其中 A 是液体的横截面面积．运动液体的总质量是 $lA\delta$．根据牛顿定律，

$$-2xA\delta g = lA\delta\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\qquad 即\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2g}{l}x = 0$$

得

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}\ \ \mathrm{Hz}$$

注意到 f 与液体密度和横截面的面积无关，g 和 l 的单位可使用国际单位制和工程单位制两种．

19.7　求图 19-8 所示系统的无阻尼固有频率．杆的重量略去不计，下面的弹簧连在杆的中点，上面两根弹簧连在杆的两端．弹簧的劲度系数如图所示．

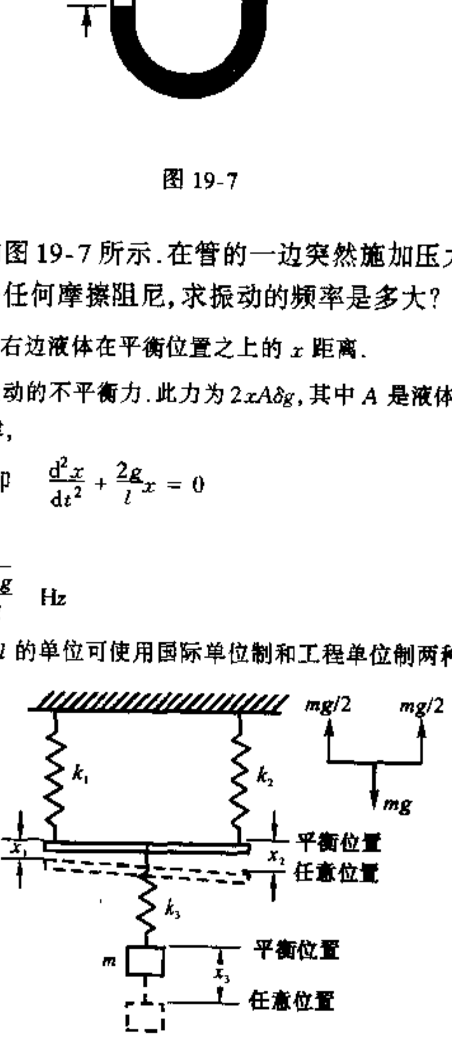


图 19-8

解　☞ 质量块 m 的总静位移等于弹簧 k_3 的伸长 x_3 加上 x_1 与 x_2 的平均值，其中 x_1 和 x_2 分别是弹簧 k_1 和 k_2 的静伸长．

将 Δ 的值代入方程 $f=(1/2\pi)\sqrt{g/\Delta}$，即可解出(见例 19.1)．注意到总重力 mg，通过 k_3 传到 k_1 和 k_2 的支撑上，使其受力都为 $(1/2)mg$．右图所示的杆的隔离体图上表明了此关系．则有

$$x_3=\frac{mg}{k_3},\quad x_2=\frac{\frac{1}{2}mg}{k_2},\quad x_1=\frac{\frac{1}{2}mg}{k_1}$$

和

$$\Delta = x_3+\frac{1}{2}(x_2+x_1) = mg\left(\frac{4k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{4k_1k_2k_3}\right)$$

代入得

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_1k_2k_3}{m(4k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3)}}$$

19.8 如图 19-9 所示，刚性无重梁长为 l，左端与一固定框架销钉铰接，右端连一弹簧 k_2 并吊住质量块 m. 为维持杆在水平位置平衡，其上端与弹簧 k_1 连接. 求此系统的固有频率 f 是多少？

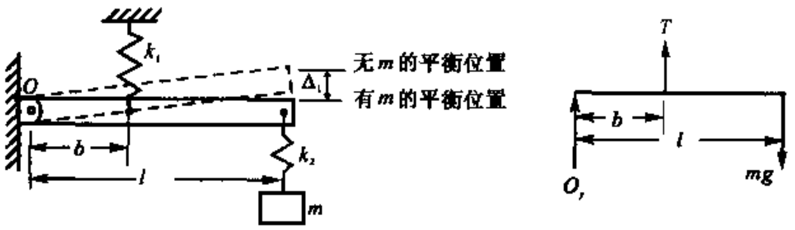


图 19-9

解 杆的水平位置是静平衡位置. 求梁端点的静位移 Δ_1，此 Δ_1 即为无载荷作用时，梁端点的原始位置. 在梁平衡位置的隔离体图中，注意到弹簧 k_1 的张力一定是 $T=(l/b)mg$ 才能维持梁的平衡(根据对 O 点取矩得到). 因此，弹簧 k_1 的伸长量应是 mgl/bk，则由此引起的右端位移(由相似三角形)为

$$\Delta_1 = \frac{l}{b}\frac{mgl}{bk_1} = \frac{mg}{k_1}\left(\frac{l}{b}\right)^2$$

则 m 的总静位移Δ 等于Δ_1 与弹簧 k_2 由力 mg 引起的变形之和.

即

$$\Delta = \frac{mg}{k_2} + \left(\frac{l}{b}\right)^2\frac{mg}{k_1} = mg\left(\frac{k_1+(l/b)^2k_2}{k_1k_2}\right)$$

得

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m[k_1+(l/b)^2k_2]}}\quad \text{Hz}$$

自由振动——角位移

19.9 求图 19-10(a)所示系统在小位移下的固有频率？

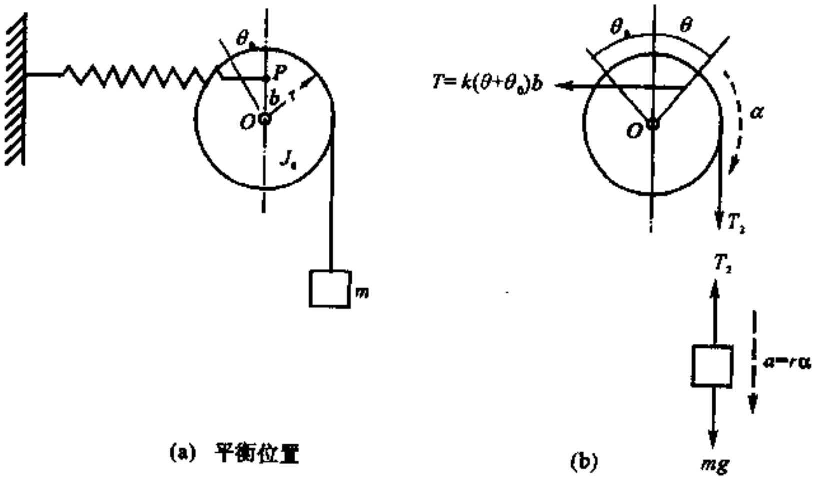


图 19-10

解 图 19-10(a)所示是系统的平衡位置，弹簧被拉长的距离等于 $b\theta_0$. 在运动的任意位置，如图 19-10(b)所示位置，圆柱体转过 θ 角，则弹簧的总伸长量为 $b(\theta+\theta_0)$. 注意到所设角位移很小，并设角位移顺时针方向为正，则质量 m 的加速度是 $a=r\alpha$.

质量 m 和圆柱体的运动方程分别是

$$\sum F = mg, \qquad mg - T_2 = mr\alpha \tag{1}$$

$$\sum M_O = J_O\alpha, \qquad T_2 r - bk(\theta + \theta_0)b = J_O\alpha \tag{2}$$

其中 J_O 是对形心的极惯性矩.由方程(1)求解出 T_2,再代入方程(2)中,解得

$$(mg - mr\alpha)r - b^2k\theta - b^2k\theta_0 = J_O\alpha$$

由于在静平衡位置 P 点在 O 点的铅直上方,因此有 $\sum M_O = 0$,即 $(k\theta_0 b)6 = mgr$.(注意到系统平衡时 $T = mg$.圆柱体的运动方程可写为

$$(J_O + mr^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} + b^2k\theta = 0$$

由此得

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{b^2k}{J_O + mr^2}} \text{ Hz}$$

19.10 均质圆盘半径为 R,重为 W,并用 3 根长为 l 的绳索等间距连接吊住,如图 19-11(a)所示.求圆盘相对于铅垂中心线微小角位移的扭转振动的固有频率.

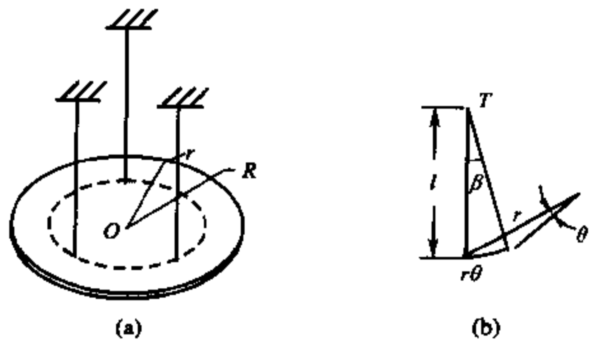


图 19-11

解 ☞ 3 根绳中的张力都为 $\frac{1}{3}W$.如果圆盘旋转一小角位移 θ,则每根绳的底端有位移 $r\theta$ 如图 19-11(b)所示.拉力的水平分量近似等于 $\frac{1}{3}W\sin\beta = \frac{1}{3}W\left(\frac{r\theta}{l}\right)$,则每根绳子相对于铅垂中心线的阻力矩等于 $\frac{1}{3}W\left(\frac{r\theta}{l}\right)r$.

相对于铅垂中心线的运动方程为

$$-3\left(\frac{W}{3}\right)\left(\frac{r\theta}{l}\right)r = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(R^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

简化为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{l}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\theta = 0$$

得

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{R}\right)\sqrt{\frac{2g}{l}} \text{ cps}$$

19.11 均质的钢材圆盘直径为 200 mm,厚度为 50 mm,和一直径为 2 mm,长为 900 mm 的钢缆绳,铅直刚性连接.求系统的固有频率是多大?

解 ☞ 当钢绳扭转 θ 角时,则扭矩为 $K\theta$.圆盘的运动方程为 $-K\theta = J_O\alpha$.即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{J_O}\theta = 0$$

和

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{J_O}} \text{ Hz}$$

按照材料力学,钢绳扭转角为

$$\theta = \frac{TL}{\frac{1}{32}\pi d^4 G}$$

其中,T 是扭矩,单位 N·m;l 是绳长,单位 m;G 是剪切弹性模量(钢材为 80 GPa);d 是直径,单位 m.

因此,扭转常数是

$$K = \frac{T}{\theta} = \frac{\pi d^4 G}{32l} = \frac{\pi(0.002)^4(80\times10^9)}{32(0.9)} = 0.14\ \mathrm{N\cdot m/rad}$$

盘的转动惯量是

$$J_O = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi\right)(0.2)^2(0.05)(7850)(0.1)^2 = 0.062\mathrm{kg\cdot m^2}$$

钢的密度是 7850 kg/m³.最后得

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{J_O}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.14}{0.062}} = 0.24\ \mathrm{Hz}$$

19.12　两个大质量的圆盘,其转动惯量(或称质量极惯性矩)分别为 J_1 和 J_2,用一直径为 d 的轴连接,如图 19-12 所示,试讨论系统的运动情况.

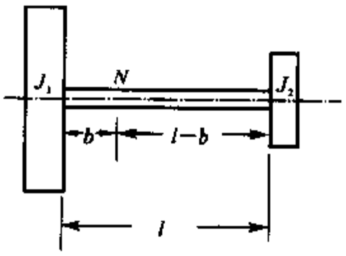


图 19-12

解　☞ 如果将其中一质量固定,而让另一质量旋转,然后同时释放,则系统将生产振动.由于没有外力偶矩作用在系统上,因此系统的角动量守恒.即 $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$,得 $\omega_2 = -(J_1/J_2)\omega_1$.

注意到,ω_1 和 ω_2 表示了在一个周期内,J_1 和 J_2 的变角速度.

由上面方程表明,两个质量的转动方向总是相反,因此,轴上有一个静止的截面,为节点,节点的位置可由每个质量的运动情况求出,即将每个质量均看成扭摆来处理(见例 19-11).

一个质量循环一次所用的时间一定等于另一个质量循环一次的时间.如果不等,则两质量的扭转方向一定会出现相同的情形,但由上面方程表明,其转动方向总是相反,因此周期应相等,而每秒钟循环的次数也一定相等,即

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1}{J_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_2}{J_2}}$$

其中 K_1 和 K_2 是节点两边轴的扭转弹性模量.则有$\frac{K_1}{K_2} = \frac{J_1}{J_2}$.

对于圆柱形的轴,$K = \frac{\pi d^4 G}{32l}$,其中 d 为直径,G 是剪切弹性模量,l 是长度(见例 19.11).设节点离 J_1 质量的距离为 b,由

$$K_1 = \frac{\pi d^4 G}{32b} \qquad 和 \qquad K_2 = \frac{\pi d^4 G}{32(l-b)}$$

则,$\frac{K_1}{K_2} = \frac{(l-b)}{b} = \frac{J_1}{J_2}$,得到 $b = \frac{J_2 l}{(J_1+J_2)}$,即为节点位置.

对于左边部分

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1}{J_1}}$$

其中

$$K_1 = \frac{\pi d^4 G}{32b} = \frac{\pi d^4 G(J_1+J_2)}{32lJ_2},\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4 G(J_1+J_2)}{32lJ_1J_2}}$$

由于圆面积的极惯性矩为 $J = \frac{1}{32}\pi d^4$,则上式可写成

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{JG(J_1+J_2)}{J_1J_2l}}$$

注意,J_1 和 J_2 表示圆盘的质量极惯性矩,J 表示轴横截面面积的极惯性矩.

19.13　在发动机的钢轴两端,各安装了重 120 kg 的飞轮.设每个飞轮的回转半径均为 300

mm,轴的直径是 50 mm,长为 600 mm.求系统扭转振动的固有频率.

解 ☞ 每个飞轮的转动惯量是

$$J_f = mr^2 = 120(0.3)^2 = 10.8\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

轴横截面积的惯性矩是

$$J = \frac{1}{32}\pi(0.05)^4 = 6.14\times10^{-7}\ \text{m}^4$$

利用上题得到的公式,得

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{JG(J_1+J_2)}{J_1J_2l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6.14\times10^{-7}(80\times10^9)(10.8+10.8)}{0.6(10.8)(10.8)}}$$
$$=19.6\ \text{Hz}$$

19.14 直径为 2 in,长为 15 in 的钢轴,其一端连接的飞轮重 300 lb,回转半径为 6 in;另一端连接重 100 lb,回转半径为 4 in 的旋转体.求轴中的节点位置及扭转振动的固有频率?

解 ☞ 飞轮的转动惯量是 $J_f=\left(\frac{W}{g}\right)r^2=\left(\frac{300}{386}\right)(6)^2=28.0\ \text{lb-s}^2\text{-in}.$

旋转体的转动惯量是 $J_r=\left(\frac{W}{g}\right)r^2=\left(\frac{100}{386}\right)(4)^2=4.15\ \text{lb-s}^2\text{-in}.$

轴横截面极惯性矩是 $J=\frac{1}{32}\pi d^4=\frac{1}{32}\pi(2)^4=1.57\ \text{in}^4$.

由例 19.12 得出飞轮离节点的距离是 $b=\frac{J_rl}{(J_f+J_r)}=1.94$ in.

频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{JG(J_f+J_r)}{LJ_fJ_r}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1.57(12\times10^6)(28.0+4.15)}{15(4.15)(28.0)}}=94.1\ \text{cps}$$

19.15 如图 19-13(a)所示,10 lb 的均质杆左端铰接.右端连接一无重圆柱体,且圆柱体浮在水上如图示.圆柱体的横截面积是 2 in².略去水的阻尼及由水运动引起的惯性力的影响,求系统振动的固有频率.设杆在水平(平衡)位置附近微振.

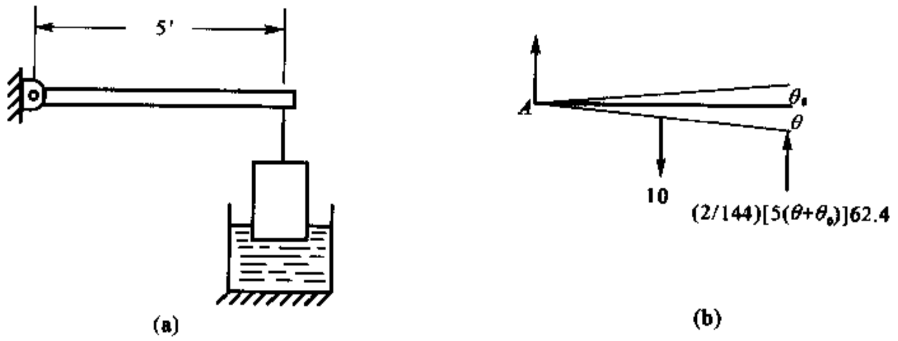


图 19-13

解 ☞ 图 19-13(b)所示,是杆的水平位置为平衡位置情形.右端的力等于排出水的重量.则关于 θ 角位移的运动方程是

$$\sum M_A = I_A\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$10\times2.5-\left(\frac{2}{144}\right)[5(\theta+\theta_0)]62.4\times5=\frac{1}{3}\left(\frac{10}{g}\right)(5)^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

在平衡状态下,力对 A 点之矩求和等于零,则有

$$10\times2.5-\left(\frac{2}{144}\right)5\theta_0\times62.4\times5=0$$

因此,得运动方程

$$-\left(\frac{2}{144}\right)5\theta\times62.4\times5=2.59\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

简化得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+8.37\theta=0$$

则有

$$\omega_n=\sqrt{8.37}=2.89\ \text{rad/s}$$

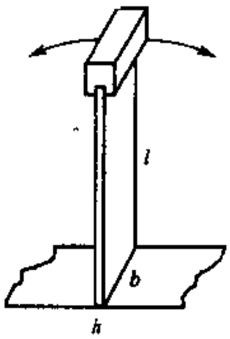


图 19-14

19.16 摆振装置是由一小悬臂梁和接在其自由端的重物组成.如果干扰力的振动频率与板簧的某一个固有频率相同,便发生振动.由于每个簧都经过校准,因此可以马上确定干扰力的频率.求需多重的 W,才能使系统的固有频率是 50 Hz? 设钢弹簧厚 0.05 in,宽 0.20 in,长 4.00 in.见图 19-14.

解 ☞ 由材料力学,悬臂梁的自由端在集中质量 m 的作用下静挠度是 $\Delta=mgl^3/3EI$,其中 E 是拉伸(或压缩时)弹性模量,I 是横截面积对中性轴的惯性矩.则有,

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{ml^2}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIg}{Wl^3}}\text{Hz}$$

其中 $f=50$ cps;$g=386\ \text{in/s}^2$;$E=30\times10^6\ \text{lb/in}^2$;$l=4.00$ in;$I=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}(0.20)(0.50)^3=2.08\times10^{-6}\ \text{in}^4$.

将这些值代入以上方程,得 $W=0.011$ lb.

自由振动——平面运动

19.17 质量 m 的均质圆盘,半径为 r,沿水平面只滚不滑.劲度系数为 k 的弹簧一端与墙连接,一端连接在圆盘中心.如果将圆盘向右拉,然后释放,试写出运动的微分方程并求出振动频率.见图 19-15.

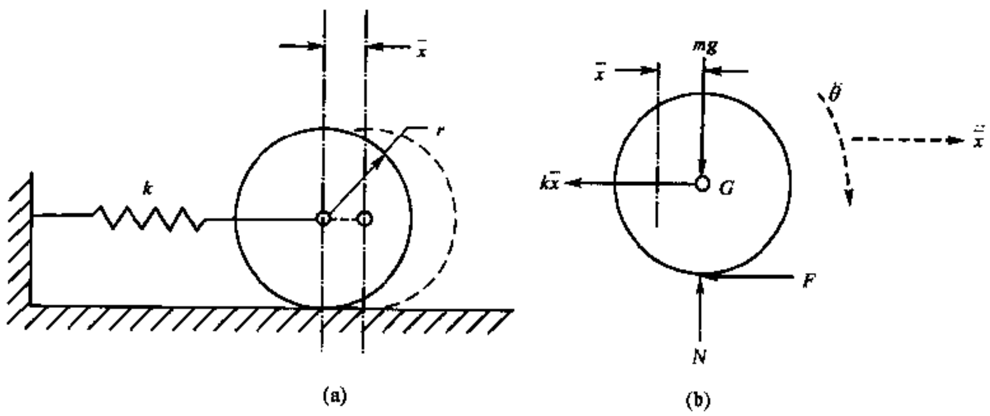


图 19-15

解 ☞ 图 19-15(b)所示为圆盘的隔离体图.运动方程为

$$\sum F_h=-F-k\bar{x}=m\ddot{\bar{x}}$$

$$\sum M_G=rF=\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

由于轮只滚不滑,则 $\ddot{\bar{x}}=r\ddot{\theta}$.

将运动方程相加得

$$-k\bar{x}=m\ddot{\bar{x}}+\frac{1}{2}m\ddot{\bar{x}}$$

或

$$\ddot{\bar{x}} + \frac{2}{3}\left(\frac{k}{m}\right)\bar{x} = 0$$

解出

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k}{3m}}\text{Hz}$$

另外，可由能量守恒理论求解.

设质心 G 相对平衡位置的位移为 $\bar{x}$. 弹簧的势能 V 为

$$V = \int k\bar{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}k\bar{x}^2$$

滚动圆盘的动能是

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$

由于能量守恒，$T + V =$ 常量，即

$$\frac{\mathrm{d}(T+V)}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(\bar{x})^2\right] = 0$$

$$m\dot{\bar{x}}\,\ddot{\bar{x}} + I_G\dot{\theta}\ddot{\theta} + k\bar{x}\dot{\bar{x}} = 0$$

由

$$\bar{x} = r\theta,\quad \dot{\bar{x}} = r\dot{\theta},\quad \ddot{\bar{x}} = r\ddot{\theta} = 0,\ I_G = \frac{1}{2}mr^2$$

得

$$m\dot{\bar{x}}\,\ddot{\bar{x}} + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\dot{\bar{x}}}{r}\right)\left(\frac{\ddot{\bar{x}}}{r}\right) + k\bar{x}\dot{\bar{x}} = 0$$

最后简化得

$$\ddot{\bar{x}} + \frac{2}{3}\left(\frac{k}{m}\right)\bar{x} = 0$$

由前面方程的结论，得

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}}\quad\text{Hz}$$

有黏性阻尼的自由振动.

19.18 劲度系数为 k 的弹簧，一端固定，一端吊住质量块 m. m 的另一端连接黏性阻尼器，如图 19-16 所示. 此阻尼力与速度成正比，即 $F = c\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$. 其中 c 为阻尼系数. 试讨论运动随阻尼系数 c 的变化规律.

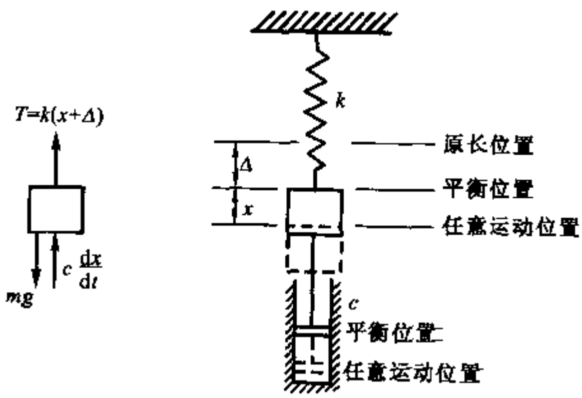


图 19-16

解 ☞ 图 19-16 给出了一些基本数据，左图的隔离体图上画出了质量块上受到的所有力，此时质量块向下运动到平衡位置以下的 x 距离.

注意到，与前面相同，在平衡位置时有 $k\Delta = mg$. 并且阻尼力 $c\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$ 与运动方向相反. 运动方程（即 $\sum F = ma$，设向下为正）为

$$mg - k(x+\Delta) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0$$

设微分方程的解的形式是 $x = A\mathrm{e}^{st}$，其中 A 和 s 是非零常量. 将此解代入方程（注意到 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = As\mathrm{e}^{st}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = As^2\mathrm{e}^{st}$），得到

$$As^2\mathrm{e}^{st} + A\frac{c}{m}s\mathrm{e}^{st} + A\frac{k}{m}\mathrm{e}^{st} = 0, \quad 即 \quad \left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{st} = 0$$

满足以上方程的，即为所需要的解. 由于 e^{st} 不等于零，因此，其系数必定等于零. 即有 $s^2 + \left(\frac{c}{m}\right)s + \frac{k}{m} = 0$.

使用二次方程求根公式，则 s 的两个解为

$$s = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

通解为

$$x = A\mathrm{e}^{\left[\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right]t} + B\mathrm{e}^{\left[\frac{-c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right]t}$$

根式的值是实数，虚数还是为零，主要取决于阻尼系数 c 的大小. 当阻尼系数 c 的值使根式之值为零时，则为临界阻尼系数 c_c. 它的值可以由根式值等于零得到，即

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

注意到 ω_n 是无阻尼系统的固有频率.

任何系统的阻尼系数 c 与临界阻尼系数 c_c 之比，称为阻尼比 d. 它可以简化运动的分析.

将 $\frac{c}{2m}$ 与 $\frac{c_c}{c_c}$ 相乘，且将 $d = \frac{c}{c_c}$ 和 $c_c = 2m\omega_n$ 代入得，

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c}\frac{c_c}{2m} = d\frac{2m\omega_n}{2m} = d\omega_n$$

则 x 的解可以写为

$$\begin{aligned} x &= A\mathrm{e}^{\left(-d\omega_n + \sqrt{d^2\omega_n^2 - \omega_n^2}\right)t} + B\mathrm{e}^{\left(d\omega_n - \sqrt{d^2\omega_n^2 - \omega_n^2}\right)t} \\ &= A\mathrm{e}^{\left(-d + \sqrt{d^2\omega_n^2 - 1}\right)\omega_n t} + B\mathrm{e}^{\left(-d - \sqrt{d^2 - 1}\right)\omega_n t} \end{aligned}$$

由 d 的取值的不同，可分为 3 种情形.

情形 A：大阻尼（$d > 1$），即方程中的根式是实数并且小于 d. 因此，两个根都是负值. x 的值是二指数的和. 当 $t = 0$ 时，$x = A\mathrm{e}^0 + B\mathrm{e}^0 = A + B$. 由解的部分曲线可看出，质量块的振动由于阻尼大，很快地衰减到初始位置，并回到平衡位置. 如图 19-17 所示. 由于没有发生周期运动，称之为衰减运动.

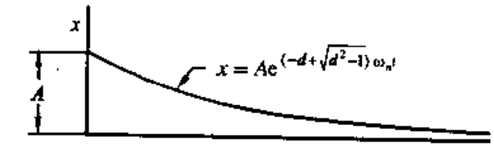


图 19-17

情形 B：小阻尼（$d < 1$），即方程中的根式是虚根. 由 $i = \sqrt{-1}$，解可以写成

$$\begin{aligned} x &= A\mathrm{e}^{\left(-d + i\sqrt{1-d^2}\right)\omega_n t} + B\mathrm{e}^{\left(-d - i\sqrt{1-d^2}\right)\omega_n t} \\ &= \mathrm{e}^{-d\omega_n t}\left(A\mathrm{e}^{i\sqrt{1-d^2}\omega_n t} + B\mathrm{e}^{-i\sqrt{1-d^2}\omega_n t}\right) \end{aligned}$$

括号中的部分可以用正弦或余弦函数表示. 即为 $x = X\mathrm{e}^{-d\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-d^2}\,\omega_n t + \phi\right)$，其中 $t = 0$ 时

$X\sin\phi$ = 位移，ϕ = 相位角.且 ω_n，d，X 和 ϕ 都是常量.解的图形曲线由正弦曲线表示，但高度是随时间连续减小的.原因是所乘的系数为 $e^{-d\omega_n t}$ 该系数随时间衰减.见图19-18.

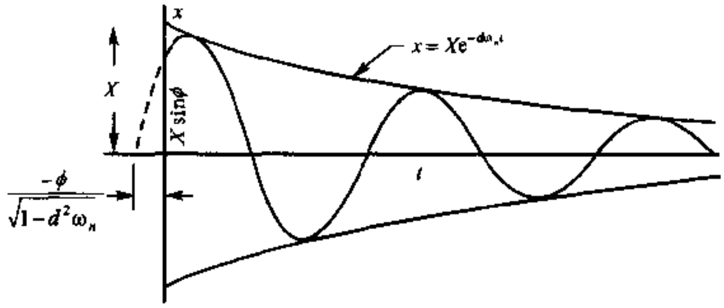


图 19-18

情形 C：临界阻尼($d = 1$)，则解可写成

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

若在上式中没有 Bt 项，则只能得到两个解中的一个.这是微分方程求解方法.

运动与情形 A 相似.

运动是衰减的.当受到临界阻尼时，很快就返回到平衡位置.

19.19　在图 19-19 中，重物 W 由劲度系数为 20 lb/in 的弹簧吊住，同时重物又与阻尼器相连.当阻尼缸中的活塞速度是 20 in/s 时阻尼力为 10 lb.重物 W 与活塞均重 12 lb，求有阻尼振动的频率是多大？

解　☞ 阻尼系数 $c = \frac{10\ \text{lb}}{20\ \text{in/s}} = 0.5\ \text{lb-s/in}$

无阻尼系统的固有频率(去掉阻尼缸中的油质)是

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{20(386)}{12}} = 25.4\ \text{rad/s}$$

临界阻尼系数由例题 19-18 得

$$c_c = \frac{2W}{g}\omega_n = \frac{2(12)}{386}(25.4) = 1.58\ \text{lb-s/in}$$

阻尼比 $d = \frac{c}{c_c} = \frac{0.5}{1.58} = 0.316$ 即小于 1.由题 19.18，此振动为小阻尼振动，则解的形式为

$$x = Xe^{-d\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-d^2}\,\omega_n t + \phi\right)$$

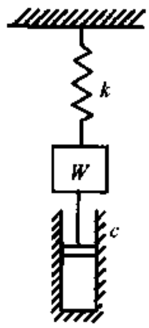


图 19-19

阻尼振动的频率 ω_d 是正弦函数中，时间 t 的系数：

$$\omega_d = \sqrt{1-d^2}\,\omega_n = \sqrt{1-(0.316)^2}(25.4) = 24.1\ \text{rad/s}$$

注意到阻尼振动的周期是$\frac{2\pi}{24.1} = 0.26$ s，并且无阻尼系统的周期是$\frac{2\pi}{25.4} = 0.25$ s.

19.20　在题 19.19 中，求振动的衰减率.

解　☞ 为了方便，重新设立新的符号，对数减幅系数 δ，即为任一次循环的两个相连振幅之比的自然对数：

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{Xe^{-d\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-d^2}\,\omega_n t + \phi\right)}{Xe^{-d\omega_n t+\tau}\sin\left[\sqrt{1-d^2}\,\omega_n(t+\tau) + \phi\right]}$$

分子表示时刻 t 的 x 值，而分母是 $t + \tau$ 时刻的值.τ 是运动的周期.因此，两个幅值出现在一次循环的两端(事实上，略去了正弦曲线与包络线 $Xe^{-d\omega_n t}$的交点并不是最大振幅这一微小差异.)

令 $\sin\left(\sqrt{1-d^2}\,\omega_n t + \phi\right) = \sin\left[\sqrt{1-d^2}\,\omega_n(t+\tau) + \phi\right]$，由于一次循环是 2πrad，因此，上面表达的 δ 简化为 $\delta = d\omega_n\tau$.

在题 19.19 中，周期 $\tau = 2\pi/\omega_d = 2\pi/24.1 = 0.261$ s.

对数减幅系数 $\delta = d\omega_n\tau = 0.316(25.4)(0.261) = 2.095$.

任意两相邻的高度比是 $e^{\delta}=e^{3.095}=8.12$.

19.21　建立图 19-20 所示系统的微分方程.并求有阻尼振动的固有频率.

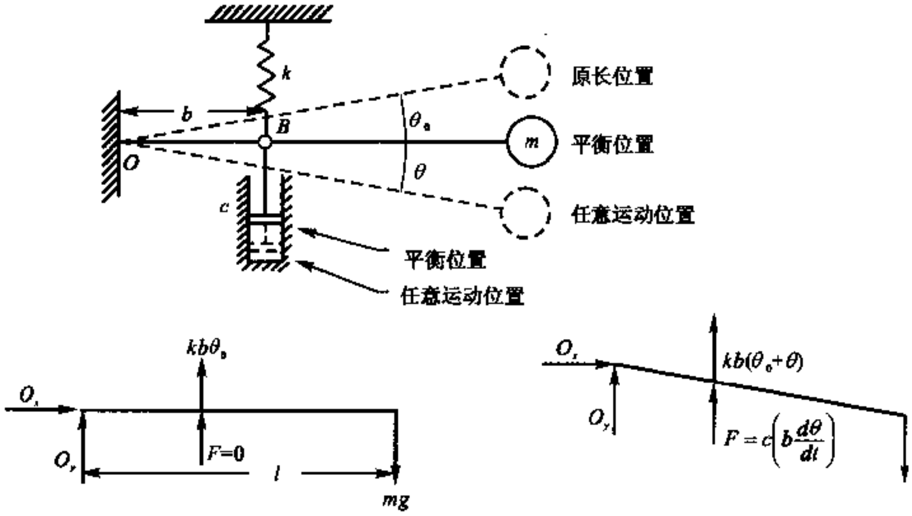


图 19-20

解 ☞ 在线性振动中,将物体相对于平衡位置的位移表示为时间 t 的函数.同样,物体转动的角位移也表示成时间 t 的函数.

物体任一运动位置的隔离体图如图示.注意到,如果臂向下运动,阻尼力与运动方向相反并向上.此力等于阻尼系数与阻尼器活塞的速度的乘积.杆上 B 点的速度,即是离 O 点距离为 b 的点的线速度,大小等于杆的角速度与 b 的乘积.

弹性力是 k 与弹簧的总线位移的乘积.此位移即为 B 点的位移,大小等于 $b(\theta_0+\theta)$.力为 $kb(\theta_0+\theta)$.

隔离体的平衡位置也如图所示.对 O 点取矩有 $kb^2\theta_0=mgl$.用此关系可简化运动微分方程.

在任意时刻,隔离体图上的力对 O 点之矩求和等于 $I_O\alpha$.对于集中质量 m,其 $I_O=ml^2$, $\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}$,因此运动方程 $\sum M_O=I_O\alpha$,变为

$$+mgl-kb^2(\theta_0+\theta)-cb^2\frac{d\theta}{dt}=ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

由于 $mgl=kb^2\theta_0$,则方程简化为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{cb^2}{ml^2}\frac{d\theta}{dt}+\frac{kb^2}{ml^2}\theta=0$$

令 $\theta=e^{st}$.则方程写成(如果 e^{st} 是一个解)

$$s^2e^{st}+\frac{cb^2}{ml^2}se^{st}+\frac{kb^2}{ml^2}e^{st}=0\quad 或\quad s=\frac{-cb^2}{2ml^2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2b^4}{m^2l^4}-\frac{4kb^2}{ml^2}}$$

当根式为零时,出现临界阻尼情况,则

$$c_c=2\frac{1}{b}\sqrt{mk}$$

当根式为负值,则产生振动.解的形式为

$$\theta=Ce^{-(cb^2/2ml^2)t}\sin\left(\sqrt{-\frac{c^2b^2}{4m^2l^4}+\frac{kb^2}{ml^2}}t+\phi\right)$$

其中 C 和 ϕ 由初始条件决定.将解与例 19.18 的情形 B 对比.

有阻尼振动的频率 ω_d 是正弦函数中时间 t 前的系数,即

$$\omega_d=\sqrt{-\frac{c^2b^2}{4m^2l^4}+\frac{kb^2}{ml^2}}=\frac{b}{l}\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{cb}{2ml}\right)^2}\ \text{rad/s}$$

19.22　均质细杆长 l,重为 W,在中点用销子铰接,如图 19-21(a)所示.求杆微振动的微分方

程，并求临界阻尼的表达式.

解 ☞ 如图 19-21(b)所示，隔离体图中顺时针的小角位移为 θ. 由运动引起的阻尼力和弹簧拉力如图所示. 对 O 点的力矩为

$$-\frac{l}{2}\left(k\frac{l}{2}\theta\right)-\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}\frac{d\theta}{dt}c\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{W}{g}\right)(l^2)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

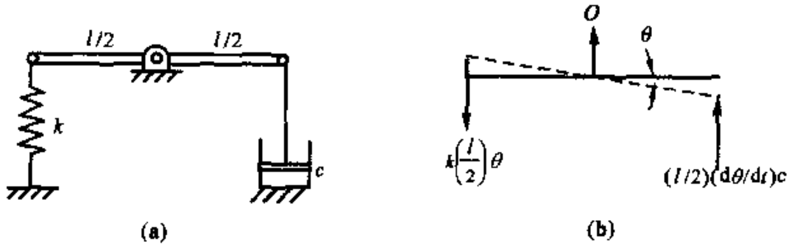


图 19-21

可简化为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{3gc}{W}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\frac{3kg}{W}\theta=0$$

设 $\theta=e^{st}$，则有

$$\frac{d\theta}{dt}=se^{st}\qquad 和\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}=s^2e^{st}$$

代入后得

$$s^2e^{st}+\frac{3gc}{W}se^{st}+\frac{3kg}{W}e^{st}=0$$

由于 e^{st}不等于零，则方程满足的条件是

$$s^2+\frac{3gc}{W}s+\frac{3kg}{W}=0$$

解得

$$s=\frac{-3gc}{2W}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3gc}{W}\right)^2-4\left(\frac{3kg}{W}\right)}$$

当根式等于零时所求出的 C，即为临界阻尼系数. 则有

$$\left(\frac{3gc_c}{W}\right)^2=\frac{12kg}{W}，或\ c_c=\sqrt{\frac{4kW}{3g}}$$

无阻尼受迫振动

19.23 在图 19-22 中，质量 m 由劲度系数为 k 的弹簧吊住. 质量上作用一周期干扰力 $F\cos\omega t$. 讨论运动规律.

解 ☞ 此系统的运动微分方程与自由振动的方程相比有一附加项，即

$$-kx+F\cos\omega t=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\frac{F}{m}\cos\omega t$$

由微分方程的理论，方程的解由两部分之和组合：(1)由前面的例题 19.1 所确定的解，即为方程右边等于零时的通解(瞬态解)和(2)使方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{kx}{m}=\frac{F}{m}\cos\omega t$$

成立的解.

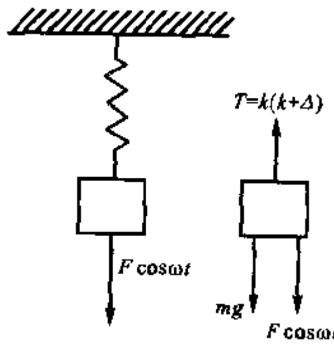


图 19-22

设第二个解，即称为稳态解，形式为 $x=X\cos\omega t$. 由$\frac{dx}{dt}=-X\omega\sin\omega t$

和$\frac{d^2x}{dt^2} = -X\omega^2\cos\omega t$

代入得

$$-X\omega^2\cos\omega t + \frac{k}{m}X\cos\omega t = \frac{F}{m}\cos\omega t$$

则 $X = \left(\frac{F}{k}\right)\left(1 - \frac{\omega^2 m}{k}\right)$.

令 Δ_F 是当力F 作用在弹簧上时,弹簧的静变形量,即 $\Delta_F = \frac{F}{k}$.注意到 $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$,其中 ω_n 是系统的固有频率.

则 X 可以写成

$$\frac{\Delta_F}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

为了便于分析,令$\frac{\omega}{\omega_n} = r$,则稳态解是

$$x = \frac{\Delta_F}{1-r^2}\cos\omega t$$

其频率与干扰力频率相同.

方程的全解为

$$x = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{1}{1-r^2}\Delta_F\cos\omega t$$

其中的第一项和第二项代表自由振动的解,具有瞬态的特征.由于任何系统总是有阻尼的,因此这个振动总是衰减的.则只研究解

$$x = \Delta_F\frac{1}{1-r^2}\cos\omega t$$

它的最大值出现在 $\cos\omega t = 1$ 的情况下,即等于$\frac{\Delta_F}{(1-r^2)}$,该值也称为振幅.稳态解的振幅与 F 引起的静态变形量 Δ_F 之比,称为放大因子.它的值是

$$\frac{\Delta_F/(1-r^2)}{\Delta_F} = \frac{1}{1-r^2}$$

由于 $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n}$,上式可写成

$$\frac{1}{1-(f/f_n)^2}$$

它的值是正还是负,取决于 f 是否小于 f_n.当 $f = f_n$ 时,发生共振,此时理论上振幅趋于无穷大.事实上,阻尼总是存在的,因此振幅不能达到极值.

放大因子与频率比的关系曲线如图 19-23 所示.

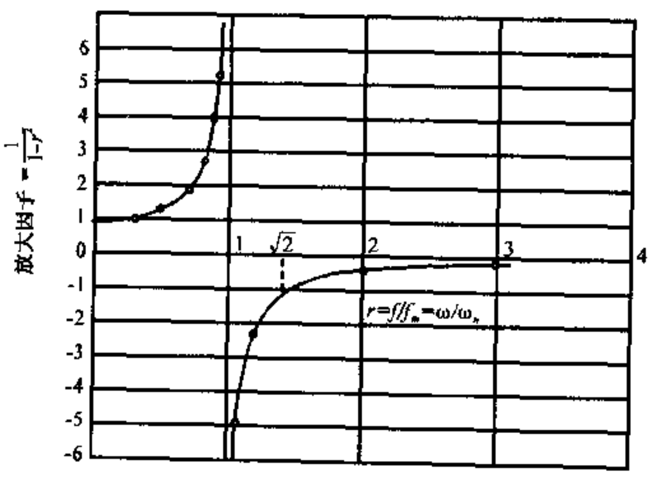


图 19-23

当 $r>1$ 时,出现负值.负值表明力 F 的方向与位移方向相反.

注意到当 $r=\sqrt{2}$时,放大因子是

$$\frac{1}{1-(\sqrt{2})^2}=-1$$

表明比值 $r>\sqrt{2}$时,放大因子小于 1.即在干扰力作用下使运动减弱.

19.24　9 N 的简谐干扰力作用在 5 kg 质量上.支承质量的弹簧的劲度系数是 6 N/mm.求质量块的振幅是多大?设干扰力频率是(a)1 Hz,(b)5.40 Hz,(c)50 Hz.

解　☞ 系统的固有频率是

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6000}{5}}=5.51\ \text{Hz}$$

干扰力使弹簧的静变形量为 $\Delta_F=\frac{9}{6}=1.5$ mm.

(a) 频率比 $r=\frac{f}{f_n}=\frac{1}{5.51}=0.185$.因此,振幅为 $\Delta_F/(1-r^2)=1.5(1-0.0329)=1.551$ mm.

(b)$r=\frac{5.40}{5.51}$,则振幅是 37.9 mm.

(c)$r=\frac{50}{5.51}$,则振幅是 -0.018 mm.注意到在这种情况下振幅与力的方向相反,因此可略去大小不计.

19.25　重 60 lb 的冰箱由 3 根弹簧支撑,每根的弹簧的劲度系数都为 k lb/in.压缩机转速 600 rpm.如果有$\frac{1}{12}$的干扰力传到箱体,求 k 值是多大?

解　☞ 设传递干扰力与冰箱振动的振幅成正比,因为理论上讲,传到支承弹簧上的力与其变形成正比.此变形等于冰箱振动的振幅.

由题 19.23 知,稳态振动的振幅与干扰力作用下的静变形(本题为 $-\frac{1}{12}$)之比等于$\frac{1}{(1-r^2)}$.注意到弹簧的固有频率小于干扰力的频率,因此比值为负.由题 19.23,放大因子在线以下.

则有 $-\frac{1}{12}=\frac{1}{(1-r^2)}$,得 $r^2=13$,$r=\frac{f}{f_n}=\sqrt{13}$和 $f_n=(600/60)/\sqrt{13}=2.77$ cps.设 W 作用在一个弹簧上,$f_n=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{kg}{W}}$.则

$$2.77=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(386)}{20}}$$

解出 $k=15.7$ lb/in.

有阻尼的受迫振动

19.26　图 19-24(a)中,质量块 m 由劲度系数为 k 的弹簧吊住,并与黏性阻尼器连接.讨论质

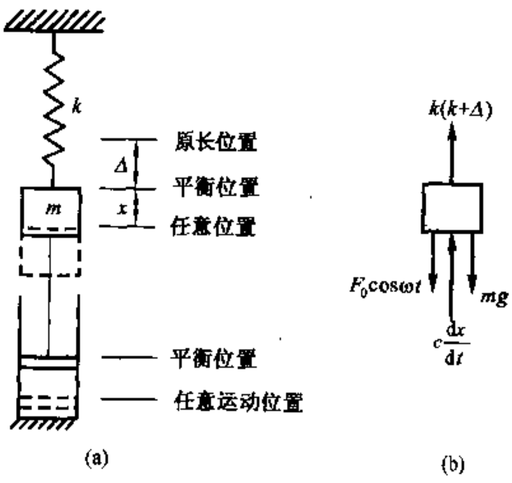


图 19-24

量块 m 受到简谐干扰力 $F_0\cos\omega t$ 作用的运动规律.

解 ☞ 在图 19-24(b)所示的隔离体图上,画出了质量块的所有作用力.设向下运动为正,运动方程为

$$\sum F = ma$$

即

$$mg + F_0\cos\omega t - k(x+\Delta) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

由以上问题知,隔离体在平衡位置时有 $mg - k\Delta = 0$.即,运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

如例题 19.23 中,略去瞬态解.则稳态解是

$$x = \frac{F_0\cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad 和 \quad \tan\phi = \frac{c\omega/k}{1 - m\omega^2/k}$$

研究运动的振幅 X,振幅 X 可写成

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - m\omega^2/k)^2 + (c\omega/k)^2}}$$

上式可进一步简化.F_0/k 为干扰力作用下弹簧的静位移 ΔF_0.同时,$\frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_n^2}$,$\omega_n$ 为系统的无阻尼固有频率(单位 rad/s).若是给定的阻尼系数 c 与临界阻尼系数 c_c 的比值,则根式中的最后一项可写成

$$\frac{c\omega}{k} = \frac{c}{c_c}\frac{c_c\omega}{k} = d\frac{c_c\omega}{k}$$

但临界阻尼系数 $c_c = 2m\omega_n$,见题 19.18.则根式中最后一项可写为

$$d(2m\omega_n)\frac{\omega}{k} = d\left(2\frac{\omega_n\omega}{\omega_n^2}\right) = 2rd$$

其中 $r = \omega/\omega_n$.则

$$\frac{X}{\Delta_{F_0}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2rd)^2}} \quad 和 \quad \tan\phi = \frac{2rd}{1 - r^2}$$

$\frac{X}{\Delta_{F_0}}$的比值被称作放大因子.

如图 19-25 所示,由放大因子与频率比的关系曲线可以看出,在 $r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1$ 附近,出现峰值,而这些峰值高度与阻尼大小有关.

注意到,图中在 r 略小于 1 的频率比上出现峰值.r 的精确值可由$\frac{X}{\Delta_{F_0}}$对 r 的导数等于零得到

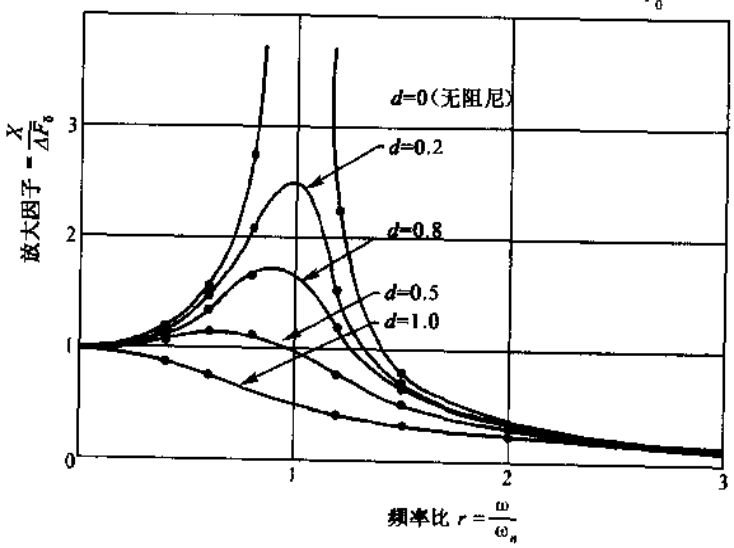


图 19-25

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{X}{\Delta_{F_0}}\right) = -\frac{1}{2}[(1-r^2)^2+(2rd)^2]^{-1/2}[2(1-r^2)(-2r)+2(2rd)2d] = 0$$

根式不能等于零，因此，只有，$2(1-r^2)(-2r)+2(2rd)2d=0$ 或 $r(r^2+2d^2-1)=0$.

对应峰值幅度的解是 $r=\sqrt{-2d^2+1}$.

图 19-26 所示，是初相位角 ϕ 随阻尼系数变化的曲线族.

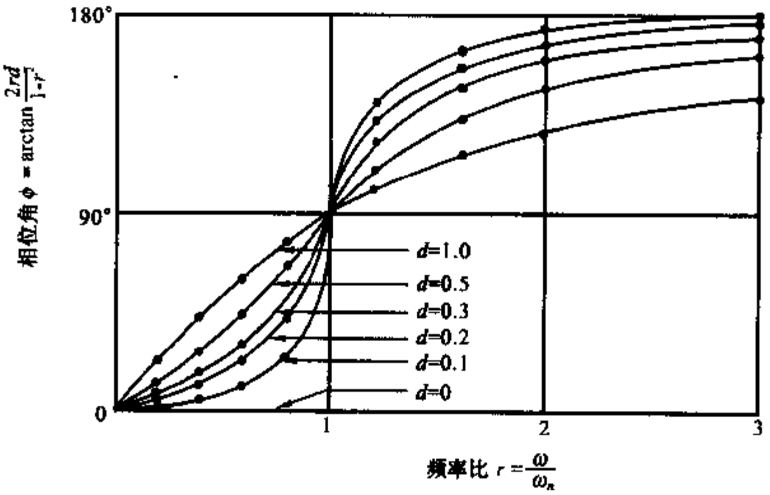


图 19-26

19.27 马达置于弹簧上，马达飞轮的偏心距 e 上附于一小质量 m，如图 19-27 所示. 每个弹簧劲度均为 k. 黏性阻尼系数 c. 如果马达的总质量与小质量共为 M，研究系统由于偏心质量 m 引起的干扰力的作用的运动规律.（本题意在说明不平衡转子的作用效果）.

解 图示的转动位置，质量 m 位于中心线以下 $e\sin\omega t$ 的距离. 设向下为正，则质量 m 的绝对位移是其相对中心线铅直位移（$e\sin\omega t$）与中心线的绝对位移 x 的和. 即 $x_1 = x + e\sin\omega t$.

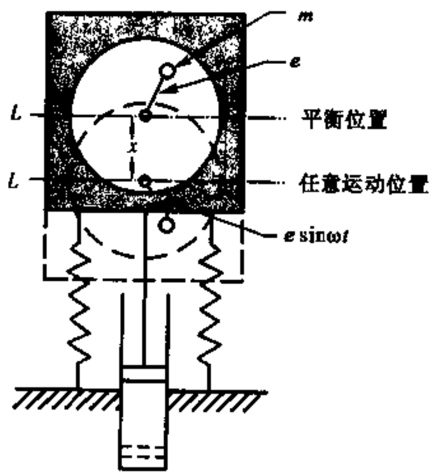


图 19-27

设电机作用在质量块 m 上的不平衡力 F 产生的加速度为 $\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}$，则

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2(x+e\sin\omega t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$= m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - me\omega^2\sin\omega t$$

不考虑小质量 m，马达的运动方程是

$$-F-kx-c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (M-m)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

由于质量 m 作用在马达上的不平衡力总是与马达作用在 m 上的力方向相反，因此 F 用负的符号. 将 F 值代入，并化简，则马达的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{c}{M}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{M}x = \frac{m}{M}e\omega^2\sin\omega t$$

若将 F_0 用 $me\omega^2$ 替换，则所得微分方程与题 19.26 中相同. 马达中心线运动的振幅是

$$X = \frac{(m/M)e(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+(2d\omega/\omega_n)^2}} \quad 和 \quad \tan\theta = \frac{2d\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

其中，ω 是干扰力频率即马达转速用 rad/s 表示；

ω_n 是弹簧支承系统的固有频率；

d 是阻尼比；

θ 是相位角.

共振时,上式可简化成 $X=(me/M)2d$. 当 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 趋于无穷大时,则极限值为 $X=me/M$.

系统的质心 G 离马达几何中心的距离为 b,其 b 可以通过马达质量与小质量 m 对 O 点取矩得到. 见图 19-28.

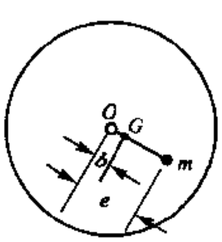


图 19-28

即为 $bM=em$,得 $b=em/M$,当 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 趋于无穷大时,此值等于 X. 因此,高速马达 $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\text{很大}\right)$,则中心线位移 X 的大小等于 b 的大小. 同时,当 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 很大时,由 θ 值的方程,即

$$\tan\theta=\frac{2d\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

可见,其 θ 趋于 180°. 因此,位移 $X=b$, $\theta=180°$.

由图中的几何关系,质心 G 的绝对位移等于中心线的绝对位移与质量 m 相对于中心线的相对位移之和,即

$$x_G=X\sin(\omega t-180°)+b\sin\omega t=-b\sin\omega t+b\sin\omega t=0$$

显然,马达在高速旋转时,质心不动.

19.28 弹簧-质量系统中,受到变频干扰力的作用. 共振振幅是 12 mm. 当干扰频率非常高时,振幅几乎恒定等于 1.3 mm. 求系统的阻尼比 d 是多少?

解 ☞ 共振时, $X=\left(\frac{me}{M}\right)/2d$, 并且在高频时, $X=\frac{me}{M}$, 则 $\frac{me}{M}=1.3$ mm. 将数据代入第一个方程, $12=\frac{1.3}{2d}$, 得 $d=0.054$.

补充习题

19.29 5 kg 质量块振动,其简谐运动规律是 $x=X\sin\omega t$. 如果振幅 $X=100$ mm,且质量每分钟振动 1750 次,求质量块的最大加速度.

答案: $a=3360\ \text{m/s}^2$.

19.30 圆柱体绕固定轴扭转振动的频率是 10r/min. 如果运动方程是简谐的,并且振幅为 0.10 rad,求最大加速度 rad/s^2.

答案: $\alpha=0.11\ \text{rad/s}^2$.

19.31 一仪器重 4.4 lb,安放在 4 个橡胶垫上,每个橡胶垫的劲度系数均相等,即对每磅载荷产生 0.125 in 的变形. 求振动的固有频率是多少 Hz?

答案: $f=8.44$ Hz.

19.32 直径为 5 in 的圆木长为 5 ft,比重是 50 lb/ft^3. 如果将其垂直地漂浮在水中,并在平衡位置向下移动,求振动周期是多大?

答案: $\tau=2.21$ s.

19.33 有一水平简支梁长 l,在其中点附一质量 m,求铅直振动的固有频率. 略去梁的质量. 设梁上 m 点的挠度是 $\frac{mgl^3}{48EI}$.

答案: $f=(2/\pi)\sqrt{3EI/ml^3}$ Hz.

19.34 100 g 的质量块固结在长 150 mm 的铅直金属丝的中点. 且金属丝中的张力是 15 N. 令质量块水平移动后释放,求其振动周期是多大?

答案: $\tau=0.1$ s.

19.35 单摆由质量为 m 的小摆坠与一长 l 的绳连接组成. 证明,微振动的固有频率是 $(1/2\pi)\sqrt{g/l}$ Hz.

19.36 见图 19-29. 劲度系数为 k 的弹簧吊住质量 m 块,另一端连在长为 l 的悬臂梁上,求此组合系统的固有频率. [提示:作用在 m 上的单位力,将引起总的偏转距离是 $1/k+1/(3EI/l^3)$.]

答案: $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIk}{m(3EI+kl^3)}}$ Hz.

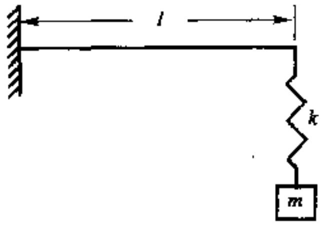


图 19-29

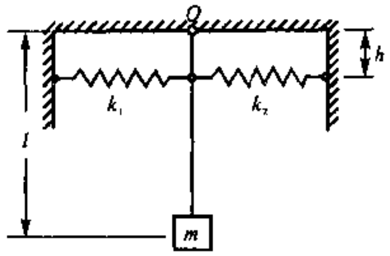


图 19-30

19.37 求如图 19-30 所示的单摆系统的固有频率.弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2,且弹簧原长时为平衡位置.略去杆的重.提示:摆在任意位置受到重力 mg 和弹性力的合力的作用.

答案:$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{mgl+(k_1+k_2)/h^2}{ml^2}}$Hz.

19.38 在图 19-31 中,重物 $W=12$ lb,弹簧的劲度系数 $k=30$ lb/in.略去曲杆的重,求系统的频率是多少 cps.

答案:$f=1.65$ cps.

19.39 如图 19-32 所示,细直杆质量为 7 kg,长 1200 mm.弹簧的劲度系数是 350 N/m.求系统微振动的频率.

答案:1.87 Hz.

19.40 具有转动惯量为 J_O 的圆盘,固连在细直轴上(或钢丝),其扭转劲度 K.K 是使轴扭转 1 弧度所必需的扭矩.使轴扭转小角度后释放,求振动的频率是多大?见图 19-33.

答案:$f=(1/2\pi)\sqrt{K/J_O}$Hz.

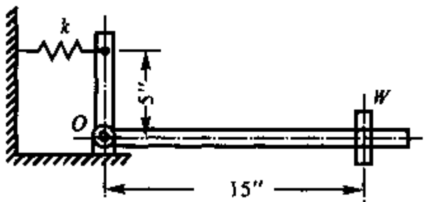


图 19-31

19.41 钢制圆盘直径 100 mm,厚度 3 mm,并与一钢丝绳刚性连接.钢丝绳长 500 mm,直径 0.8 mm,求此扭摆的固有频率是多大?

答案:0.84 Hz.

19 42 发动机中的飞轮重 150 lb,现将两相同飞轮连接在具有 2 in 直径的钢轴两端.设两飞轮相距 2 ft,试求系统扭转振动的固有频率是多少 cps? 飞轮的回转半径是 8.8 in, $G=12\times10^6$ psi.

答案:3.63 cps.

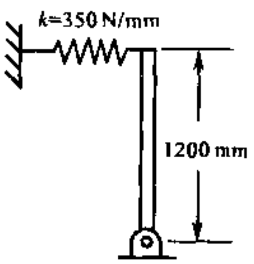


图 19-32

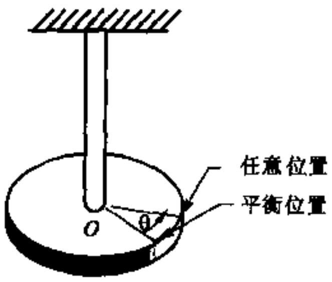


图 19-33

19.43 均质圆柱如图 19-34 所示,其质量为 60 kg,直径为 1200 mm.当直径是水平时,即图示位置系统平衡.如图示弹簧铅直,且劲度系数 $k=2$ N/mm.求系统微振动的频率.

答案:1.41 cps.

19.44 在题 19.43 中,将一黏性阻尼器连接在圆柱体质心上.令圆柱体顺时针转动 5°,然后从静止释放.阻尼系数是临界阻尼系数的 1/10.求圆柱体在 $t=2$ s 时的角位移和阻尼系数.

答案:$c=17$ N·m/s, $\theta=0.013$ rad 顺时针.

19.45 在题 19.37 中,阻尼系数为 c 的水平阻尼器替换劲度系数为 k_2 的弹簧.写出临界阻尼系数的表达式.

答案：$c_c = \frac{2ml^2}{h^2}\sqrt{\frac{kh^2}{ml^2}+\frac{g}{l}}$.

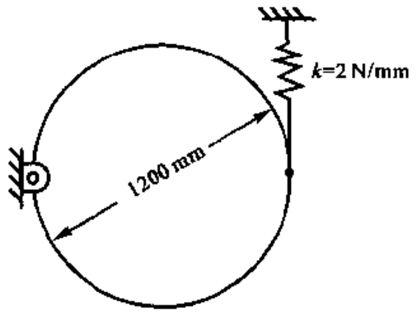


图 19-34

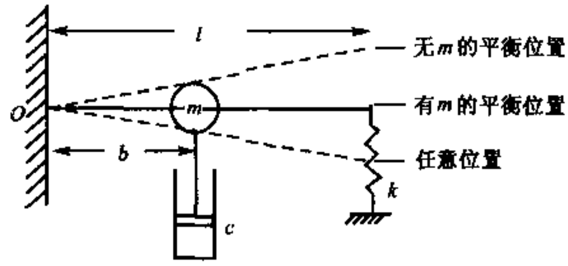


图 19-35

19.46 3 kg 的质量块连在劲度系数 $k=2.5$ N/mm 的弹簧上.求临界阻尼系数.

答案：$c_c = 1.73$ N·s/m.

19.47 求图 19-35 所示系统的阻尼频率.

答案：$\omega_d = \sqrt{\frac{kl^2}{mb^2}-\frac{c^2}{4m^2}}$ rad/s.

19.48 一振动系统由 5 kg 质量，劲度系数 $k=3.5$ N/mm 弹簧和阻尼常数 $c=100$ N·s/m的阻尼器组成.求(a)阻尼比 d；(b)阻尼固有频率 ω_d；(c)对数减幅系数 δ；(d)任意相邻振幅的比.

答案：(a) $d=0.378$，(b) $\omega_d=24.5$ rad/s，(c) $\delta=2.56$，(d) 振幅比 = 13.0.

19.49 在两弹簧中连接重 W 的物块，如图 19-36 所示，试写出其运动微分方程式.设重物 W 上作用简谐干扰力 $F=F_0\sin\omega t$.

答案：$\frac{d^2x}{dt^2}+(k_A+k_B)\frac{gx}{W}=\frac{F_0 g}{W}\sin\omega t$.

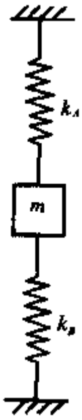


图 19-36

19.50 一重为 200 lb 的机器，置放在 3 根弹簧上，每根弹簧的劲度系数均为 $k=$ 60 lb/in. 5 lb 的简谐干扰力作用在机器上.求(a)共振频率和(b)如果干扰力频率是200 r/min，则机器离平衡位置的最大距离是多少？略去阻尼的影响.

答案：(a) $f=2.97$ cps，(b) 0.106 in.

19.51 弹簧-质量系统上作用变频简谐干扰力.共振振幅是 0.82 in.当干扰频率很大时，质量块几乎不动，观察其振幅只有 0.07 in.求系统的阻尼比 d 为多大？

答案：$d=0.043$.

19.52 弹簧-质量系统上作用有变频简谐干扰力.共振振幅是 20 mm.当干扰力频率很大时，质量几乎不动，观察其振幅只有 2 mm.求系统的阻尼比为多大？

答案：$d=0.05$.

19.53 在题 19.49 中，令 $k_A=k_B=10$ lb/in，$W=16$ lb，$F=12$ lb，并且干扰力频率 $f=1.2$ Hz.求系统固有频率、放大因子及质量块最大位移.

答案：$f_n=3.49$ Hz，$MF=1.13$，$x_{max}=0.68$ in.

19.54 在题 19.38 中，将力 $8\cos\omega t$ 铅直作用在重物 W 上.若放大因子不大于 2，则求力函数的最大频率.

答案：$f=1.17$ Hz.

19.55 马达重 60 lb，置放在 4 根弹簧上.每根弹簧的劲度系数均为 $k=30$ lb/in.系统的阻尼系数为 c.求不发生振动的最小阻尼数 c.

答案：$c_{min}=8.64$ lb-s/in.

19.56 质量为 M 的小船模型在水箱中.小船的两端分别由劲度系数为 k 的弹簧连接.使小船移动并产生振动.其阻尼振动周期是 3/4 s，两相邻振幅的比是 3/7.求水箱中流体的阻尼系数.

答案：$c=2.27M$.

19.57 质量为 1/2 slug 的球，放在液体中并与劲度系数为 $k=4$ lb/ft 的弹簧相连，已知液体的阻尼系数是 5 lb-s/ft. 如果初位移是 1/2 ft，求 3 s 后球离平衡位置的距离.

答案：$x=0.44$ in.

19.58 在上题中，求需多长时间，球的位移达到(a)初位移的 1/10 和(b)初位移的 1/100.

答案：(a)2.62 s，(b)5.26 s.

附录 A　SI 单位制

国际单位制(简称 *SI*)有 3 类单位——基本单位、辅助单位和导出单位.7 个基本单位和 2 个辅助单位列在后面.也列出了用于力学中有专有名称及无专有名称的导出单位.

基本单位

量	名　称	符　号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
温度	开尔文	K
物质的量	摩尔	mol
发光强度	坎德拉	cd

辅助单位

量	名　称	符　号
平面角	弧度	rad
球面角	球面度	sr

导出单位

量	名　称	符　号	公　式
力	牛顿	N	$kg\cdot m/s^2$
频率	赫兹	Hz	1/s
能,功	焦耳	J	$N\cdot m$
功率	瓦特	W	J/s
应力,压力	帕斯卡	Pa	N/m^2

导出单位(在力学中使用)

量	名　称	符　号
加速度	米/秒^2	m/s^2
角加速度	弧度/秒^2	rad/s^2
角速度	弧度/秒	rad/s
面积	米^2	m^2
密度	千克/米^3	kg/m^3
力矩	牛顿·米	$N\cdot m$
速度	米/秒	m/s
体积	米^3	m^3

SI 词头

乘数因子	词　头		符号
	英文	中文	
$1\ 000\ 000\ 000=10^9$	giga	吉[咖]	G
$1\ 000\ 000=10^6$	mega	兆	M
$1\ 000=10^3$	kilo	千	k
$0.001=10^{-3}$	milli	毫	m
$0.000\ 001=10^{-6}$	micro	微	μ

换算因数

由	变换到	乘　以
degree (angle)	radian (rad)	1.745 329 E − 02*
foot	meter (m)	3.048 000 E − 01
ft/min	meter per second (m/s)	5.080 000 E − 03
ft/s	meter per second (m/s)	3.048 000 E − 01
ft/s^2	meter per second^2 (m/s^2)	3.048 000 E − 01
ft-lbf	joule (J)	1.355 818 E + 00
ft-lbf/s	watt (W)	1.355 818 E + 00
horsepower	watt (W)	7.456 999 E + 02
inch	meter (m)	2.540 000 E − 02
km/h	meter per second (m/s)	2.777 778 E − 01
kW·h	joule (J)	3.600 000 E + 06
kip(1000 lb)	newton (N)	4.448 222 E + 03
liter	meter^3 (m^3)	1 000 000 E − 03
mile(international)	meter (m)	1.609 344 E + 03
mile (U S. survey)	meter (m)	1.609 347 E + 03
mi/h (international)	meter per second (m/s)	4.470 400 E − 01
ounce − force	newton (N)	2.780 139 E − 01
ozf·in	newton meter (N·m)	7.061 552 E − 03
pound (lb avoirdupois)	kilogram (kg)	4.535 924 E − 01
slug·ft^2(moment of inertia)	kilogram meter^2 (kg·m^2)	4.214 011 E − 02
lb/ft^3	kilogram per meter^3 (kg/m^3)	1.601 846 E + 01
pound-force (lbf)	newton (N)	4.448 222 E + 00
lbf-ft	newton meter (N·m)	1.335 818 E + 00
lbf-in	newton meter (N·m)	1.129 848 E − 01
lbf/ft	newton per meter (N/m)	1.459 390 E + 01
lbf/ft^2	pascal (Pa)	4.788 026 E + 01
lbf/in	newton per meter (N/m)	1.751 268 E + 02
lbf/in^2(psi)	pascal (Pa)	6.894 757 E + 03
slug	kilogram (kg)	1.459 390 E + 01
slug/ft^3	kilogram per meter^3 (kg/m^3)	5.153 788 E + 02
ton (2000 lb)	kilogram (kg)	9.071 847 E + 02
W·h	joule (J)	3.600 000 E + 03

* E − 02 表示乘 10^{-2}

附录B　一次矩和形心

线

种类	图形	长度	Q_x	Qy	$\bar{x}$	$\bar{y}$
直线	1	L	$\frac{1}{2}L^2\sin\theta$	$\frac{1}{2}L^2\cos\theta$	$\frac{1}{2}L\cos\theta$	$\frac{1}{2}L\sin\theta$
$\frac{1}{4}$圆弧	2	$\frac{1}{2}\pi r$	r^2	r^2	$2r/\pi$	$2r/\pi$
半圆弧	3	πr	$2r^2$	0	0	$2r/\pi$
弓	4	$r\alpha$	0	$2r^2\sin\frac{1}{2}\alpha$	$\left(r\sin\frac{1}{2}\alpha\right)/\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$	0

平面表面积

种类	图形	面积	Q_x	Q_y	$\bar{x}$	$\bar{y}$
三角形	5	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{6}bh^2$	$\frac{1}{6}b^2h$	$\frac{1}{3}b$	$\frac{1}{3}h$
$\frac{1}{4}$圆	6	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{1}{3}r^3$	$\frac{1}{3}r^3$	$4r/3\pi$	(1) $4r/3\pi$
$\frac{1}{4}$椭圆	7	$\frac{1}{4}\pi ab$	$\frac{1}{3}ab^2$	$\frac{1}{3}a^2b$	$4r/3\pi$	(2) $4b/3\pi$
扇形	8	$\frac{1}{2}{}^{2}\alpha$	0	$\frac{2}{3}r^3\sin\frac{1}{2}\alpha$	$\left(2r\sin\frac{1}{2}\alpha\right)/\left(\frac{3}{2}\alpha\right)$	0

体积

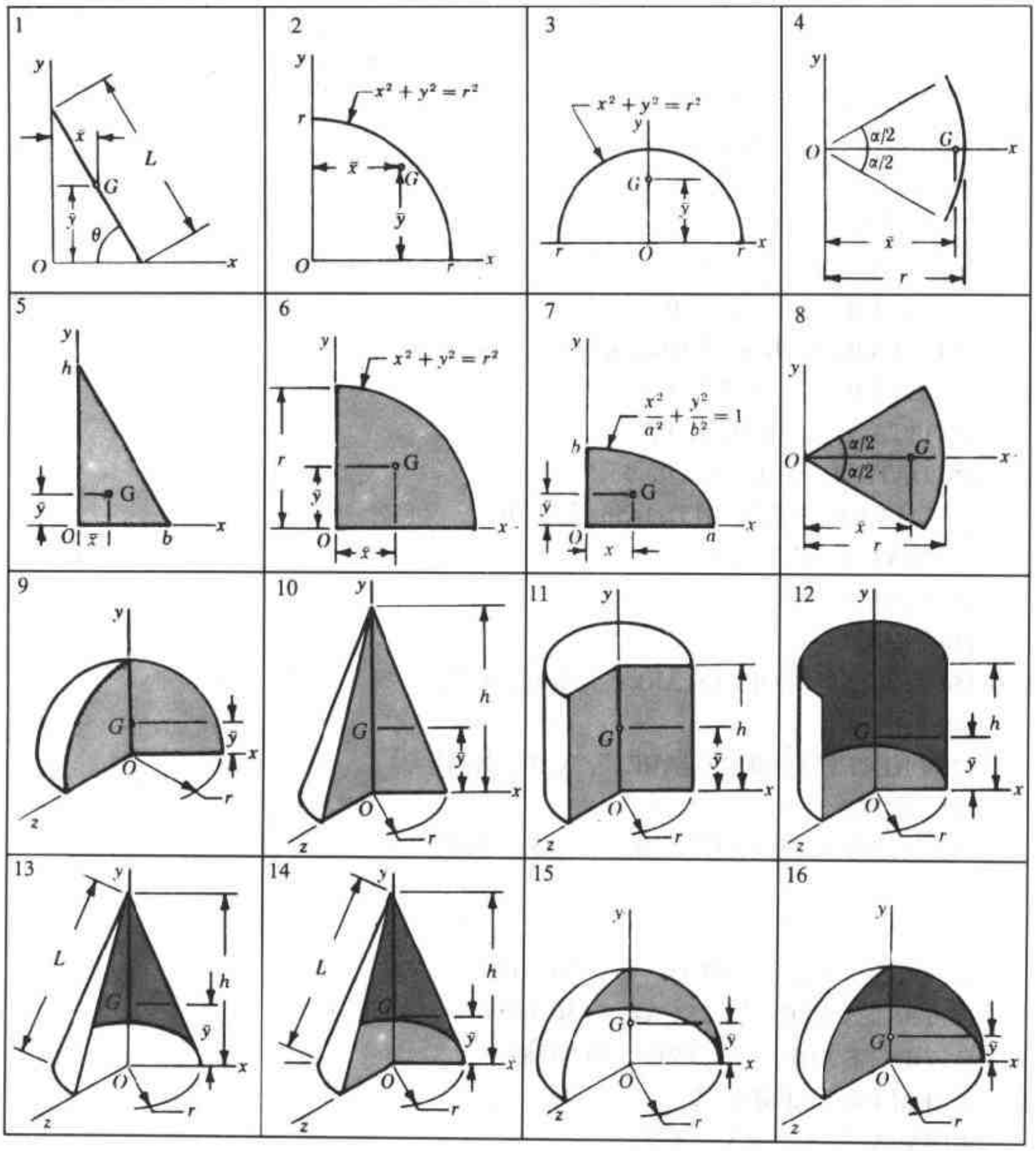
种类	图形	体积	Q_{xz}	$\bar{y}$
半球	9	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{4}\pi r^4$	$\frac{3}{8}r$
圆锥	10	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	$\frac{1}{12}\pi r^2h^2$	$\frac{1}{4}h$
圆柱体	11	πr^2h	$\frac{1}{2}\pi r^2h^2$	$\frac{1}{2}h$

曲表面面积

种　类	图形	面积	Q_{xz}	$\bar{y}$
圆柱体及底面积	12	$\pi r(2h+r)$	πrh^2	$h^2/(2h+r)$
圆柱体及上、下表面积	无	$2\pi r(h+r)$	$h\pi r(h+r)$	$\frac{1}{2}h$
圆锥面积	13	πrL	$\frac{1}{3}\pi rLh$	$\frac{1}{3}h$
圆锥及底面积	14	$\pi r(L+r)$	$\frac{1}{3}\pi rhL$	$\frac{1}{3}h(1+r/L)$
半球表面积	15	$2\pi r^2$	πr^3	$\frac{1}{2}r$
半球及底面积	16	$3\pi r^2$	πr^3	$\frac{1}{3}r$

(1)对于半圆面积以 x 轴为底.

(2)对于半椭圆面积以 x 轴为底.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
$x^2 + y^2 = r^2$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
α/2
L
G
θ
O
h
r
a
b

附录 C 部分习题的计算机解

5.18
```
10 REM PROBLEM 5-18
20 DIM A[6, 6], X[6], B[6]
30 MAT READ A
40 MAT READ B
50 DATA 0, 0, 0, 1, 0, 1
60 DATA 0, 0, 1, 0, 1, 0
70 DATA 0, 0, 0, 0, 3.662, 3.662
80 DATA 0, 0, -5.77, 0, 0, 0
90 DATA 5.77, 0, 0, 0, 0, 0
100 DATA 0, 1, 0, -1, 0, 0
110 DATA 0, -223, 315, 1456, 852, 0
120 MAT A=INV(A)
130 MAT X=A * B
140 PRINT
150 PRINT "B FORCES ARE:", X[1], X[2]
160 PRINT
170 PRINT "D FORCES ARE:", X[3], X[4]
180 PRINT
190 PRINT "C FORCES ARE:", X[5], X[6]
200 END

B FORCES ARE:  147.66     -56.6789
D FORCES ARE:  -252.34    -56.6789
C FORCES ARE:  29.3397    56.6789
```

6.8
```
10 REM PROBLEM 6-8
20 DIM A[3, 3], B[3], X[3]
30 A[1, 1]=-3/SQR (34)
40 A[1, 2]=-3/SQR (41)
50 A[1, 3]=-3/5
60 A[2, 1]=-4/SQR (34)
70 A[2, 2]=-4/SQR (41)
80 A[2, 3]=4/5
90 A[3, 1]=3/SQR (34)
100 A[3, 2]=-4/SQR (41)
110 A[3, 3]=0
120 B[1] = -100, B[2]=0, B[3]=0
130 MAT A=INV(A)
140 MAT X=A * B
150 PRINT "FORCES ARE:"
160 MAT PRINT X
```

```
FORCES ARE:
55.5329    45.7366    83.3333
```

7.12

```
10 REM PROBLEM 7-12
20 REM NEWTON-RAPHSON ITERATION FOR A ROOT OF F(X)
30 DEF FNF (X)=X+50-X*CSH(500/(2 *X))
40 DEF FND (X)=1+X* (SNH(500/(2*X))*(500/(2*X*X)))-CSH (500/2
*X))
50 PRINT
60 PRINT "ENTER APPROX ROOT";
70 INPUT X0
80 PRINT
90 PRINT "ENTER ABSOLUTE ERROR";
100 INPUT E
110 N=8
120 PRINT
130 FOR I=1 TO N
140 IF FND(X0) < > 0 THEN 170
150 PRINT "DERIVATIVE OF FUNCTION IS ZERO-TRY AGAIN"
160 GOTO 60
170 X=X0-FNF (X0)/FND (X0)
180 NEXT I
190 IF X< >0 THEN 220
200 PRINT "POSSIBLE ZERO FOUND FOR ROOT"
210 GOTO 270
220 IF ABS((X-X0)/X) < E THEN 270
230 X0=X, N=2*N
240 IF N< =1028 THEN 130
250 PRINT "UNABLE TO CONVERGE TO DESIRED ACCURACY"
260 STOP
270 PRINT LIN(1), "THE ROOT IS"; X; "THE FUNCTION IS"; FNF(X)
290 END
ENTER APPROX ROOT? 635
ENTER ABSOLUTE ERROR?.001
THE ROOT IS 633.163 THE FUNCTION IS 1.22070E-04
```

12.22

```
10 CLS
20 DIM TABLE (10, 2)
30 INPUT "ENTER LENGTH OF THE CHAIN:"; L
40 INPUT "ENTER BASE AMOUNT OF OVERHANG:"; C
50 INPUT "ENTER BASE TIME:"; T
60 COUNT=1:
70 IF COUNT> 10 THEN GOTO 200
80     HALF =.5 * C
90     EX=SQR((32.2/L) * T)
100     EXI=-SQR((32.2/L) * T)
110     A =(EXP(EX))
```

```
120     B =(EXP(EX1))
130     X =HALF * (A+B)
140 TABLE (COUNT, 1)=X
150 TABLE (COUNT, 2)=T
160 PRINT TABLE(COUNT,2), TABLE(COUNT, 1)
170 COUNT=COUNT+1
180 T=T+.1
190 GOTO 70
200 END
```

由输入的数据,此程序可得到结果如下.

```
ENTER LENGTH OF THE CHAIN:? 10
ENTER BASE AMOUNT OF OVERHANG:? 1
ENTER BASE TIME:?                          .1
 .1                                        1.165367
 .2                                        1.339656
 .3                                        1.523155
 .4                                        1.71616
 .5                                        1.91897
 .6                                        2.131895
 .7000001                                  2.35525
 .8000001                                  2.589356
 .9000001                                  2.834544
 1                                         3.091151
Ok
```

14.9

```
10 REM PROBLEM 14-9
20 REM L=ROD LENGTH
30 REM T=ANGLE
40 REM V=VELOCITY OF A
50 REM W=ANGULAR VELOCITY
60 READ L, V
70 DATA 2.5, 4
80 PRINT
90 PRINT "ANGLE", "VELOCITY"
100 FOR T=0 TO 45 STEP 5
110 W=V/(L* (COS(T* 3.14159/180)+SIN(T* 3.14159/180)))
120 PRINT T, W
130 NEXT T
140 END
```

```
ANGLE        VELOCITY
0            1.6
5            1.4769
10           1.38115
15           1.30639
20           1.24833
```

25	1.20398
30	1.17128
35	1.14882
40	1.13569
45	1.13137

注意：在 IMB－PC 计算机上运行程序例 7.12、13.22 和 14.9 与微软的 BASIC 程序计算的结果相同.由 DEC 计算机上运行程序求解题 5.18 和 6.8 与 VAX BASIC version 3.0 或更高程序计算结果相同.

附录 D　Schaum 的电子导学算例分析

本书附有用 Mathcad® 编制的 Schaum 电子导学软件，使你能更容易地学习本门课程.利用 Mathcad 计算软件生动的数学环境使同学们在显示器上看到这本书上约 100 个典型例题，且同时给出了重要原理的综述.该软件具有交互性和超级链接.后面的一个算例展示出电子导学作为电子学习工具所具有的强大的功能.每道例题的开始都给出了相应的页号，以便将屏幕上结果与书中的例题进行比较.

在 Schaum 电子导学中给出了与任一到特定的例题相关的内容、图表和公式.所涉及到的数学符号、甚至单位都是同学们所熟悉的.书中所印的 Schaum 导学与 Schaum 电子导学存在的差异，目的在于鼓励你与计算机进行交互，或证明不同的解题方法.

在你复习下面的内容时，请记住计算机所显示的每一个数、每一个公式及其每一张图表都具有交互性.

你可以通过改变题目的初始参数，观察新的计算结果.还可以改换任意公式且立即得到相应的解.每个等式、图表和数均可通过实验获得.每道例题都是一张活的作业纸，用它可解很多类似的题目，电子导学有助于学习和强化书中的内容，同时也可以作为解题的工具.

本页右侧的 Mathcad 图标贯穿于 Schaum 导学的全过程，作为电子导学中所发现问题的标记.

® Mathcad 是一种数学注册商标.

实　例

工程力学:叉乘

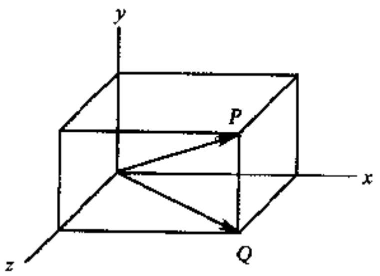
(电子教员求解题1.17)

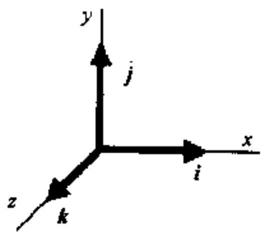
引言

本题将求解两个矢量的叉乘.在求解中,使用叉乘行列式的形式和 Mathcad 行(列)向量与矩阵算子,求解出两个矢量的叉乘结果.

陈述

求解矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的叉乘.





系统参数

矢量的分量:

矢量 $\boldsymbol{P}$: $P_x=2.85$ ft　　$P_y=4.67$ ft　　$P_z=-8.09$ ft

矢量 $\boldsymbol{Q}$: $Q_x=28.3$ lbt　　$Q_y=44.6$ lbt　　$Q_z=53.3$ lbt

解

为了求解,先定义笛卡尔坐标下的单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$.单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别用于指明 x、y 和 z 的方向.

单位矢量用 3×1 矩阵表示.

矩阵

$$\text{单位矢量}: \boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

行列式形式

叉乘行列式形式计算如下:

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{bmatrix}$$

$$=(P_yQ_z-P_zQ_y)\boldsymbol{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\boldsymbol{j}$$

$$+(P_xQ_y-P_yQ_x)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=(P_yQ_z-P_zQ_y)\boldsymbol{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\boldsymbol{j}+(P_xQ_y-P_yQ_x)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}609.725\\-380.852\\-5.051\end{pmatrix}\text{ft-lbf}\qquad\Leftarrow$$

Mathcad 矩阵

矢量 $\boldsymbol{P}$ 等于每个分量 P_x, P_y, P_z 分别乘以相应单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的和.

$$\boldsymbol{P}=P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2.85\\4.67\\-8.09\end{pmatrix}\text{ft}$$

矢量 $\boldsymbol{Q}$ 等于每个分量 Q_x、Q_y、Q_z 分别乘以相应单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的和.

$$\boldsymbol{Q}=Q_x\boldsymbol{i}+Q_y\boldsymbol{j}+Q_z\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}28.3\\44.6\\53.3\end{pmatrix}\text{lb}$$

矢量和矩阵算子运算

使用叉乘矢量和矩阵算子计算叉乘.

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}609.725\\-380.852\\-5.051\end{pmatrix}\text{ft-lbf}\qquad\Leftarrow$$

探索

你喜欢用哪种方法计算叉乘,是喜欢用行列式形式还是喜欢用 Mathcad 矢量与矩阵算子计算呢? 当 $\boldsymbol{P}=2.83\,\boldsymbol{i}+4.46\,\boldsymbol{j}+5.33\,\boldsymbol{k}$ ft 时,叉乘为何? 使用工作盘求解体 1.47、1.50 和 1.55.

工程力学:共点力系

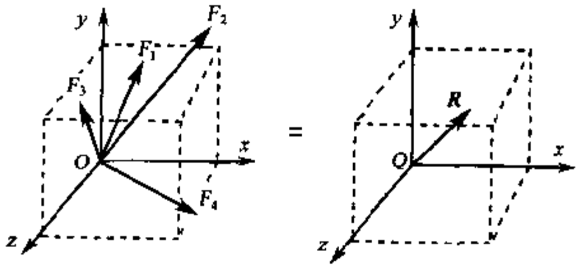
(电子教员求解题 4.1)

引言

本题将求解空间共点力系的合力. 共点力系的合成结果可能是(a)过汇交点的一个力或(b)等于零.

陈述

共点力系 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4$,汇交在原点,并方向分别过点 1,2,3 和 4. 求力系的合力.



力系参数

力的数量:$N=4$.

矢量的首和尾坐标:

点 0:	$x_0:=0\text{ft}$	$y_0:=0\text{ft}$	$z_0:=0\text{ft}$
点 1:	$x_1:=2\text{ft}$	$y_1:=1\text{ft}$	$z_1:=6\text{ft}$
点 2:	$x_2:=4\text{ft}$	$y_2:=-2\text{ft}$	$z_2:=5\text{ft}$
点 3:	$x_3:=-3\text{ft}$	$y_3:=-2\text{ft}$	$z_3:=1\text{ft}$

点 4:　$x_4 := 5ft$　$y_4 := 1ft$　$z_4 := -2ft$

力系

力 1:　$F_1 := 20lbf$

力 2:　$F_2 := 15lbf$

力 3:　$F_3 := 30lbf$

力 4:　$F_4 := 60lbf$

解

为方便执行程序的计算,定义 i 为离散变量, $i=1,\cdots,N$

离散变量

每个空间力 $\boldsymbol{F}$ 都有:x 分量 F_x;y 分量 F_y;z 分量 F_z.

合力的 x 分量 R_x 等于力沿 x 方向的分量 F_x 的和;合力的 y 分量 R_y 等于力沿 y 方向的分量 F_y 的和;合力的 z 分量 R_z 等于力沿 z 方向的分量 F_z 的和.

每个力沿 x、y 和 z 的分量 F_x、F_y 和 F_z 都等于力 $\boldsymbol{F}$ 的大小乘以其方向余弦.方向余弦等于矢量沿 x、y 和 z 方向的长度除以位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小.

x 方向:$\cos(\theta_x)=\dfrac{F_x}{F}=\dfrac{x}{r}$　和　$F_x=F\dfrac{x}{r}$

y 方向:$\cos(\theta_y)=\dfrac{F_y}{F}=\dfrac{y}{r}$　和　$F_y=F\dfrac{y}{r}$

z 方向:$\cos(\theta_z)=\dfrac{F_z}{F}=\dfrac{z}{r}$　和　$F_z=F\dfrac{z}{r}$

因为力系是汇交的,其每个矢量的尾都交在点 $O(x_0,y_0,z_0)$.因此连续计算力的分量.

x 方向:$F_{x_i}=F_i\cdot\dfrac{x_i-x_0}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2}}$　$\dfrac{F_{x_i}}{\text{lbf}}$

6.25
8.94
-24.05
45.62

y 方向:$F_{y_i}=F_i\cdot\dfrac{y_i-y_0}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2}}$　$\dfrac{F_{y_i}}{\text{lbf}}$

3.12
-4.47
-16.04
9.13

z 方向:$F_{z_i}=F_i\cdot\dfrac{z_i-z_0}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2}}$　$\dfrac{F_{z_i}}{\text{lbf}}$

18.74
11.18
8.02
-18.26

总和

合力沿 x, y 和 z 方向的分量 $\boldsymbol{R}_x$, $\boldsymbol{R}_y$ 和 $\boldsymbol{R}_z$ 等于各力沿 x, y 和 z 方向的分量 F_x, F_y 和 F_z 的和.用求和运算程序完成和的计算.

x 分量: $R_x=\sum_{i=1}^{N}F_{x_i}$,　　$R_x = 36.78\ \text{lbf}$

y 分量：$R_y = \sum_{i=1}^{N} F_{y_i}$，　　$R_y = -8.26$ lbf

z 分量：$R_z = \sum_{i=1}^{N} F_{z_i}$，　　$R_z = 19.68$ lbf

合力 $\mathbf{R}$ 的大小，由六面体对角线得到.

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} \qquad R = 42.53 \text{ lbf} \quad \Leftarrow$$

合力 $\mathbf{R}$ 与 x、y 和 z 轴的方向角 θ_x、θ_y 和 θ_z，由方向余弦求得.

x 方向：$\theta_x = \mathrm{a}\cos\left(\frac{R_x}{R}\right)$　　$\theta_x = 30.13$ deg　$\Leftarrow$

y 方向：$\theta_y = \mathrm{a}\cos\left(\frac{R_y}{R}\right)$　　$\theta_y = 101.19$ deg　$\Leftarrow$

z 方向：$\theta_z = \mathrm{a}\cos\left(\frac{R_z}{R}\right)$　　$\theta_z = 62.43$ deg　$\Leftarrow$

探索

当力汇交于点 O，并过坐标(10 ft, 10 ft, 10 ft)，求合力的大小和方向余弦为何?

此工作盘可以求解任意共点力系的合力.使用此工作盘求解题4.6、4.7、4.8、4.9和4.10.

工程力学：压力中心(阀门)

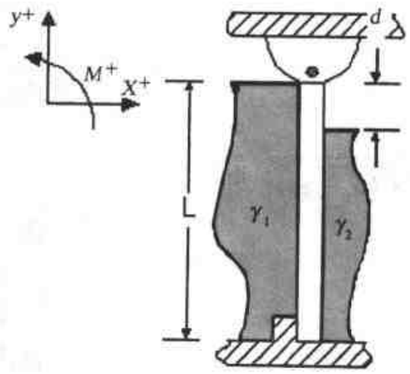
(电子教员求解题10.28)

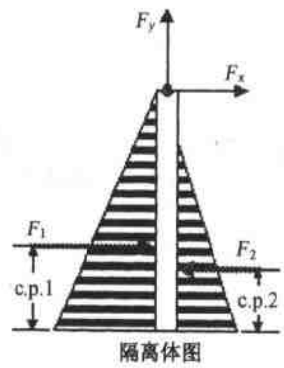
引言

本题是应用压力中心的概念求解水闸门的问题.

陈述

矩形闸门两边分别有不同密度的液体.闸门顶部铰接，低部靠在挡板上.求使闸门仍然关闭的两边液体的最大深度差 d.





系统

闸门高：　　$L = 12$ ft

液体 1 比重：　　$\gamma_1 = 62.4\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$

液体 2 比重：　　$\gamma_2 = 105\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$

解

画闸门的隔离体图如下.闸门两边位于液体表面处的液体压力为零；在闸门最底部的液体压力为最大值.因此，压力分布是线性的(三角形)，则压力中心位于离底边深度的 1/3 或离液体表面深度的 2/3.

分两步解,第一步列写闸门两边力的方程;第二步,列写力对铰之矩的求和方程并求解 d

液体压强 P(离液体表面深 h 处)等于液体比重 γ 乘以液体深度 h.

$$P = \gamma h$$

液体压力 F 等于液体压强 p 乘以液体面积 A.

$$F = pA$$

将压强方程代入力的方程,得用液体比重、深度和面积表示的力的方程.

$$F = (\gamma h)A$$

现在,闸门两边作用在闸门上单位宽度(注意单位宽度为 1)的力的方程可以写出.在闸门的 1 边,液体表面深度是零,底部深度是 L,因此平均深度是 $\frac{L}{2}([0+L]/2)$.同样,门 2 边的平均深度是 $\frac{(L-d)}{2}$.

1 边:$F_1 = \gamma_1 \frac{L}{2}(L\cdot 1)$

2 边:$F_2 = \gamma_2\left(\frac{L-d}{2}\right)((L-d)\cdot 1)$

求解器

距离 d 可由力对铰之矩求和的平衡方程得到.

$$\Sigma M_{铰} = F_1\left(\frac{2}{3}L\right) - F_2\left[d + \left[\frac{2}{3}(L-d)\right]\right] = 0$$

$$\Sigma M_{铰} = \left[\gamma_1 \frac{L}{2}(L\cdot 1)\right]\left(\frac{2}{3}L\right) - \left[\gamma_2 \frac{L-d}{2}(L-d)\cdot 1\right]\left[d + \left[\frac{2}{3}(L-d)\right]\right] = 0$$

使用求解器完成对 d 的求解.

初解估算:　$d = 2\ \mathrm{ft}$

$$\left[\gamma_1 \frac{L}{2}(L\cdot 1)\right]\left(\frac{2}{3}L\right) - \left[\gamma_2 \frac{L-d}{2}(L-d)\cdot 1\right]\left[d + \left[\frac{2}{3}(L-d)\right]\right]$$

$$= 0.\ \mathrm{lbf}\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{ft}}$$

$d = 3.331\ \mathrm{ft}$　$\Leftarrow$

探索

如果 2 边液体的比重是 200 $\mathrm{lbf/ft^3}$,求闸门仍然关闭的两边液体深度的最大差值.

工程力学:加速度(终极速度)

(电子教员求解题 13.53)

引言

本题是探讨物体在介质中下落的终极速度问题.

陈述

小孩质量为 M,在阻尼系数 k 的介质中下落.求终极速度为何?

隔离体图

系统参数

小孩质量：　$M = 1.5\ \text{kg}$

阻力：　$k = 0.7\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$

解

画小孩下落中的隔离体图如上.

写小孩的运动方程

$$\sum F_y = Mg - kv = Ma \quad 或 \quad \sum F_y = Mg - kv = M\frac{dv}{dt} \tag{1}$$

由分离变量求解微分方程(1).

除以质量

$$\frac{M}{M}g - \frac{k}{M}v = \frac{M}{M}\frac{dv}{dt} \qquad g - \frac{k}{M}v = \frac{dv}{dt}$$

令
$$C = \frac{k}{M} \qquad g - Cv = \frac{dv}{dt}$$

分离变量
$$dt = \frac{dv}{g - Cv}$$

并且积分
$$\int 1dt = \int \frac{dv}{g - Cv}dv$$

得到

$$t + D = \frac{1}{C}\ln(g - Cv)$$

$$-Ct + (-CD) = \ln(g - Cv)$$

$$e^{-Ct}e^{-CD} = g - Cv \tag{2}$$

积分常量 D，根据初始条件求得.

$$t = 0 \quad 时 \quad v = 0$$

$$e^{-Ct(0)}e^{-CD} = g - C(0)$$

$$e^{-CD} = g \tag{3}$$

函数

将方程(3)代入方程(2)中，解出速度 v，并写成时间 t 的函数方程.

$$e^{-Ct}g = g - Cv$$

$$Cv = g - ge^{-Ct}$$

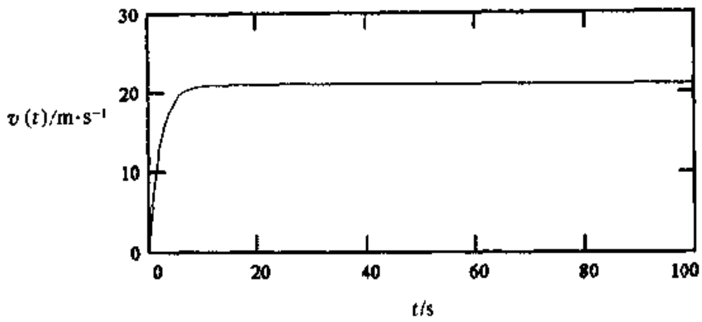
$$v(t) = \frac{g}{C}(1 - e^{\ Ct}) \tag{4}$$

离散变量

记录小孩在下落的不同时间的速度. 定义时间 t 为离散变量.

$t = 0\ \text{sec}, \cdots, 100\ \text{sec}$

$X - Y$ 平面图



速度对时间的关系曲线

在 $x-y$ 平面上，画出速度对时间变化曲线.

由图可知，终极速度经过"长"时间达到.在数学上"长"时间后，指数方程趋于零.在本题中 100 s，即是那个长时间.

$$e^{-C(100s)}=0$$

终极速度为

$$v_{终极}=\frac{g}{C}(1-0)$$

$$v_{终极}=\frac{g}{C}$$

$$v_{终极}=21\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\Leftarrow$$

如果小孩的质量是 4 kg，阻尼系数是 0.3 Ns/m，求终极速度为何？

工程力学：简谐运动

(电子教员解题 19.29)

引言

本题探讨简谐运动位移、速度和加速度的问题.

陈述

质量 M，按已知函数 $x(t)$ 作简谐振动.如果振幅是 X，系统振动的固有频率是 ω，求质量块的最大加速度 a.

系统参数

质量：　$M=5$ kg

振幅：　$X=100$ mm

固有频率：　$\omega=1750\ \frac{2\pi}{\mathrm{min}}$

函数

运动函数：$x(t)=X\sin(\omega t)$

解

质量的速度 $v(x)$ 等于位移对时间的一次导数；加速度 $a(t)$ 等于位移的二次导数.

速度：　$v(t)=X\cos(\omega t)\omega$

加速度：　$a(t)=-X\sin(\omega t)\omega^2$

当 $\sin(\omega t)=1$(或 -1)时，最大加速度出现.

$$a_{\max}=-X1\omega^2$$

$$a_{max} = -3358.41\ \frac{m}{s^2} \qquad \Leftarrow$$

探索

讨论质量块在一个周期内的位移、速度和加速度.

周期 τ 等于 2π 除以固有频率 ω.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \tau = 0.03\ \text{s}$$

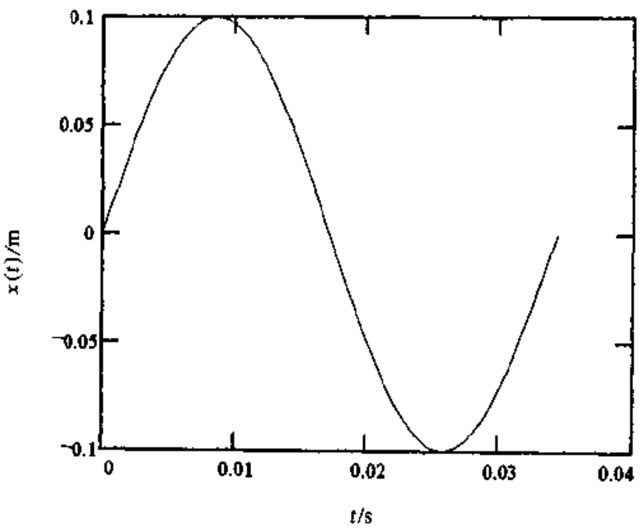
离散变量

定义时间 t 为离散变量.

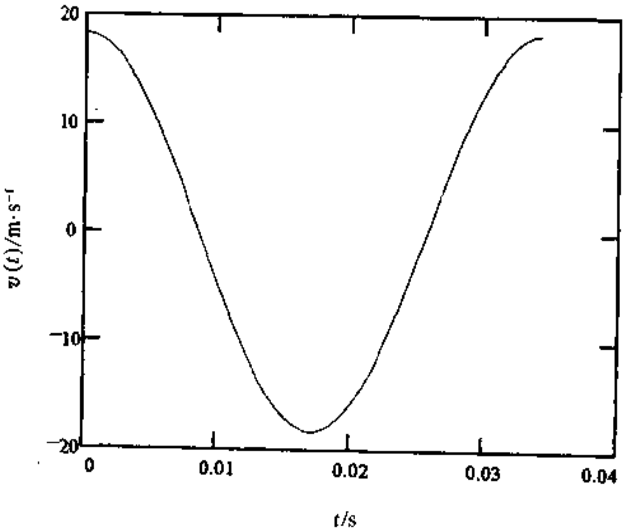
$$t_{范围} = 0\tau, \frac{\tau}{50}, \cdots, \tau$$

在 X-Y 平面中,画出位移、速度和加速度图

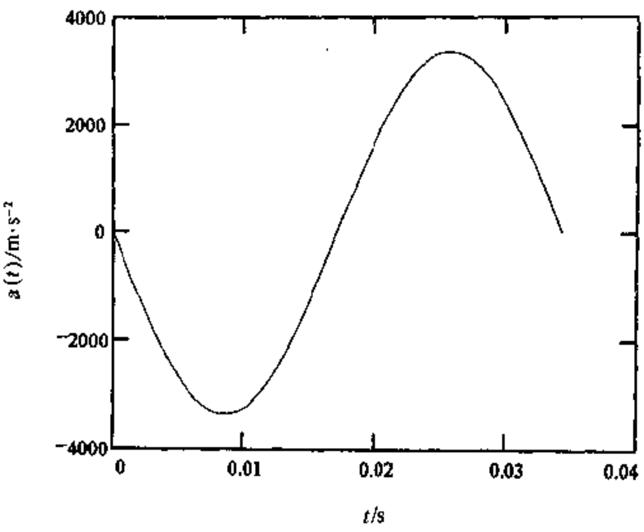
***X-Y* 平面图**



位移对时间的关系曲线



速度对时间的关系曲线



加速度对时间的关系曲线

当位移和加速度是极大值时,速度等于________.